薄板のスティフナ形態の最大剛性設計法*

(第1報, 連続構造モデルによる取り扱い)

山崎 光悦^{*1}, 小林 篤司^{*2}

Optimum Compliance Design of Stiffner Layout of Thin Plate
(1st Report, A Treatment as Pseudo-continuous Structure)

Kouetsu YAMAZAKI and Atsushi KOBAYASHI

An optimum design technique of the stiffner layout which gives minimum compliance is developed. A thin plate with stiffners is treated as an anisotropic plate of pseudo-continuous structure, and is discretized into the finite elements. The minimum compliance design subjected to the constant volume, in which the distributions of angles of the stiffner arrangement and the stiffner densities are varied, is determined by the recursive quadratic programming technique.

By applying this design technique, the optimum layouts of the stiffner of the rectangular plate under some typical loading and supporting conditions are obtained.

Key Words : Design Engineering, Minimum Compliance Design, Optimum Layout of Stiffner, Pseudo-continuous Structure, Recursive Quadratic Programming, Finite Element Method.

1. はじめに

平板や殻構造物にスティフナ(補強リブとも呼ぶ)を付けた構造形態が補強あるいは軽量化の観点から実際の設計に採用されることが多い。したがって、そのようなスティフナ構造物の強度的最適設計法に関する研究も実用上重要な課題であるが、従来の研究の大半はあらかじめ規定したスティフナ配置形態の下での各スティフナの寸法や配置間隔の最適化を目的としたものが多い^{(1), (2)}。一方、スティフナの配置形態そのものを論じた研究としては、無限小板厚のスティフナを1方向に無数に配置した疑似連続体構造(Integral stiffner)の概念によって円板の円周方向配置スティフナの理論的極限を取り扱ったChengとOlhoffの一連の研究^{(3), (4)}が見られるのみで、一般的なスティフナ形態について論じられたことはない。

そこで本研究では、任意の負荷条件、支持条件のもとでの理論的極限構造としてのスティフナ最適形態を

論ずることを目的として、ChengとOlhoffのスティフナ疑似連続体の概念を二方向スティフナ・モデルに拡張し、有限要素法と数値計画法を用いた最大剛性設計手法を提案する。さらに本手法を基本的な負荷・支持条件下の正方形板等に適用し、その最適スティフナ形態について論ずる。

2. 連続構造モデルとその最大剛性設計問題

2・1 スティフナ構造の連続体モデル 本研究では、まずスティフナの最適配置形態が究極的には直交線網で与えられると仮定し、直交線に沿ってスティフナが連続的に分布する極限構造を対象とする。このとき、このスティフナが連続的に分布するモデルは一種の直交異方性板と見なすことができる。

図1に示すように板の中央面内に (x, y) 、たわみ方向に z 軸をとり、スティフナに沿った直交線網の接線方向を (α, β) として、 α 方向と x 軸との成す角を ϕ とする。たわみを w として、板の部分での応力 $(\sigma_{\alpha\alpha}^p, \sigma_{\beta\beta}^p, \sigma_{\alpha\beta}^p)$ とたわみの関係は薄板の曲げ理論より次式で与えられる。

$$\sigma_{\alpha\alpha}^p = -\frac{Ez}{1-\nu^2} (w_{,\alpha\alpha} + \nu w_{,\beta\beta}),$$

* 昭和62年11月21日 第949回講演会において講演, 原稿受付 昭和62年4月27日。

^{*1} 正員, 金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野2-40-20)。

^{*2} 准員, 鈴木自動車工業(株) (〒432-91 静岡県浜名郡可美村高塚300)。

$$\sigma_{\beta\beta}^p = -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\nu w_{,\alpha\alpha} + w_{,\beta\beta}),$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^p = -\frac{Ez}{1-\nu^2} w_{,\alpha\beta} \dots \dots \dots (1)$$

