混合モード荷重下における J 積分の適用限界*

吉田 勉^{*2}, 青木 繁^{*1},
岸本 喜久雄^{*1}, 坂田 勝^{*1}

Specimen Size Requirement for J-Characterization under Mixed Mode Loading

Tsutomu YOSHIDA, Shigeru AOKI,
Kikuo KISHIMOTO and Masaru SAKATA

The elastic/plastic finite element analysis was performed to provide insight as to the minimum specimen size limitations for J-characterization in large scale yielding under mixed mode condition. Power-law hardening constitutive equation was employed and plane strain condition was assumed. The criterion used to judge the degree of dominance was the extent of agreement of the stress field near the deformed crack tip with the result for a small scale yielding.

It was found that the ratio of the minimum ligament to J/σ_0 for the specimen under mixed mode condition necessary to ensure a J-based characterization was required to satisfy the next condition,

$$\begin{aligned} L &\geq 80 \cdot J/\sigma_0 \text{ for Mode I tensile specimen,} \\ L &\geq (80 \sim 50) \cdot J/\sigma_0 \text{ for Mode I tensile + Mode II specimen and} \\ L &\geq 50 \cdot J/\sigma_0 \text{ for Mode II specimen.} \end{aligned}$$

Key Words : Fracture, J-integral, Mixed Mode Condition,
Minimum Specimen Size Limitation, Large Scale Yielding

1. 緒言

高じん性材料で製作された構造物の健全性評価においてはき裂先端付近に大きな塑性変形を伴う破壊が問題となる。また、実際の機械、構造物は引張り負荷だけではなく、せん断やねじり負荷を受けることが多い。そのような構造物にき裂が存在する時、き裂はモード I の開口型変形だけでなく、モード II, III のせん断変形が重なった混合モード変形にさらされる。したがって実構造物の破壊発生に対する安全性を高めるためには混合モード変形下におかれ、大きな塑性変形を伴うき裂の弾塑性破壊挙動を明らかにすることが重要と思われる。

モード I の単調増加荷重下でき裂材が塑性変形を伴って破壊を開始する場合、J 積分⁽¹⁾の有効性が多いの研究により確認されている。しかし、J 積分の有効範囲は物体やき裂の形状、引張りや曲げなどの荷

重の種類などによって異なることが知られている。McMeeking & Parks⁽²⁾は曲げ試験片と中央き裂試験片について有限変形理論に基づく有限要素法解析を行い、き裂長さ(中央き裂試験片ではき裂半長)を a 、リガメント長さを L 、降伏応力を σ_0 とするとそれぞれ、

$$a, L \geq 25 J/\sigma_0 \text{ (曲げ試験片)} \quad (1)$$

$$a, L \geq 200 J/\sigma_0 \text{ (中央き裂試験片)} \quad (2)$$
を満足しなければ HRR の特異応力・ひずみ場^{(3), (4)}が消失し、J 積分が使用出来なくなると主張している。最近、Shih⁽⁵⁾は半無限き裂問題に対して曲げ荷重と引張り荷重の比を種々に変化させた解析を行い、HRR 場が存在するための寸法条件を求めている。しかしながら、混合モード荷重に対しては J 積分が有効であるための試験片の寸法条件について検討した研究は少ない⁽⁶⁾。

そこで、本研究ではモード I (引張り荷重)およびモード II (せん断変位)の混合モード荷重を受ける試験片について有限変形理論に基づく有限要素法解析を行い、き裂先端近傍の応力場について詳細に調べ、混合モード荷重下での J 積分の適用限界について検討

* 昭和62年11月19日 第949回講演会において講演、原稿受付 昭和62年5月6日。

*¹ 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

*² 正員、東京工業大学大学院。

図1 有限要素分割図

した。

2. 解析方法

2.1 計算手法

本研究では、き裂先端の大きな変形挙動を解析するため、有限変形理論に基づく弾塑性有限要素法を用いた。構成式および有限要素法 (Updated Lagrangean Method) については前報⁽⁷⁾で詳述したので、ここでは説明を省略する。材料は Mises の降伏条件に従うものとし、等方硬化を仮定した。以下、この材料を Mises 材と称する。

