二次元境界要素法による動的応力集中係数の解析*

松本浩之^{*1}, 足立忠晴^{*1}
角濱義隆^{*2}, 福澤敬一^{*3}Analysis of the Dynamic Stress Concentration Factor
by the Two-Dimensional Boundary Element MethodHiroyuki MATSUMOTO, Tadaharu ADACHI,
Yoshitaka KAKUHAMA, and Keiichi FUKUZAWA

Two-dimensional impulsive stresses are analyzed by the boundary element method with the Laplace transformation and the numerical inverse transformation using the fast Fourier transformation. The condition of the stability between the length of the element and the time step is given by the analysis. The validity of the condition is confirmed by the numerical results. Under the consideration of this condition, the dynamic stress concentration factors of the circular hole, the elliptic hole and the elliptic notch in a strip are obtained from the surface forces and the tangential derivatives of surface displacements. It is shown that the dynamic stress concentrations are approximately ten percent larger than the static ones.

Key Words: Elasticity, Boundary Element Method, Two-Dimensional Dynamic Stress, Numerical Inverse Laplace Transformation, Condition of Stability, Dynamic Stress Concentration Factor

1. 緒 言

境界要素法により衝撃問題を解析する場合、時間変数の取扱いにより数種の方法が提案されている。時間変数を陽な形で含んだ基本解を用いる方法、方程式に含まれる時間微分を差分近似する方法および時間変数をラプラス変換する方法などである^{(1)~(3)}。これらのうち時間変数をラプラス変換する方法は、方程式の変数の数が減少し基本解および積分方程式の定式化が容易となる。またラプラス逆変換に高速フーリエ変換を利用した数値逆変換法を用いれば比較的数値計算時間が短くてすみ経済的である⁽⁴⁾。

ところで衝撃問題を境界要素法で解析する場合、境界要素の大きさと時間間隔を適切に選択しなければ数値結果が不安定となる。Coleら⁽⁵⁾は境界要素の大きさ Δs 、時間間隔 Δt および弾性波の速度 c_0 を用いたパラメータ

$$\beta = \frac{c_0 \Delta t}{\Delta s} \dots\dots\dots (1)$$

を0.5として数値計算を行っている。MansurとBrebbia⁽⁶⁾は種々の解析結果を用いて β の適切な値について検討しており、0.6程度の値を推奨している。しかし β の値は一般に経験的に設定されているようである。

本研究では境界要素法のラプラス変換解法と高速フーリエ変換を利用した数値逆変換法とを組合せた方法を用いて二次元弾性衝撃問題の解析を行う。また境界要素法を用いる場合、最も精度が低い境界上の応力を表面力と表面変位の接線微分より求める方法⁽⁷⁾を適用する。さらに式(1)の β の条件式を解析的に導出し、衝撃内圧をうける無限体および円筒の問題を解析し数値的にこの条件式の妥当性の検討を行う。動的応力集中係数を求めるため、動的公称応力を定義し境界上の応力の精度の確認を行った上で、円孔を有する帯板の縦衝撃問題における応力集中係数を求め有限要素法⁽⁸⁾および実験⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾によって得られた値と比較し本方法の有効性の確認を行う。そして円孔あるいは円切欠きを有する帯板の動的応力集中係数を解析する。これらの結果をもとに境界要素法で調和振動解析する場合にやっかいな見かけの固有振動問題⁽¹⁵⁾を過渡応答解

* 昭和61年12月16日 第36回応用力学連合講演会において講演、原稿受付 昭和62年8月31日。

*¹ 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

*² 三菱重工業(株) (〒229 相模原市田名3000)。

*³ キヤノン(株) (〒163 東京都新宿区西新宿2-7-18)。

析において考慮する必要があるかどうかについて検討する。

2. 境界要素法の定式化

2.1 境界積分方程式の導出 図1のように境界 Γ で囲まれた二次元の弾性体を考える。二次元動弾性問題の基礎方程式は次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} - \rho u_{i,t} &= 0 \\ \sigma_{ij}/G &= (c^2 - 2)u_{i,t}\delta_{ij} + (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ T_i &= \sigma_{ij}n_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで

$$\begin{aligned} c &= c_e/c_2, \quad c_2^2 = G/\rho \\ c_e^2 &= \begin{cases} c_1^2 = c_2^2 2(1-\nu)/(1-2\nu) & \text{平面ひずみ} \\ c_3^2 = c_2^2 2/(1-\nu) & \text{平面応力} \end{cases} \\ f_{,i} &= \partial f / \partial x_i, \quad i, j, l = 1, 2 \end{aligned}$$