ここに E, ν は板材のヤング率, ポアソン比を表し, また

$$w_{,\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad w_{,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad w_{,\beta\beta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \dots \dots (2)$$

とする. 一方, スティフナ部での応力 ($\sigma_{\alpha\alpha}^s, \sigma_{\beta\beta}^s, \sigma_{\alpha\beta}^s$) とたわみの関係は, スティフナが交差することによって発生するせん断変形抵抗を無視して,

$$\sigma_{\alpha\alpha}^s = -Ez w_{,\alpha\alpha}, \quad \sigma_{\beta\beta}^s = -Ez w_{,\beta\beta}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^s = 0 \dots (3)$$

そこで, 図2のようにスティフナ部の詳細をモデル化する. ΔC_α を $\Delta\beta$ 間の α 方向スティフナの幅の合計, h_α, h_β をそれぞれ α, β 方向のスティフナ高さ, h_0 を平板の板厚とするとモーメントの釣合い式より

$$\Delta\beta M_{\alpha\alpha} = -2\Delta\beta \int_0^{\frac{h_0}{2}} \sigma_{\alpha\alpha}^p z dz - 2\Delta C_\alpha \int_0^{\frac{h_\alpha}{2}} \sigma_{\alpha\alpha}^s z dz \dots (4)$$

上式に式(1), (3)を代入するとモーメント $M_{\alpha\alpha}$ とたわみの関係式が次式で与えられる.

$$M_{\alpha\alpha} = -D_0 \{1 + (1-\nu^2) \{(\frac{h_\alpha}{h_0})^3 - 1\} b_\alpha\} w_{,\alpha\alpha}$$

$$- D_0 \nu w_{,\beta\beta} \dots \dots \dots (5)$$

ただし, $D_0 = Eh_0^3/12(1-\nu^2)$ とする. また $M_{\beta\beta}, M_{\alpha\beta}$ も同様に次式で定義される.

$$M_{\beta\beta} = -D_0 \nu w_{,\alpha\alpha} - D_0 \{1 + (1-\nu^2) \{(\frac{h_\beta}{h_0})^3 - 1\} b_\beta\} w_{,\beta\beta} \dots \dots \dots (6)$$

$$M_{\alpha\beta} = -D_0 (1-\nu) w_{,\alpha\beta} \dots \dots \dots (7)$$

図1 連続スティフナ構造モデル

図2 連続スティフナ構造詳細

ただし, b_α, b_β は幅方向密度と呼び, 次式で定義する.

$$b_\alpha = \Delta C_\alpha / \Delta\beta, \quad b_\beta = \Delta C_\beta / \Delta\alpha \dots \dots \dots (8)$$

式(5), (6), (7)より連続スティフナモデルは, 次のような応力-ひずみ関係を持つ板厚 h_0 の一種の直交異方性板として取り扱うことができる.

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E \{1 + (1-\nu^2) \rho_\alpha\}}{1-\nu^2} \epsilon_{\alpha\alpha} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \epsilon_{\beta\beta},$$

$$\sigma_{\beta\beta} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \epsilon_{\alpha\alpha} + \frac{E \{1 + (1-\nu^2) \rho_\beta\}}{1-\nu^2} \epsilon_{\beta\beta},$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{\alpha\beta} \dots \dots \dots (9)$$

ただし, ρ_α, ρ_β は, 次のような一種のスティフナ密度を表す.

$$\rho_\alpha = \{(\frac{h_\alpha}{h_0})^3 - 1\} b_\alpha, \quad \rho_\beta = \{(\frac{h_\beta}{h_0})^3 - 1\} b_\beta \dots (10)$$

2・2 最大剛性設計問題 前節で定めたスティフナ・モデルのスティフナ密度 ρ_α, ρ_β とスティフナ配向角 φ (α 軸と x 軸のなす角) を設計変数にとり, 目的関数 f として次式で示す外力仕事を選ぶ.