Mises 材の応力-ひずみ関係には次式で表わされる N 乗硬化則を用い、 $N=0.1$ とし、平面ひずみ条件の下で解析を行った。

$$\frac{\bar{\sigma}_s}{\tau_0} = \begin{cases} \frac{r}{r_0} & \bar{\sigma}_m \leq \sigma_0 \\ \left[\frac{r}{r_0} \right]^N & \bar{\sigma}_m > \sigma_0 \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $\bar{\sigma}_s$ は相当せん断応力 ($=\bar{\sigma}_m/\sqrt{3}$)、 $\bar{\sigma}_m$ は相当引張応力、 τ_0 は降伏せん断応力 ($=\sigma_0/\sqrt{3}$)、 r_0 は降伏せん断ひずみ ($=\tau_0/G$)、 r は全相当 (弾性+塑性) せん断ひずみである。また、縦弾性係数 $E=300\sigma_0$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。

図1に計算に用いた有限要素分割図を示す。図1(a)は全体図である。X軸の負側にき裂を模擬したスリットが入っており、き裂長さと試験片幅の比は1:2とした。図1(b)はき裂先端近傍の詳細図であ

図2 境界条件

る。ここで $b_0/2$ は初期き裂先端の曲率半径である。

本研究においては荷重形式としてモード I 引張り荷重形式、モード II せん断変位荷重形式ならびにそれらを組み合わせた3種類の荷重形式を考慮した。

荷重・変形条件ならびに支持条件を図2(a),(b)に示す。モード I 成分の荷重はCG, FI 辺上に一様引張り分布荷重を作用させ、またモード II 成分の変形はCD, EF 辺をそれぞれ正のx方向および負のx方向に一様変位させることにより与えた。但し、純粋モード II のせん断変形の場合に対してはCD, EF 辺上の節点がx軸に平行に変位するように

図3 混合モード成分比, Ψ 図4 有限要素分割図
(混合モード比評価計算用)

図5 混合モード荷重と混合モード比の関係

ψ方向について支持拘束を与えた。モードI引張り荷重に対する本研究の解析モデルは中央き裂試験片と一致する。

2.2 混合モード荷重条件

作用荷重の混合モード成分比を表わす方法には種々の形式が考えられるが、本研究においては混合モード荷重を一軸引張り荷重が作用する斜めき裂問題に換算した場合の荷重作用方向と き裂面がなす角度、 Ψ (図3参照)を用いた。引張り荷重(モードI)では $\Psi = 90^\circ$ 、せん断荷重(モードII)では $\Psi = 0^\circ$ となり、これらの荷重の組み合わせにより、種々の混合モード成分比($\Psi = 90^\circ \sim 0^\circ$)が得られる。

引張り荷重とせん断変位が混合モード荷重を構成する割合と Ψ の関係を求めるため、微小変形理論に基づく8節点アイソ・パラメトリック要素による有

限要素法を用いて弾性解析を行った。図4はその際用いた有限要素分割図である。試験片幅、長さ およびき裂長さなどの寸法比は図1(a)と同一とした。また、材料定数、境界条件は2・1において説明したものと同一である。図5に得られた計算結果を示す。ここで、横軸は引張り荷重(等分布荷重、 P_t)とせん断変位(一様変位、 d_s)との比を降伏応力 σ_0 および初期切欠き幅 b_0 によって無次元化したものである。

本研究においてはモードI引張り荷重($\Psi = 90^\circ$)、モードIIせん断変位荷重($\Psi = 0^\circ$)ならびにそれらを組み合わせたモードI引張り荷重+モードIIせん断変位荷重($\Psi = 60^\circ, 30^\circ$)の混合モード条件を解析対象とした。

3. 解析結果

3.1 塑性域形状

図6(a)～(d)に種々の混合モード荷重条件下における塑性域の広がりを変形前の座標を用いて示している。モードIおよびモードIIの純粋モードではき裂面に対称に塑性域が発達している(図6(a)、(d))のに対して、混合モード荷重下では非対称に発達している(図6(b)、(c))ことがわかる。

3.2 応力分布

図7(a)～(d)に種々の混合モード荷重条件下で得られた $(\sigma_\theta)_{\max}$ 方向の半径線上の σ_θ 分布を示した。但し、横軸はき裂先端からの距離、 R_0 を遠

図6 各種の混合モード条件下における塑性域の広がり

(d) モード II ($\psi=0^\circ$)