であり、 $G, \nu, \rho, u_i(x), \sigma_{ij}(x)$ および $T_i(x)$ はそれぞれ、横弾性係数、ポアソン比、密度、応力および表面力を示す。 $x=(x_1, x_2)$ および t は図中に示される座標および時間であり、 n_i および δ_{ij} は境界 Γ 上の法線方向の単位ベクトルおよびクロネッカのデルタである。

時間 $t=0$ 以前において弾性体は無応力状態で静止しているとして式(2)をラプラス変換する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij,j} - \rho p^2 \bar{u}_i &= 0 \\ \bar{\sigma}_{ij}/G &= (c^2 - 2)\bar{u}_{i,t}\delta_{ij} + (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \\ \bar{T}_i &= \bar{\sigma}_{ij}n_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$$

である。

式(3)に重み付き残差法を適用すれば弾性体内部および境界 Γ 上に関する積分方程式が次のように求められる。

$$\begin{aligned} c_{ji}\bar{u}_i(x;p) &= \int_\Gamma \{\bar{u}_j^*(x,y;p)\bar{T}_i(x;p) \\ &\quad - \bar{T}_j^*(x,y;p)\bar{u}_i(x;p)\} d\Gamma(y) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

図1 二次元弾性体

ここで

$$c_{ji} = - \int_\Gamma \bar{T}_j^* d\Gamma = \begin{cases} \delta_{ji}/2 & \text{滑らかな境界上} \\ 1 & \text{弾性体内部} \end{cases}$$

である。 $\bar{u}_j^*(x,y;p)$ および $\bar{T}_j^*(x,y;p)$ はそれぞれ変位および表面力の基本解であり、次式で示されるものを用いるものとする⁽¹¹⁾。

$$\bar{u}_j^*(x,y;p) = \frac{1}{2\pi G} \left\{ \psi(r;p)\delta_{ji} - \chi(r;p)\frac{r_j r_i}{r^2} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで

$$\begin{aligned} \psi(r;p) &= K_0(\alpha_2) + \{K_1(\alpha_2) - K_1(\alpha_e)/c\}/\alpha_2 \\ \chi(r;p) &= K_2(\alpha_2) - K_2(\alpha_e)/c^2 \end{aligned}$$

$\alpha_2 = pr/c_2, \alpha_e = pr/c_e, r = |y-x|, r_i = y_i - x_i$ であり、 $K_n(\alpha)$ は第2種の変形ベッセル関数である。表面力の基本解 $\bar{T}_j^*$ は式(5)を式(3)に代入することにより求められる。

式(4)において $c_{ji} = \delta_{ji}/2$ として、境界積分方程式を解くことにより境界 Γ 上の変位が求められる。この結果から式(4)で $c_{ji} = 1$ として内点の変位が得られ、式(3)から内点の応力が得られる。式(4)を解くにあたって本研究では境界 Γ を一定要素により離散化を行った。

2.2 境界上の応力の導出 内点の応力を求める式を用いると境界に近づくにつれて応力値の誤差が大きくなる。そこで境界上の変位の接線微分および表面力より境界上の応力を求める⁽⁷⁾。

境界上の変位の接線方向 s の微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial s} = \bar{u}_{j,i} \frac{dx_j}{ds} \dots\dots\dots (6)$$

式(3)の第2, 3式および式(6)より境界上の応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ が次式のように求められる。

$$\frac{c^2}{G} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{22} \end{bmatrix} = [m_{ik}] \begin{bmatrix} \bar{T}_1/G \\ \bar{T}_2/G \\ \partial \bar{u}_1 / \partial s \\ \partial \bar{u}_2 / \partial s \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

ここで

$$\begin{aligned} m_{11} &= l_1 n_1, \quad m_{12} = l_2 n_2, \quad m_{13} = -l_5 n_2^2 \\ m_{14} &= l_5 n_2^2 n_1, \quad m_{21} = -l_4 n_2, \quad m_{22} = -l_2 n_1 \\ m_{23} &= l_5 n_2^2 n_1, \quad m_{24} = -l_5 n_1 n_2^2, \quad m_{31} = l_4 n_1 \\ m_{32} &= l_1 n_2, \quad m_{33} = -l_5 n_1^2 n_2, \quad m_{34} = l_5 n_1^3 \\ l_1 &= 2(c^2 - 1)n_2^2 + c^2, \quad l_2 = 2(c^2 - 1)n_2^2 - c^2 \\ l_3 &= 2(c^2 - 1)n_1^2 + c^2, \quad l_4 = 2(c^2 - 1)n_1^2 - c^2 \\ l_5 &= 4(c^2 - 1) \end{aligned}$$