$$f(\varphi, \rho_\alpha, \rho_\beta) = \frac{1}{2} \iint_\Omega p w dx dy - \min \dots \dots \dots (11)$$

$$\rho_\alpha, \rho_\beta \geq 0.$$

ただし, p は分布荷重, 積分は解析対象領域 Ω に関する領域積分とする. 式(11)はひずみエネルギーを最小にすることと等価であり, 領域 Ω 全域の平均的な剛性を最大にすることを意味する. なお, たわみ w は次式的全ポテンシャル・エネルギーを停留する解でなければならない.

$$\pi = \frac{D_0}{2} \iint_\Omega \{ \{1 + (1-\nu^2) \rho_\alpha\} w_{,\alpha\alpha}^2 + 2\nu w_{,\alpha\alpha} w_{,\beta\beta}$$

$$+ \{1 + (1-\nu^2) \rho_\beta\} w_{,\beta\beta}^2 + 2(1-\nu) w_{,\alpha\beta}^2 \} dx dy$$

$$- \iint_\Omega p w dx dy \dots \dots \dots (12)$$

一方, 制約条件として配置するスティフナの全体積一定の条件を課する. すなわち,

$$g = \iint_\Omega \{ h_0 + (h_\alpha - h_0) b_\alpha + (h_\beta - h_0) b_\beta$$

$$- \{ \min(h_\alpha, h_\beta) - h_0 \} b_\alpha b_\beta \} d\alpha d\beta - V_0 \leq 0 \dots (13)$$

ここに, V_0 は, あらかじめ規定するモデル全体の体積とする.

3. 有限要素モデルとその最適化

3.1 有限要素への離散化 直交曲線網に沿ってスティフナが配向されたモデルを8節点二次のアイソパラメトリック要素を用いて離散化する^{(5), (6)}. 要素内の任意の点のスティフナの配向角 φ およびス

ティフナ密度 ρ_α, ρ_β を4隅節点の値 $\varphi_i, \rho_{\alpha i}, \rho_{\beta i}$ と一次の内挿関数 R_i ($i=1, 2, 3, 4$) を用いて次のように表す.

$$\varphi = \sum_i R_i \varphi_i, \rho_\alpha = \sum_i R_i \rho_{\alpha i}, \rho_\beta = \sum_i R_i \rho_{\beta i} \dots (14)$$

ただし, 板中央面内にとった要素正規座標を (ξ, η) , 4隅点の座標を (ξ_i, η_i) として,

$$R_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \dots (15)$$

一方, 節点変位ベクトルを $\{\delta\}^T = (w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})$ (θ_{xi}, θ_{yi} は x, y 軸まわりの回転角) とすると, 二次の内挿関数 N_i を用いて要素内の変位 u, v, w を次式で表す.

$$u = -\sum_i N_i \zeta \frac{h_0}{2} \theta_{yi}, v = \sum_i N_i \zeta \frac{h_0}{2} \theta_{xi}, w = \sum_i N_i w_i \dots (16)$$

ただし ζ は板の上下面で ± 1 となる正規座標とする. このとき要素内のひずみ $\{\epsilon\}^T = (\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$ は通常の設定により, ひずみ-変位マトリックス $[B]$ を用いて次のように表せる.

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}; \{\delta\}^T = (\delta_1, \dots, \delta_8) \dots (17)$$

ひずみの座標変換によりスティフナ配置方向のひずみ $\{\hat{\epsilon}\}^T = (\epsilon_{\alpha\alpha}, \epsilon_{\beta\beta}, \epsilon_{\alpha\beta})$ は

$$\{\hat{\epsilon}\} = [T] [B] \{\delta\} \dots (18)$$

ここに $[T]$ はひずみの座標変換マトリックスとする.