図 6 (d) 各種の混合モード条件下における塑性域の拡がり

方の径路における J 積分, J_r により無次元化してあり, 図中の点線は前報⁽⁸⁾の結果をもとにして描いた小規模降伏の解である。

前報⁽⁸⁾の結果によれば 小規模降伏状態の混合モード条件下におけるき裂先端近傍の応力・ひずみ場はき裂先端から遠ざかるに従ってそれぞれ, (i) 微小空孔の影響を顕著に受ける A_B 領域 (ii) 鈍化き裂に特有な応力・ひずみ場が存在する A_B 領域 (iii) HRR の特異場が支配する A_H 領域 および (iv) 応力拡大係数によって支配される A_K 領域 の 4 領域に大別出来ることが明らかにされている。図 7 中にはこれらの領域を斜線で示した。但し, A_K 領域は横軸のスケールの都合により, 図示を省略した。 A_H 領域においては小規模降伏の解 (点線) は HRR 解^{(3), (4)} にほぼ等しい値をとる。降伏が大規模になるに従って, まず A_K 領域が消失し, 次に A_H , A_B 領域が順次消失する⁽¹⁰⁾。

図 7 において, 荷重が増加するに伴って 応力が小規模降伏の解 (点線) から次第に離れていくことがわかる。また, A_H 領域における応力の値が A_B 領域の応力よりも早い荷重レベルで小規模降伏の解 (点線) から離れることがわかる。モード I 成分が増加するに従って, 即ち ψ が大きくなるに従って, 早い荷重レベルで応力が小規模降伏の解 (点線) から離れることがわかる。

3.3 J 積分の適用限界

モード I 荷重に対して McMeeking & Parks は A_H 領域における応力の値が小規模降伏の解 (図 7 (a) の点線) から約 30% 離れると HRR 場が消失すると

図 7 各種の混合モード条件下における σ_θ 分布

判断している。この判断に従って McMeeking & Parks はモード I 引張り荷重を受ける試験片に HRR 場が存在するためのリガメント長さ, L として式 (2) を得ている⁽²⁾。

本研究においても まず、この判断基準に従って混合モード荷重下の HRR 場が存在するためのリガメント長さ, L を図 7 (a) ~ (d) より求め、得られた結果を図 8 に実線で示した。モード II 成分が増加するに従って、HRR 場が存在するために必要なリガメント長さは次第に短くなるのがわかる。モード II 荷重下において必要なリガメント長さ, L はモード I 引張り荷重の場合の約 60% となっている。

McMeeking & Parks は HRR 場の消失条件と J 積分の適用限界が一致するとして 式 (2) を J 積分の適用限界としている。しかし、著者らは McMeeking & Parks が提案した式 (2) を満足しない中央き裂試験片においても有効な J_{IC} が求められたとする実験結果⁽⁹⁾ に着目し、HRR 場が消失した後においても J 積分が適用出来る荷重範囲 (厳密には L , (J_r/σ_0) の範囲) が存在することを示した⁽¹⁰⁾。

即ち、き裂先端の応力・ひずみ場は先に述べた 4 領域に大別することができるが、実際の破壊は A_D 領域内で進行すると考えられる。いま、き裂先端からある距離だけ離れたき裂先端近傍の物質点に着目すると、その点における応力・ひずみ履歴は、荷重が増加するに従って J_r が增大するので、図 7 で示した応力分布図において $R_0/(J_r/\sigma_0)$ の大きい方から小さい方へと向かうようなものとなる。この履歴は、 A_H , A_B 領域が存在する場合には小規模降伏状態の場合と同一なものとなる。このような履歴を経た物質点の挙動は、 A_D 領域に入ってから小規模降伏状態の場合と同一なものとなるであろう。さらに、 R_D をき裂先端から A_D 領域の端までの長さとする、破壊開始時に $R = R_D$ の位置に存在する物質点の応力・ひず

図8 種々の混合モード条件と J 積分の有効範囲

図9 σ_θ の応力履歴

みが小規模降伏状態の場合と一致していれば、その物質点の応力・ひずみ履歴も小規模降伏状態の応力・ひずみ履歴と一致していると考えられる。従って、その外側における応力・ひずみが小規模降伏状態の場合と異なっても $R < R_D$ の物質点の履歴は小規模降伏状態の時と同じになると考えられるので J に支配される破壊が生じると考えることが出来る。したがって、 J が破壊力学パラメータとして有効であるためには $R = R_D$ の位置における応力・ひずみ場の値が小規模降伏状態の値に一致していれば良いことになる。