である。

2.3 数値ラプラス逆変換 得られた変位および

応力を高速フーリエ変換 (FFT) を利用した Krings-Waller の方法⁽¹²⁾⁽¹³⁾により数値的にラプラス逆変換を行う。計算式は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \sigma_{ij} \\ u_i \end{array} \right]_k &= \frac{\exp(\gamma k \Delta t)}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\begin{array}{c} \bar{\sigma}_{ij} \\ \bar{u}_i \end{array} \right]_n \\ &\times \exp(i2\pi h k / T) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで

$$\left[\begin{array}{c} \sigma_{ij} \\ u_i \end{array} \right]_k = \left[\begin{array}{c} \sigma_{ij} \\ u_i \end{array} \right]_{t=k\Delta t}, \quad \left[\begin{array}{c} \bar{\sigma}_{ij} \\ \bar{u}_i \end{array} \right]_n = \left[\begin{array}{c} \bar{\sigma}_{ij} \\ \bar{u}_i \end{array} \right]_{p=\gamma+i n \Delta \omega}$$

$$T = N \Delta t, \quad \Delta \omega = 2\pi / T, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \gamma > 0$$

であり、 Δt および N は時間間隔およびサンプリング数である。

3. 数値計算結果

3.1 動的境界要素法における安定条件 解析しようとする構造の応答波形が最大 $f_{\max}$ の振動数成分を含むものとする。このとき境界要素の大きさを Δs とすれば

$$\Delta s \leq c_e / f_{\max} \dots\dots\dots (9)$$

が成立することが必要である。

FFT を利用した数値ラプラス逆変換においてサンプリング定理より Δt と $f_{\max}$ の間に次の関係がある。

$$\Delta t = 1 / 2 f_{\max} \dots\dots\dots (10)$$

式(10)を式(9)に代入することにより

$$\beta = \frac{c_e \Delta t}{\Delta s} \geq \frac{1}{2} \dots\dots\dots (11)$$

が求められる。

したがって式(11)を満足するように Δt と Δs を定めればよいことになる。本研究においては Δs として境界要素の最大の大きさを用いた。

また以下の数値計算においてポアソン比を 0.3 とした。

3.2 円孔面に衝撃内圧をうける無限体の解析

図 2 のように無限体中の半径 a の円孔面に一様な

図 2 円孔面に衝撃内圧をうける無限体

衝撃内圧が加わる場合を考える。このときの境界条件は次式で与えられる。

$$r=a \text{ において } \begin{cases} \sigma_r = F_0 f(t) \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

ここで

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

である。

3.1 節で求められた β の値と数値解の精度の関係を調べるために円孔面を 12 個の境界要素に等分割し、これに対してサンプリング数を $N=32$ および 128 とし数値計算を行った。また $\gamma=5/T$ および $T=20a/c_1$ とした。このときの結果を図 3 に示す。図中の実線は解析解⁽¹⁴⁾である。要素数を 12 として $N=32$ および $N=128$ の場合、それぞれ $\beta=1.2$ および 0.32 となる。FFT による数値ラプラス逆変換において一般にサンプリング数を増加させれば数値結果の精度は向上する⁽¹³⁾。しかし、この数値結果の場合、サンプリング数のみを増加させたために式(11)の条件を満足しないこととなり誤差が大きくなっている。また式(7)により求められた境界 Γ 上の応力は簡便な定式化にもかかわらず良好な結果が得られることがわかった。

内部領域を含む動弾性問題を境界要素法によって解

図 3 円孔面に衝撃内圧をうける無限体の応力変動 (実線は解析解を示す)

析する場合、結果にみかけの固有振動数が影響を及ぼすことが知られている⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。しかし本研究において解析の対象とした問題において、このような現象は見られず特別な方法を用いる必要はなかった。

3.3 衝撃内圧を受ける円筒の解析 図4のように外径 b 、内径 a の円筒の内面に一様な衝撃内圧が加わる場合を考える。このときの境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} r=a \text{ において } \begin{cases} \sigma_r = F_0 f(t) \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \\ r=b \text{ において } \sigma_r = \sigma_{r\theta} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで

$$f(t) = \begin{cases} (1 - \cos \pi t/t_0)/2 & t_0 \leq t < \infty \\ 1 & t < t_0 \end{cases}$$

