繊維複合材料積層板のポアソン比の特異な挙動について*

三 木 光 範^{*1}, 室 津 義 定^{*1}The Peculiar Behavior of the Poisson's Ratio
of Laminated Fibrous Composites

Mitsunori MIKI and Yoshisada MUROTSU

The effective Poisson's ratio of laminated fibrous composites shows a peculiar behavior as it becomes larger than unity or less than zero. This behavior can be utilized in the design of composite structures with special functions. The lamination theory, non-linear programming technique and a heuristic approach are used to find the lay-ups of the laminates with the maximum, zero and the minimum values of Poisson's ratio of general symmetric laminates. It is found that balanced angle-ply symmetric laminates yield the maximum value and unbalanced bi-directional symmetric laminates yield the minimum value. Experimental results shows a good agreement with the analytical results.

Key Words: Poisson's Ratio, Composite Materials, Material Design, Coupled Deformation, Negative Poisson's Ratio

1. 緒 言

繊維強化複合材料積層板では、強化繊維の種類や配向角を変えることにより、種々の材料特性をもつ材料を創成することが可能である。著者はこうした複合材料の特徴を活かすべく、材料設計の最適化について研究を行ってきた。これまでは、面内剛性⁽¹⁾、曲げ剛性⁽²⁾、そして座屈⁽³⁾などに対して最適な積層構成の決定を行ってきたが、本報ではポアソン比についての特異な挙動を明らかにし、そのテーラリングについて考察する。

繊維複合材料積層板の見掛けのポアソン比（以後単にポアソン比と呼ぶ）が零、負または 1 以上になることは従来から知られていた⁽⁴⁾が、そうした現象を詳しく解析した研究は少なく、平板の厚み方向に関する負のポアソン比についての報告⁽⁵⁾があるだけである。慣用材料のポアソン比は常に正で、しかも 0.3 付近の値をもつ。これに対し、繊維複合材料ではポアソン比が 1 をこえることや零になること、あるいは負になることもある。こうした特異な現象を利用すれば、慣用材

料では決して実現できない新しい機能を材料自身に付与することが可能となる。

例えば、ポアソン比が負になると図 1 のように、しまりばめになっているはめ合いをもつ部品に圧縮荷重をかけて幅の減少を生じさせることによって容易に押し込み、引き抜こうとすると幅の増大を生じて引き抜けないような部品をつくることができる。Tsai はこうした材料を One way material と呼んだ。このほか、材料のポアソン比が零または負になると従来考えられなかったような応用が可能になるものと思われる。本報では、こうした観点から、繊維複合材料積層板の平面応力状態での面内方向のポアソン比について詳細に検討し、その値域、積層構成、変形状態などについて明らかにする。また、従来得られていなかった負のポアソン比についての実験データも得たので報告する。

図 1 入りやすく、抜け難いワンウェイ材料

* 昭和 62 年 11 月 20 日 第 949 回講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 5 月 22 日。

^{*1} 正員、大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町 4-804)。

表 1 解析および実験に用いた材料の材料定数

Designation	V_f	E_x	E_y	E_s	ν_x	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
CFRP(T300/5208)	0.70	181	10.3	7.17	0.28	76.37	85.73	19.71	22.61	26.88
CFRP(P-305)	0.56	106	7.83	3.92	0.32	45.49	49.31	11.71	14.23	15.63

Unit: E and U in GPa. Note: T300/5208 is used for analysis, P-305 is used for experiments.

2. 解 析

2.1 解析の対象とした複合材料 1方向ラミナを N 層対称積層した薄い平板を考える。非対称積層板では引張りりと曲げのカップリングのためポアソン比が定義できない。

図2は座標系を示したもので、1-2系は平板の基準軸、 x - y 系は各プライでの繊維軸系座標である。 x 軸が繊維方向を表し、 θ は繊維配向角である。

ここでは平面応力状態における面内のポアソン比を考えるため積層順序を考慮する必要はなく、各プライ群の繊維配向角と、そのプライ群の全体に対する体積比率（プライ比）のみが積層構成を表す因子となる。

2.2 積層理論とポアソン比 図2の座標系と上に述べた条件のもとで、ポアソン比 ν_{21} は1-軸方向の単軸負荷条件のもとでの1-軸方向のひずみ ε_1 と2-軸方向のひずみ ε_2 との比で定義される。

$$\nu_{21} = -\varepsilon_2/\varepsilon_1 (\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_6 = 0) \quad (1)$$