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} c = \cos \varphi, \\ s = \sin \varphi. \end{matrix} \dots (19)$$

また式(9)より, 応力-ひずみマトリックスを $[D]$ とすると, スティフナ配置方向の応力 $\{\hat{\sigma}\}^T = (\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\alpha\beta})$ は,

$$\{\hat{\sigma}\} = [D] [T] [B] \{\delta\} \dots (20)$$

したがって本研究で取り扱う擬似連続体の要素剛性マトリックス $[K]^e$ は次式で評価すればよいことになる.

$$[K]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [T]^T [D] [T] [B] \times |J| d\xi d\eta d\zeta \dots (21)$$

3・2 最適化と感度解析 具体的な設計変数として, 隅節点 i での配向角 φ_i , スティフナ密度 $\rho_{\alpha i}, \rho_{\beta i}$ をとる. また最適化の手法として Pshenichny の線形化法 (PLM法)⁽⁷⁾ を用いる. この手法は逐次二次計画法の一種で, 設計点近傍で目的関数を二次近似, 制約条件を一次近似し, その停留条件より設計変数の修

正ベクトルを求める逐次解法である. またこの手法の特徴は, 目的関数および制約条件の一階微係数 (設計感度) のみを用いて二次の収束性が保証される点にある. 以下ではそれらの設計感度解析法について示す.

3. 2. 1 目的関数の設計感度 式(12)の全ポテンシャル・エネルギー π を停留させるたわみ w がなす外力仕事は弾性ひずみエネルギーに等しく, したがって式(11)の目的関数 f の設計感度は解析領域 Ω の形状が変化しない場合, Dens と Mrösz によれば π の第1変分と等価である. すなわち, 設計変数を一般的に $x(\varphi_i, \rho_{\alpha i}, \rho_{\beta i})$, 応力-ひずみ関係を $\sigma = D\epsilon$ で表すと,

$$\delta f = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T \frac{\partial D}{\partial x} \epsilon \delta x d\Omega \dots (22)$$

具体的な設計変数を用いると応力-ひずみマトリックスは $D(\varphi, \rho_\alpha, \rho_\beta)$ と考えることができ, したがって式(22)より隅節点 i での設計変数を $\varphi_i, \rho_{\alpha i}, \rho_{\beta i}$ とすれば,

$$\begin{aligned} \delta f = & -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{ \hat{\epsilon} \}^T \left(\frac{\partial [T]}{\partial \varphi_i} [D] [T] \right. \\ & + [T]^T [D] \frac{\partial [T]}{\partial \varphi_i} \} \{ \hat{\epsilon} \} \delta \varphi_i \\ & - \{ \hat{\epsilon} \}^T [T]^T \frac{\partial [D]}{\partial \rho_{\alpha i}} [T] \{ \hat{\epsilon} \} \delta \rho_{\alpha i} \\ & \left. - \{ \hat{\epsilon} \}^T [T]^T \frac{\partial [D]}{\partial \rho_{\beta i}} [T] \{ \hat{\epsilon} \} \delta \rho_{\beta i} \right] dx dy \dots (23) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \frac{\partial [D]}{\partial \rho_{\alpha i}} &= ER_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial [D]}{\partial \rho_{\beta i}} = ER_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial [T]}{\partial \varphi_i} &= \frac{\partial [T]}{\partial \varphi} R_i \dots (24) \end{aligned}$$

3. 2. 2 制約条件の設計感度 次に制約条件の設計感度を求める. 設計変数 $\rho_{\alpha i}, \rho_{\beta i}$ の具体的な変数としてリブ丈 h_α, h_β あるいは幅密度 b_α, b_β のいずれかをとりものとする. まず $h_\alpha = h_\beta = h$ (一定) とした場合, 体積一定の制約条件式(13)は正規座標に変換した次式で評価できる.

$$\begin{aligned} g = & h_0 \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ 1 + \frac{h_0^2}{h^2 + h h_0 + h_0^2} (\rho_\alpha + \rho_\beta - \frac{h_0^3}{h^3 - h_0^3} \rho_\alpha \rho_\beta) \right\} \\ & \times |J| d\xi d\eta - V_0 \leq 0 \dots (25) \end{aligned}$$