である。

β の値と数値解の精度の関係を調べるために、サンプリング数を 32 とし境界要素の数を変化させて数

値計算を行った。境界要素の数は内外面とも同様に等分割し、要素数の合計を 24, 48 および 72 の 3 種類とした。このときの数値結果を解析解⁽¹⁴⁾に対する数値解の相対誤差の平均値として表 1 に示す。境界要素の数が 24, 48 および 72 のときの β の値は 0.24, 0.48 および 0.72 となる。表 1 より式(11)の条件を満足すれば精度のよい数値解が得られることがわかった。よって導出された式(11)の妥当性が確認され、この条件式を満たすように境界要素の大きさと時間間隔を設定しなければならないことがわかった。このとき境界要素数の二乗およびサンプリング数に比例して数値計算時間が増加することに注意する必要がある。

円筒の応力の時間変動の一例を図 5 に示す。実線は解析解⁽¹⁴⁾である。この場合についても境界上の応力が十分な精度を持っていることがわかる。

3.4 円孔を有する帯板の縦衝撃の解析 図 6 のように半径 R の円孔を有する長さ L 、幅 $2W$ の帯板が一端を固定され、他端より縦衝撃をうける問題を考える。本問題は有限要素法により高木ら⁽⁸⁾によって要

表 1 β の値と変位および応力の数値解の誤差

r/a	M	Average of Error (%)		
		u_r	σ_r	σ_θ
1.00	24	8.60	0.32	7.40
	48	3.36	0.32	4.41
	72	2.41	0.32	3.02
1.25	24	5.44	25.45	5.59
	48	2.09	5.73	3.30
	72	1.47	2.76	1.35
1.50	24	4.36	13.46	5.61
	48	2.01	3.14	1.98
	72	1.46	2.14	1.37
3.00	24	3.47	18.75	5.39
	48	1.71	3.33	1.78
	72	1.27	2.13	1.10
5.00	24	8.44	--	4.62
	48	3.92	--	0.82
	72	1.14	--	0.50

M=24 : $\beta=0.24 < 0.5$

M=48 : $\beta=0.48 \approx 0.5$

M=72 : $\beta=0.72 > 0.5$

M : Number of Elements

図 4 衝撃内圧を受ける円筒

図 5 衝撃内圧を受ける円筒の応力変動
(実線は解析解を示す)

図 6 円孔を有する帯板の縦衝撃

素数 538, 節点数 311 として解析されている。ここでは高木らと同様の条件下において解析を行い, 本解析方法の動的応力集中係数算出の有効性の検討を行う。作用する衝撃力は次式で与えられる。

$$F_0 f(t) = F_0 \{1 - \exp(-2.333 W t / c_2)\} \cdots \cdots (14)$$

衝撃力の負荷部と固定部以外の境界は自由表面である。

図 7 に円孔面の A 点における σ_e の時間変動を示す。数値計算にあたって図 6 のように板の対称性を考慮して境界を 64 個の要素に分割し, サンプルング数を 64 とした。このときの β の値は 0.5 である。また $\gamma = 6/T$, $T = 12.86 W / c_3$, $L/W = 7.2$, $S/W = 2.8$ および $R/W = 0.2$ である。図中の実線および破線は本解析による結果および高木らによる有限要素法の結果である。図から示されるように本解析法と有限要素法による結果はほぼ一致していることがわかる。

得られた応力変動の数値を用いて円孔を有する帯板の動的応力集中係数を求める。図 8 のように応力集中係数 α は反射波が到達するまで時間において切欠部に生じる最大応力 $\sigma_{\max}$ と, 同時刻における切欠部の最小断面に生じる応力の平均値 σ_{nom} との比と定義す

図 7 円孔を有する帯板の A 点における応力変動

図 8 動的応力集中係数 α の定義

る。最小断面を 7 分割し, 各分点の応力による合力を Simpson の数値積分により求め横断面積で除して平均応力 σ_{nom} を求めた。 $L/W = 7$ の帯板の円孔の大きさを変化させた場合の結果を図 9 に示す。図中に有限要素法による高木らの結果, 実験的に求められた松本⁽⁹⁾, 茶谷ら⁽¹⁰⁾の結果および解析解に求められた静的な場合の Howland⁽¹⁷⁾の結果を示す。本解析による結果によれば, 高木らおよび松本の結果とほぼ一致しており, 静的な場合より約 1 割程度大きい値を示し, 円孔が大きくなるにつれて静的な値に近づく傾向があることがわかる。