ここで添字6は1, 2-軸に関するせん断を表す。

ポアソン比 ν_{21} は積層理論より次式のように求められる。

$$\nu_{21} = -a_{21}^*/a_{11}^* \quad (2)$$

ここで、 a_{ij}^* は積層板の単位幅、単位厚さ当たりのコンプライアンスマトリックスであり、剛性マトリックス A_{ij}^* の逆行列として求められる。剛性 A_{ij}^* は Tsai らの評価式⁽⁴⁾を用いて評価した。解析においては材料を CFRP(T 300/5208)とし、材料定数を表1に示す。この表には実験で用いた材料の定数も示してある。

以下では種々のタイプの積層板に関して、ポアソン比の値域すなわち最小値と最大値を明らかにし、そして最後にポアソン比についての材料設計を考える。

2.3 一般対称積層板のポアソン比 配向角の数、配向角、プライ比がいずれも任意となる対称積層板を一般対称積層板とよぶ。解析的にポアソン比の値域を求めることはできないので多次元の非線形計画問題として定式化し、Powellの方法⁽⁶⁾を用いてポアソン比 ν_{21} の最小値および最大値とそのときの積層構成を見出した。

ここでは繊維配向角を6種類、10種類および20種

図2 座標軸 (x : 繊維方向, 1-2: 基準軸)

図3 繰返し計算中の配向角の変化

類とし、初期値として種々の値を与えた。図3は繊維配向角を6種類 ($\theta_1, \dots, \theta_6$) としたときの探索過程の一例であり、表2は探索結果の一例を示したものである。これより、① ν_{21} の最小値および最大値、ならびにそのときの積層構成は初期値に依存すること、②繊維配向角は2種類に収束すること、すなわち不均衡2方向材となること、③このときのプライ比は初期値によって種々の値をとること、などがわかった。こうして、ポアソン比最小化あるいは最大化問題には局所的最小値および局所的最大値が無数にあることから、こうした多次元の最適化手法を用いることは実用的ではないことが明らかとなった。

したがって、ポアソン比に関する限り、複合材料積層板としては一般対称積層板を考える必要はなく、不均衡2方向積層板を考えればよいと思われる。なお、このことの解析的な証明は今後の課題である。

2.4 不均衡2方向積層板のポアソン比 繊維配向角の種類を2種類 θ_1 および θ_2 、プライ比 $p_1 \neq p_2$ の

表 2 配向角の初期値を変化させたときの収束状況 (繊維配向角が6種類の場合)

Minimization of Poisson's ratio				Maximization of Poisson's ratio			
Case	Fiber orientation angles		Poisson's ratio	Case	Fiber orientation angles		Poisson's ratio
	Initial value (deg.)	Final value (deg.)			Initial value (deg.)	Final value (deg.)	
1	$\theta_1 = 0$	14.16	-0.3693	4	$\theta_1 = 0$	-30.50	1.405
	$\theta_2 = 10$	14.19			$\theta_2 = 10$	-30.05	
	$\theta_3 = 20$	14.13			$\theta_3 = 20$	20.32	
	$\theta_4 = 30$	13.99			$\theta_4 = 30$	20.33	
	$\theta_5 = 40$	61.96			$\theta_5 = 40$	20.17	
	$\theta_6 = 50$	62.00			$\theta_6 = 50$	19.93	
2	10	62.90	-0.3135	5	10	-37.81	1.188
	10	12.66			10	15.95	
	10	12.66			10	15.82	
	10	12.66			10	15.72	
	10	12.66			10	15.72	
	10	12.66			10	15.72	
3	30	17.79	-0.2370	6	0	24.89	1.459
	40	17.02			20	24.99	
	50	64.33			20	24.85	
	60	64.37			-20	-24.93	
	70	64.37			-20	-24.94	
	80	64.34			-20	-24.94

図 4 2方向積層材の配向角

ものを不均衡2方向材と呼ぶ(図4)。

この材料では、ねじれ角 γ と交差角 ϕ による表現も使用する。

$$\phi = (\theta_1 - \theta_2)/2, \gamma = (\theta_1 + \theta_2)/2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

この材料では設計変数が θ_1, θ_2 および ρ_1 の3個となり、非線形計画法でポアソン比の最大値および最小値を簡単に求めることができる。その結果、解は初期値に依存せず、次の値となった。