総和は全要素に関する和を意味する. したがって式(14)を用いて上式より制約条件の設計感度は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \rho_{\alpha i}} = & \frac{h_0^3}{h^2 + h h_0 + h_0^2} \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R_i \left(1 - \frac{h_0^3}{h^3 - h_0^3} \sum_j R_j \rho_{\beta j} \right) \\ & \times |J| d\xi d\eta, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_{\beta i}} = \frac{h_0^3}{h^2 + h h_0 + h_0^2} \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R_i \left(1 - \frac{h_0^3}{h^3 - h_0^3} \sum_j R_j \rho_{\alpha j} \right) \times |J| d\xi d\eta. \quad (26)$$

なお $\partial g / \partial \varphi_i = 0$.

一方, $b_\alpha = b_\beta = b$ (一定) としたときの体積制約条件は式 (13) を正規座標に変換して次式で評価できる.

$$g = h_0 \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ (1-b)^2 + \left(3\sqrt{\frac{\rho_\alpha}{b} + 1} + 3\sqrt{\frac{\rho_\beta}{b} + 1} \right) b - 3\sqrt{\frac{\min(\rho_\alpha, \rho_\beta)}{b} + 1} b^2 \right\} |J| d\xi d\eta. \quad (27)$$

したがって, このときの設計感度は $\rho_\alpha \geq \rho_\beta$ の領域では,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \rho_{\alpha i}} &= \frac{h_0}{3} \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R_i \left(\frac{1}{b} \sum_j R_j \rho_{\alpha j} + 1 \right)^{-\frac{2}{3}} |J| d\xi d\eta, \\ \frac{\partial g}{\partial \rho_{\beta i}} &= \frac{h_0 (1-b)}{3} \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R_i \left(\frac{1}{b} \sum_j R_j \rho_{\beta j} + 1 \right)^{-\frac{2}{3}} \times |J| d\xi d\eta. \quad (28) \end{aligned}$$

また $\rho_\alpha < \rho_\beta$ の領域では次式で評価できる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \rho_{\alpha i}} &= \frac{h_0 (1-b)}{3} \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R_i \left(\frac{1}{b} \sum_j R_j \rho_{\alpha j} + 1 \right)^{-\frac{2}{3}} \times |J| d\xi d\eta, \\ \frac{\partial g}{\partial \rho_{\beta i}} &= \frac{h_0}{3} \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R_i \left(\frac{1}{b} \sum_j R_j \rho_{\beta j} + 1 \right)^{-\frac{2}{3}} \times |J| d\xi d\eta. \quad (29) \end{aligned}$$

4. 設計例

4・1 対辺単純支持平板 図3に示すような両端を単純支持した $a=2b$, $h_0/a=1/32$ の長方形板に等分布

図3 対辺単純支持平板解析モデル

図4 スティフナの最適形状

荷重 p が作用するモデルを考える. このモデルはスティフナを x 軸に平行に一方向だけ配置すれば十分だと考えられ, したがって $\varphi=0$ として ρ_α だけを設計変数に選んだ. さらに簡単化のため, $b_\alpha=1/2$, $b_\beta=0$ に固定し, 体積を $V=1.5ab h_0$ に規定した. つまり式 (10) の ρ_α, ρ_β は次式となる.

$$\rho_\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{h_\alpha}{h_0} \right)^3 - 1 \right\}, \quad \rho_\beta = 0. \quad (30)$$

これより, この問題はスティフナ高さを変化させる設計問題となる. 高さ h_α の初期値としてスティフナ部分も等価体積の板と考えたときの最大剛性設計の解を用いた.