図 9 に $(\sigma_\theta)_{\max}$ 方向の半径線上の $R_0/b_0 = 30, 94, 215, 318$ における σ_θ の荷重による変化を $\psi = 30^\circ$ の混合モード条件の場合について示した。荷重が増加するに従って、き裂先端から遠い物質点から σ_θ は徐々に小規模降伏の解と離れていく様子がわかる。 $L/(J_r/\sigma_0) = 97$ の荷重レベル (●■▲◆印) では、 A_H 領域は既に消失しているが、 A_D 領域と A_B 領域の境界付近の物質点 ($R_0/b_0 = 30$) は小規模降伏と同じ履歴を経ていることがわかる。

以上の考え方に従って図 7 から J 積分の適用範囲を求めたところ、図 8 の破線が得られた。即ち、試験片のリガメント長さ, L は

$$\begin{aligned} L &\geq 80 \cdot J/\sigma_0 \quad (\text{モード I 引張り}) \\ L &\geq (80 \sim 50) \cdot J/\sigma_0 \quad (\text{モード I 引張り + モード II}) \\ L &\geq 50 \cdot J/\sigma_0 \quad (\text{モード II}) \end{aligned}$$

の条件を満たしていれば、 J 積分が適用できることがわかった。

J 積分の適用範囲は HRR 場が存在するために必要な条件を判断基準として求めた場合に比べて試験片のリガメント長さは半分程度となっている。また、モード II 試験片に必要とされるリガメント長さはモード I 引張り試験片のそれに比べて短い、HRR 場の

存在を基準として決めたりガメント長さの場合よりもその差は小さくなっていることがわかる。

4. 結 言

本研究では モード I (引張り荷重) と モード II (せん断変位) の組み合わせ混合モード荷重を受ける試験片について有限変形理論に基づく有限要素法解析を行い、平面ひずみ状態下のき裂先端近傍の応力場などについて詳細に調べ、混合モード荷重下での J 積分の適用限界について検討した。その結果、

$$\begin{aligned} L &\geq 80 \cdot J/\sigma_0 && (\text{モード I 引張り}) \\ L &\geq (80 \sim 50) \cdot J/\sigma_0 && (\text{モード I 引張り+モード II}) \\ L &\geq 50 \cdot J/\sigma_0 && (\text{モード II}) \end{aligned}$$

であれば、 J 積分が適用できることがわかった。

本研究には 昭和 61 年度文部省科学研究費の補助を得た。ここに記して謝意を表する。また、本研究における有限要素解析には東京大学の HITAC-S810 を使用した。

文 献

- (1) Rice, J.R., *Trans. ASME. Ser. E.*, **90**(1968), 379.
- (2) McMeeking, R.M. and Parks, D.M., *ASTM Spec. Tech. Publ.* **668**(1979), 175.
- (3) Hutchinson, J.W., *J. Mech. Phys. Solids*, **16-1** (1968), 13.
- (4) Rice, J.R. and Rosengren, G.F., *J. Mech. Phys. Solids*, **16-1** (1968), 1.
- (5) Shih, C.F., *Int. J. Fract.*, **29**(1985), 73.
- (6) Bradford, R., *Int. J. Fract.*, **29**(1985), 113.
- (7) 青木・ほか3名, 機論, 50-454, A (昭 59), 1201.
- (8) 青木・ほか3名, 機論, 52-481, A (昭 61), 2249.
- (9) 中村・ほか3名, 材料, 32-363(1983), 1315.
- (10) 岸本・ほか3名, 機論, No. 860-3

討 論

〔質問〕 東 郷 敬 一 郎 [名古屋大学工学部]

J 積分の適用限界を混合モードき裂に対して示されたことに敬意を表す。以下の点についてご教示願いたい。

(1) 図 5 の混合モード荷重と混合モード比の関係は、具体的にはどのようにして求めたのか。混合モード比評価計算における境界条件と Ψ の求め方についてお教え願いたい。

(2) 貴論文におけるモード II せん断成分の与え方 (図 2 (b) の CD, EF で x 方向変位一定) はある意味で特殊な負荷条件であると考え。貴論文で得られたモード I 負荷に対する J 積分の適用範囲は、中央き裂試験片に対するものと考えるが、混合モード負荷、モード II 負荷に対する結果は、実際には、どのような試験片を想定しているのか。