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= 14.09^\circ, \theta_2 = 62.00^\circ, \rho_1 = 0.681 \\ \nu_{21} &= -0.36976 \text{ (最小値)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= 24.91^\circ, \theta_2 = -24.91^\circ, \rho_1 = 0.500 \\ \nu_{21} &= 1.45916 \text{ (最大値)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

これより、①ポアソン比の最大値は均衡斜交積層材に存在すること、②最小値は均衡斜交積層材ではなく完全不均衡2方向材に存在することが明らかとなった。図5は式(4)および(5)の積層板のポアソン比とプライ比の関係を示したものである。

図 5 典型的な2方向材でのプライ比に関するポアソン比の変化

次に、プライ比を一定とし、そのプライ比でポアソン比が最大および最小となる積層構成を見い出した。その結果を図6に示す。

これより、①ポアソン比の最大値はプライ比 $\rho_1 = 0.5$ で最大となり不均衡性が増すに従って単調減少すること、②最小値はプライ比 $\rho_1 = 0.5$ でかなり小さいが不均衡性が増すに従って減少し $\rho_1 = 0.7$ 付近でいったん最小値をとったあと単調増加することがわかった。このため、ポアソン比の値域が最大となる積層構成は $\rho_1 = 0.5$ すなわち均衡2方向材であることがわかった。したがって、以下では均衡2方向材について考えることにする。なお、ポアソン比の最小値については均衡材より不均衡材のほうが小さいがその差は少な

いため、複合材料積層板のポアソン比に関しては均衡2方向材で考えて問題はないと思われる。

2.5 均衡2方向積層板のポアソン比 前節の材料で $\mu_1 = \mu_2$ のとき均衡2方向材となる。均衡2方向材のポアソン比の等高線を γ - ϕ 平面上および θ_1 - θ_2 平面上に描いたものを図7および8に示す。ポアソン比の最大値は斜交積層材に存在するが、このときの値と積層構成は解析的に求められる。この材料では面内積層パラメータ⁽¹⁾は次のようになる。

$$V_1^* = \cos 2\theta, V_2^* = \cos 4\theta, V_3^* = V_4^* = 0 \dots (6)$$

これより,

$$V_2^* = 2V_1^{*2} - 1 \dots (7)$$

となる。そこで式(2)よりポアソン比を求めると、

$$\nu_{21} = \frac{-2U_3 V_1^{*2} + U_3 + U_4}{2U_3 V_1^{*2} - U_2 V_1^* + U_1 - U_3} \dots (8)$$

停留条件より ν_{21} が最大となる V_1^* は次式となる。

$$V_1^* = [-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}] / 2A \dots (9)$$

ここで,

$$A = 2U_2 U_3, B = -2U_3(U_1 + U_4), C = U_2(U_3 + U_4) \dots (10)$$

CFRP(T 300/5208)では $V_1^* = 0.645$ となり、式(6)より $\theta = 24.9^\circ$ と求められる。このとき、 $\nu_{21} = 1.459$ となる。

2.6 ポアソン比が最大、零、または最小となる積層板とその変形 図8のような θ_1 - θ_2 平面において、ポアソン比 ν_{21} が最大、零、最小となる解を非線形数値計画法により求めた。目的関数はそれぞれ $-\nu_{21}, \nu_{21}$, および ν_{21} とした。

表3は、こうして得られた解と、そのときの弾性的性質を示したものである。また、図9はこの結果をもとに描いた単軸負荷条件下での変形図であり、特異な変形がよくわかる。

図6 プライ比とポアソン比の範囲との関係

ポアソン比が最大になる場合は積層構成はアングルプライとなってせん断変形は生じないが、零または負になる場合には著しいせん断変形が生じていることがわかる。このせん断変形がポアソン比を零にしたり、負にしたりしていると思われる。なお、ポアソン比が最大または最小になる解は唯一であるが、零になる解はいくつもある。表3にはそのうちの一例を示した。

3. 実験

供試材は東レCFRPプリプレグP-305を12層対称積層したものを用いた。硬化条件は 120°C , 10 kg/cm^2 , 1h, 後硬化条件は 130°C , 2hである。板厚は 3.1 mm , V_f は 56% である。この平板から長さ 170 mm , 幅 20 mm の試験片を切り出し、両端 35 mm にアルミタブを貼り付け、引張試験機(島津オートグラフAJ-10 TA)にて、引張速度 2 mm/min で単軸引張試験を行った。ポアソン比は試験片中央に貼り付けた二軸ひずみゲージで計測した。負荷荷重は 200 kgf までとした。試験片の積層構成は表4のように作製し、 0° 材、 90° 材、および $\pm 45^\circ$ で得られたデータから表1に示す基本材料定数を求めた。以後計算値はこの材料定数をもとに行った。