図4にスティフナの最適形状を, 全体を一つの板と考えたときの板理論による変厚板の最適形状と比較して示す. また表1は最適形状での目的関数を比較して示したものである. ここで f_0 とは等体積の一樣板厚モデル (等価板厚モデル) $h_{eq}=1.5h_0$ の外力仕事であり, スティフナ高さが板厚と等しい h_α 一定モデル, モデル全体を一つの変厚板と見なした板理論および本手法による最適モデルのそれぞれの値を f_0 との比で示してある. 同表から明らかなように本手法による最適モデルは等価板厚モデルに比べて80.0%, 変厚板モデルに比べて15.8%剛性が向上していることが了解される.

4・2 全周単純支持平板 全周が単純支持された板厚 h_0 , 一辺 $2a$ ($h_0/a=0.01$) の正方形板に等分布荷重 p が作用するモデルを考える. モデルの対称性が

表1 目的関数値の比較

Model	Objective f/f_0 function
Plate with constant height stiffner	0.8542
Variable thickness plate	0.6436
Plate with variable height stiffner	0.5556

図5 全周単純支持平板解析モデル

ら図5に示すように1/4領域を要素分割し、各隅節点の $\varphi_i, \rho_{\alpha i}, \rho_{\beta i}$ を設計変数にとり最適化を行った。本例題では、 $h_\alpha = h_\beta = 2h_0, V_0 = 1.19a^2 h_0$ と規定し、初期値として全隅節点で $\varphi_i = 0, \rho_{\alpha i} = \rho_{\beta i} = 0.7$ を与えた。

113回の繰返しの後、 $f/f_0 = 1.27 \rightarrow 0.811$ まで減少し、初期設計と比べて56.7%剛性が向上した。表2は最適解における設計変数の値を、また図6はスティフナの最適配置形態を示している。同図(a)は設計変数 φ_i の値を用い、 $dy/dx = \tan \varphi$ より得られる次式の常微分方程式をハミング法で解き描いたものである。

$$\frac{d\xi}{d\eta} = - \frac{\sum_i \frac{\partial R_i}{\partial \xi} (y_i - x_i \tan \varphi)}{\sum_i \frac{\partial R_i}{\partial \eta} (y_i - x_i \tan \varphi)} \dots \dots \dots (31)$$

つまりスティフナの最適形態は板中心から放射状に伸びるスティフナとこれと直交する円周方向スティフナ

表2 最適解における設計変数値

Nodal No.	$2\varphi_i/\pi$	$\rho_{\alpha i}$	$\rho_{\beta i}$
1	0.506	1.299	1.578
3	0.212	1.969	1.126
5	0.106	0.000	0.000
9	0.789	0.000	1.371
11	0.528	0.000	2.890
13	0.592	0.000	1.277
17	0.897	0.000	0.279
19	0.440	0.000	1.656
21	0.491	0.879	1.662

図8 4隅支持平板解析モデル

表3 最適解への収束過程

Iteration No.	Objective f/f_0 function	Volume V/V_0
0	0.6628	1.0000
100	0.6624	0.9997
200	0.5917	0.9998
270	0.5696	0.9995
275	0.5670	1.0000

で構成されている。図6(b)は同図(a)を元に対称性を考慮し、最終形態の予測を模式的に示したものである。一方、設計変数 ρ_α, ρ_β のスティフナ密度分布を図7に示す。同図より ρ_α は中心部と4隅部で密度分布が高く、密度 ρ_β は1/4領域の中央部が高い分布を示している。

4・3 4隅点支持平板 支持条件、負荷条件の異なる例題として図8に示すように4隅を点支持した一辺 $2a$ の正方形板の中心に集中荷重 P が作用するモデルを考える。板厚 $h_0/a = 0.018$ とし、 $V_0 = 3.72a^2 h_0$ 、スティフナ密度 $b_\alpha = b_\beta = 0.0412$ と規定した。初期値は全隅節点で $h_\alpha = h_\beta = 4h_0$ と仮定した。

表3に最適解への収束過程を示す。繰返しを275回行い、 $f/f_0 = 0.663 \rightarrow 0.567$ まで減少した。このモデルでは初期設計の段階で既に等価板厚モデルの約1.5倍の剛性を持つが、これはスティフナ高さを板厚の3