〔回答〕 (1) 微小変形理論に基づく有限要素法を用いて、図 2 および図 4 に示した境界条件および有限要素メッシュに対して弾性解析を行い、各モードに対応する応力拡大係数、 K_I および K_{II} を計算した。無限板中に存在するき裂に対して、き裂面と角度 Ψ をなす方向に一軸引張荷重が作用する時、応力拡大係数と Ψ との間には $\Psi = \tan^{-1}(K_I/K_{II})$ の関係がある。先に求めた K_I および K_{II} をこの式に代入し、 Ψ を評価した。

(2) 本研究で用いた混合モード試験片モデルは図 2 (a) のように CG, FI 辺上に一様な引張荷重を作用させつつ、図 2 (b) のように剛な部材にて CD, EF 辺

に一様な変位を与える (ただし、その剛な部材と CO, EF 辺との間には摩擦はない) 方式の試験片モデルとなっている。

実際にこのような試験片モデルで実験を行うのは困難と思われるが、純粋なモード II 変形を実現させるためにこのモデルを想定した。

モード I 変形については引張りと曲げとで J 積分の適用範囲が大きく異なるが、モード II 変形については負荷 (せん断変位) 形式による影響は小さいと考えられるので、本研究結果は通常の実用的な混合モード試験片 (ただし、モード I は引張荷重) にも適用できると考えられる。

〔質問〕 市 川 昌 弘・高 松 徹
[電気通信大学]

下記につきご教示願いたい。

(1) 混合モード ($\Psi = 30^\circ, 60^\circ$) の場合の J 値の経路独立性は、貴解析結果ではどのようなになっているのか。

(2) き裂の曲率半径を考えることの意味はなにか。

(3) 純モード I と純モード II を比べると、小規模降伏で K が有効であるためには後者のほうが大きなりガメント長さが必要となるように思われるが、貴解析によれば降伏規模が大きくなり J の有効性になると前者のほうが大きなりガメント長さが必要になる。このように K と J で逆転するように思われるが、これはどのように考えればよいのか。

付図1 J 積分の径路独立性

(4) $\sigma_{\theta\max}$ の方向に着目する意味を教えてください。

〔回答〕 (1) 付図1に $\Psi=0^\circ$ のモードII荷重条件下における種々の径路での J 積分値を示した。モードIIに対する本文の適用条件を満足する範囲では A_B 領域まで径路独立となっている。モードIについても同様な結果が得られている⁽¹⁰⁾ので、 $\Psi=30^\circ, 60^\circ$ においても A_B 領域までは径路独立となっていると思われる。

(2) 本研究では有限な曲率半径をもつき裂モデルを用いたが、き裂先端の変形量が初期き裂開口量の数倍程度以上に変形するまで荷重を増加させると、き裂先端近傍の応力・ひずみ場は自己相似、すなわち、き裂先端の変形量 d (ここで、 d は初期き裂の直線部分と円弧部が交わる図1(b)中のA, B点を結んだ変形

後の直線距離)で距離を無次元化すると同じ分布(定常解)が得られるようになる。このような定常解に至った後の応力・ひずみ場は初期き裂形状の影響を受けなくなる(付1)ので、本研究においては鈍化挙動の容易にシュミレーションできるように初期き裂形状として有限な曲率半径を有するき裂先端開口モデルを用いた解析を行っている。

(3) 同じ J 積分の値に対してモードIIの場合のほうがモードIの場合に比べて塑性域が大きいので応力拡大係数が有効であるためには大きなリガメント長さを必要とすると考えられる。

一方、 J 積分の適用限界は本文で述べたように、 A_0 領域の縁における応力によって定まる。この応力は塑性域がリガメントを貫通する程大きくなってもモードIIの場合には(モードIに比べて)大きな変化を受けない。これは、モードIIの静水圧応力成分が元来モードIに比べて小さいので塑性域の貫通によってもあまり変化しないためと考えられる。したがって、 J 積分が有効であるためにはモードIの場合のほうが大きなリガメント長さを必要とすると考えられる。

(4) 混合モード負荷を受ける延性材料の破壊においても、 σ_θ の最大値、 $(\sigma_\theta)_{\max}$ の方向は応力・ひずみが高く、破壊の開始に重要な役割をはたしていると考えられる。このため、 $(\sigma_\theta)_{\max}$ 方向の応力変化について調べている。

(付1) McMeeKing, R. M, *J. Mech. Phys. Solids*, 25 (1977), 357.