図10および図11は交差角 $\phi = 25^\circ$ の積層板で、ね

図7 ϕ - γ 平面でのポアソン比の等高線 (濃淡の境界が等高線を表す)

図8 θ_1 - θ_2 平面でのポアソン比の等高線 (濃淡の境界が等高線を表す)

ねじれ角 γ が変形したときのポアソン比とその方向のヤング率を示したものである。

これにより、両者ともせん断応力 $\sigma_6=0$ としたときの計算値と良く一致しており、CFRP 材でポアソン比が計算どおり、1 以上になること、そして負になることが確認された。こうした実験データは著者の知る限り従来得られていない。

図中破線はせん断ひずみ $\epsilon_6=0$ としたときの計算値である。式(2)で計算されるポアソン比は単軸応力状態、すなわち $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_6 = 0$ のもとで計算されるものである。しかしながら、一般の引張試験機では図9のように生ずるせん断変形を拘束してしまい、 $\sigma_6=0$

表 3 ポアソン比が零、最小値および最大値となる積層板の弾性特性

	$\nu_{21}=0$	$\nu_{21}=\text{Minimum}$	$\nu_{21}=\text{Maximum}$
θ_1	48.31	62.54	-24.91
θ_2	5.00	15.3	24.91
E_1	88.22	56.22	90.57
E_2	17.78	30.45	12.53
E_6	11.04	8.49	30.18
ν_{21}	-1.95E-5	-0.326	1.459
ν_{61}	-0.960	-1.464	0.0
ν_{12}	-3.92E-6	-0.176	0.2018
ν_{62}	-0.878	-1.335	0.0
ν_{16}	-0.120	-0.221	0.0
ν_{26}	-0.545	-0.372	0.0

Unit: Angle in degree, E in GPa.

図 9 特異なポアソン比をもつ積層板の単軸応力下での変形状態

表 4 実験に用いた積層構成

Designation	Lay-up	Cross angle ϕ (deg.)	Twist angle γ (deg.)
C0	$[(0)_6]_s$	0	0
C0/90	$[(0/90)_3]_s$	45	45
C90	$[(90)_6]_s$	0	90
C45AG	$[(45/-45)_3]_s$	45	0
C45	$[(45)_6]_s$	0	45
C001	$[(25/-25)_3]_s$	25	0
C201	$[(45/-5)_3]_s$	25	20
C401	$[(65/15)_3]_s$	25	40
C601	$[(85/35)_3]_s$	25	60
C901	$[(65/65)_3]_s$	25	90

図 10 交差角 $\phi=25^\circ$ の積層板におけるねじれ角 γ とポアソン比との関係

図 11 交差角 $\phi=25^\circ$ の積層板におけるねじれ角 γ とヤング率との関係

とはならず、極端な場合には $\epsilon_0=0$ となることが考えられる。このためせん断変形の拘束が未知の実験値は $\alpha_0=0$ と $\epsilon_0=0$ の両計算値の間に得られることになるが、図 10 および図 11 から明らかなように今回の実験ではせん断拘束はほとんど無視してよい状態であることもわかった。なお、せん断変形が拘束されると図 10 の破線でわかるようにポアソン比は負にならない。

4. 結 論

繊維強化複合材料積層平板のポアソン比について検討を行った結果、次の結論を得た。

- (1) ポアソン比の最大値は均衡斜向積層平板に存在する。このときの最大値と積層構成は積層パラメータを用いて解析的に求められる。
- (2) ポアソン比の最小値は不均衡 2 方向積層平板に存在する。しかしながらその最小値は均衡 2 方向積層平板の最小値とあまり異ならない。
- (3) ポアソン比の値域が最大となる材料は均衡 2 方向積層平板である。
- (4) ポアソン比が最大になるときはせん断変形

は生じないが、零または負になるときは著しいせん断変形が生じている。

- (5) ポアソン比が 1 以上および負となる実験データが得られ、実験値と解析値はよく一致した。

文 献

- (1) Miki, M. (Hayashi, T., ほか 2 名編), *Progress in Science and Engineering of Composites*, Proc. ICCM-IV Tokyo (1982), 1725, Japan Society for Composite Materials.
- (2) Miki, M. (Vinson, J. R., ほか 1 名編), *Recent Advances in Composites in the United States and Japan*, ASTM STP, 864 (1985), 387.
- (3) Miki, M. (Kawata, K., ほか 2 名編), *Composites 86: Recent Advances in Japan and United States*, (1986), 673.
- (4) Tsai, S. W. and Hahn, H. T., *Introduction to Composite Materials*, (1981), 151, Technomic Westport, Connecticut.
- (5) Herakovich, C. T., *J. Composite Materials*, 18 (1984), 447.
- (6) Vanderplaats, G. N., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, (1981), 84, McGraw-Hill.