(a) 解析結果 (b) 模式図

図9 最適スティフナ形態

倍に設定したため、これよりスティフナ高さの方が密度 b_a, b_β よりも剛性の向上に対する寄与が大きいことがわかる。また最適解での剛性は等価板厚モデルに比べて76.4%向上した。スティフナの最適形態を前例と同様にして描いたものを図9(a)に示す。同図より最適形態は x, y 軸および隅節点を結んだ対角線をそれぞれ漸近線とする直交双曲線網と類似の分布を示している。図9(b)はこれを模式的に示したものである。さらに図10はスティフナ高さの分布を示したもので、 h_a は1/4領域の中央部が低く、 h_β は h_a の低い所を補うように分布している。

5. 結 言

本研究ではスティフナで補強された薄板構造を、直交曲線網に沿ってスティフナが連続的に分布する理想的な極限構造モデルと見なして、応力ひずみ関係などの定式化、有限要素への離散化を行い、さらに体積制約下の最大剛性設計問題への定式化を行った。最適化のための数値計画法としてPLM法を用い、2, 3の例題によりその有効性を確認すると共に、各支持条件・負荷条件に対応した特徴あるスティフナ配置形態を得た。

最後に本研究は文部省科学研究費補助金(奨励研究A)によるものであることを付記する。

(a) h_a 分布 (b) h_β 分布

図10 スティフナ高さ分布

文 献

- (1) Patnaik, S.N. and Sankaran, G.V., Int. J. Num. Methods Engng., 10-2(1976), 283.
- (2) Richards, D.M., Int. J. Solids & Struct., 12-11(1976), 791.
- (3) Cheng, K.T., Int. J. Solids & Struct., 17-8(1981), 795.
- (4) Cheng, K.T. and Olhoff, N., Int. J. Solids & Struct., 18-2(1982), 153.
- (5) Zienkiewicz, O.C., ほか2名, Int. J. Num. Methods Engng., 3(1971), 275.
- (6) Zienkiewicz, O.C. and Bruce, M.I., Int. J. Num. Methods Engng., 2(1970), 419.
- (7) Choi, K.K., ほか3名, Trans. ASME, 105-1(1983), 91.
- (8) Dens, K. and Mróz, Z., Int. J. Solids & Struct., 19-8(1983), 679.

討 論

〔質問〕 多田 幸生〔神戸大学工学部〕

(1) 式(22)において, π の第1変分を求めるとき, 設計変数の影響として, 応力-ひずみマトリックスの変分のみを考えているようであるが, 設計変数の変化による応力, あるいはひずみの陰な変化の項, すなわち, $\partial \epsilon / \partial x$ は考えなくてよいのか。

(2) 例題の結果(図6および図9)は非常に興味深いが, これらの最適スティフナ形態の違いを, 力学的にはどのように解釈すればよいのか。

〔回答〕 (1) 式(22)は式(11)より得られる目的関数 f の第1変分

$$\delta f = \frac{1}{2} \int_{\Omega} p \delta w d\Omega$$

に対して設計変数が応力-ひずみマトリックスのみに関与するとして, 応力変分 $\delta \sigma$ にひずみ変分 $\delta \epsilon$ と応力-ひずみマトリックス変分 $\delta D (\delta \sigma = D \delta \epsilon + \delta D \epsilon)$ を考慮し, 仮想仕事の原理などを用いて導出されたもので厳密な表現である。詳細は文献(8)を参照されたい。

(2) 一様分布負荷, 周辺単純支持の場合には図6のように平板中心から放射状にのびるスティフナおよび同心円状スティフナで構成されている。一方, 中央集中負荷, 4隅点支持の場合には図9のように支持点に集中する双曲線状のスティフナ形態となっており, これらの相違は負荷条件および支持条件の違いによって生じているものと解釈できる。