3.5 だ円孔およびだ円切欠きを有する帯板の縦衝

図 9 円孔を有する帯板の動的応力集中係数 ($L/W = 7$)

図 10 だ円孔およびだ円切欠きを有する帯板の縦衝撃

 図 11 だ円孔を有する帯板の動的応力集中係数 ($R/W=0.2, L/W=7$)

 図 12 だ円切欠きを有する帯板の動的応力集中係数 ($R/W=0.2, L/W=7$)

撃の解析 図 10 のようにだ円孔あるいはだ円切欠きを有する長さ L , 幅 $2W$ の帯板の縦衝撃問題を考える。加えられる外力は式 (14) で示されるものである。

数値計算にあたっては対称性を考慮して図 10 のようなモデルを用いて境界要素に分割し、サンプリング数を 64 とした。また $R/W=0.2$ および $r/R=1, 0.8, 0.6, 0.4$ とし、他のパラメータについては 3・4 節と同様のものを用いた。動的応力集中係数の解析結果を、だ円孔の場合については図 11 に、だ円切欠きの場合については図 12 に示す。図 11 については石田⁽¹⁸⁾および図 12 については西谷⁽¹⁹⁾の静的応力集中係数の結果を実線にて示す。いずれの場合も静的な応力集中係数よりも約 1 割大きい値を示すことがわかった。

4. 結 言

本研究はラプラス変換法と FFT を利用した数値逆変換法を適用した二次元動弾性問題に対する境界要素法によって、動的応力集中問題を解析したものである。数値計算において重要である境界要素の大きさと時間間隔の関係を表すパラメータ β の値が 0.5 以上でなければならないことを示し、数値計算によってその妥当性の確認を行った。この条件式はラプラス変換法を利用した境界要素法だけでなく、時間領域内で計算される境界要素法に対しても適用できるであろうと思われる。また表面力と表面変位の接線微分より表面の応力を求める方法を用いて良好な結果を得た。さらにこの方法を用いて、円孔、だ円孔およびだ円切欠き

を有する帯板の動的応力集中係数を求め、静的な結果よりも約 1 割大きな値を示すことがわかった。

なお数値計算には東京工業大学総合情報処理センターの HITAC M-280H を使用した。

文 献

- (1) 田中, 機械の研究, 35-10 (昭 58), 1179.
- (2) 田中, 機械の研究, 35-11 (昭 58), 1299.
- (3) 田中, 数理科学, 282 (昭 61), 30.
- (4) Manolis, G. D., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 19 (1983), 73.
- (5) Cole, D. M., ほか 2 名, *Bull. Seismological Soc. Am.*, 68-5 (1978), 1331.
- (6) Mansur, W. J. and Brebbia, C. A. (Brebbia 編), *Topics in Boundary Element Research*, 2, Chap. 4 (1985), 87, Springer Verlag.
- (7) Kobayashi, S. and Nishimura, N. (Banerjee and Show 編), *Developments in Boundary Element Method-2*, Chap. 7 (1982), 177, Applied Science.
- (8) 高木・ほか 2 名, 非破壊検査, 30-2 (昭 56), 984.
- (9) 松本, 非破壊検査, 18-8 (昭 44), 343.
- (10) 茶谷・内山, 材料, 21-226 (昭 47), 636.
- (11) Doyle, J. M., *J. Math. Anal. Appl.*, 13 (1966), 118.
- (12) Krings, W. and Waller, H., *Int. Num. Meth. Eng.*, 14 (1979), 1183.
- (13) 足立・ほか 2 名, 機論, 51-467, A (昭 60), 1886.
- (14) 松本・中原, 機論, 32-237 (昭 41), 709.
- (15) Kobayashi, S. and Nishimura, N. (Brebbia 編), *Boundary Element Methods in Engineering*, (1982), 282, Springer Verlag.
- (16) Shenck, H. A., *J. Acoust. Soc. Am.*, 44-1 (1968), 41.
- (17) Howland, R. C. J., *Phil. Trans. Roy. Soc., A*, 229 (1929), 67.
- (18) 石田, 機論, 21-107 (昭 30), 514.
- (19) 西谷, 機論, 41-349 (昭 50), 2518.