討 論

〔質問〕 山 崎 光 悦〔金沢大学工学部〕

繊維複合材料積層材の特異な材料特性について解析的および実験的に興味ある結果を得られたことに対して敬意を表す。以下の点についてご教示いただければ幸いである。

(1) 一般対称積層板のポアソン比の最適化を 6 層 (6 種類) の場合について実施した結果のみを示しておられるが、10 層、20 層の場合の結果はいかがか。またそれらすべての結果から“不均衡 2 方向積層板を考えればよい”との結論なのか。

(2) 不均衡 2 方向積層板のポアソン比の最小値が $P_1=0.5$ のときの値 (図 6) とほぼ変わらないことから均衡 2 方向材のポアソン比の最大・最小値を考えればよいとの結論を得られているが、このことは表 1 の材料定数のどの関係が大きく影響していると考えられるか。また他の材料への適用性についてはどのようにお考えか。

(3) 実験モデルで $\phi=25^\circ$ を採用された理由はなにか。

〔回答〕 (1) 紙数の関係で 6 層のみの結果を示したが、10 層および 20 層の場合でも同様であった。すなわち、種々の初期値をもとに探索を行った結果、配

向角はいずれの場合にも 2 種類に収束した。これらの結果より、ポアソン比の設計に関しては不均衡 2 方向積層板が必要かつ十分であると考えられる。

(2) ここで計算および実験の対象とした炭素繊維強化エポキシ樹脂は先進複合材料の中で最も代表的な材料であり、ここで示した材料定数は一般性の高い数値である。マトリックスが高分子材料である限り、 E_y 、 E_s および ν_x などの値はあまり変わらず、また E_x についても炭素繊維のような高剛性の繊維が用いられている限り、その変動はあまり大きくはない。そこで、確認のため表 1 に示した T300/5208 の E_x 、 E_y 、 E_s および ν_x をそれぞれ単独に $\pm 20\%$ 変動させて積層板のポアソン比の最小値を求めたところ、 E_x の増加、 E_y の減少、 E_s の減少、または ν_x の増加によってポアソン比の最小値は減少した。このうち、 E_x が最も感度が高く、 E_x を 20% 増加させるとポアソン比の最小値は -0.370 から -0.481 に減少した。しかしながら、この場合でも均衡材でのポアソン比の最小値は -0.419 であり、不均衡材との差は小さかった。これらの結果より、均衡材での最小値と不均衡材での最小値の相違は本文で述べたように小さいと一般的に結論づけられる。

(3) 表3で示した3種の積層板について交差角 ϕ を計算すると、それぞれ 21.7° , 23.6° , および 24.9° となり、ほぼ等しくなっていることがわかる。このため、試験片作成上 $\phi=25^\circ$ として積層板を製作し、ねじれ角 γ を種々に変化させて試験片を切り出した。図7からも

わかるように、 $\phi=25^\circ$ とすると γ を変化させることによりポアソン比を概略最大と最小の間の種々の値とすることができる。以上の理由から、 $\phi=25^\circ$ とした。
以上、有益なご討論に感謝する。

54巻499号, A編(昭63-3) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
永田有世 ほか	435	右	5	表5	表4
岸田路也 ほか	528	右	2~6	R_a/R_b	R_b/R_a
小幡谷洋一 ほか	584	右	25	$W(S_d; S_{co}, m)$	$W(S_d; S_{co}, m_0)$
	585	右	3	$(A_\infty \varepsilon + 1)$	$(A_\infty \varepsilon + 1)$
	〃	〃	7	領域では力場…	領域での力場…
	586	右	8	$\Delta\sigma_d^\ominus$	$-\Delta\sigma_d^\ominus$
	590	左	18	…を絞って	…を絞って
	591	左	29	御形が応力…	御形か応力…
服部敏雄 ほか	599	右	表1中	ε	E