ドリル穴状ピットを有する半無限体の引張り*

野口 博 司^{*1}, 西谷 弘 信^{*1}, 後 藤 浩 文^{*2}

Semi-Infinite Body with a Drill-Hole Shaped Pit under Tension

Hiroshi NOGUCHI, Hironobu NISHITANI, and Hirofumi GOTO

Semi-infinite bodies with a drill-hole shaped pit under uni-axial tension were analyzed by the body force method. In the analysis, special fundamental solutions were used in order to obtain the high accuracy by numerical results even in the case of small number of divisions.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration Factor, Drill-hole Shaped Pit, Semi-infinite Body, Tension, Body Force Method

1. 緒 言

表面欠陥を持つ部材の強度評価に関連して、ピットを有する弾性体の引張問題は、重要な応力集中問題の一つである。そこで回転半円形状ピットを有する弾性体の二軸引張りが多く解析されていたが^{(1)~(12)}、著者らは前報⁽¹³⁾において、それらの場合の一軸引張問題を体積力法によって高精度に解析し、その応力状態を示した。自然欠陥としては回転半円形状ピットで近似できるものも多いが、欠陥が疲労強度に及ぼす研究において、人工欠陥としてドリル穴を用いる研究⁽¹⁴⁾がなされていることを考慮すれば、ドリル穴状ピットの問題も重要である。なおドリル穴は三次元応力集中源として、切欠効果を対象とする試験片を計画する上でも有用であると思われる。

そこで本論文では、前報で提案した特別な基本解⁽¹³⁾を用いることにより、ドリル穴状ピットを有する半無限体の一軸引張問題を高精度に解析し、その場合の応力状態を示した。

2. 解 析 理 論

図1に示すような、ドリル穴状ピットを有する半無限体が遠方で一様な一軸応力 $\sigma_x = \sigma_\infty$ を受けている問題を体積力法⁽¹⁵⁾を用いて解析する。本問題は前報⁽¹³⁾と同様、二つの問題から構成されている。

一軸引張問題 (図1) = 問題 A + 問題 B ... (1)

ここで問題 A と B の遠方荷重条件は図2に示す座標系を用いて、次式で表される。

問題 A :

図1 一軸引張りを受ける
ドリル穴状ピット

図2 座標系

* 昭和62年11月20日 第949回講演会において講演、原稿
受付 昭和62年5月6日。

^{*1} 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

^{*2} 学生員, 九州大学大学院。

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_\infty, \quad \tau_{r\theta} = 0; \quad r \rightarrow \infty \quad \dots\dots\dots (2)$$

問題 B:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_\infty \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2}\sigma_\infty \sin 2\theta; \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

2.1 問題Aの解法 微小要素 $\rho d\varphi \sqrt{(d\rho)^2 + (d\zeta)^2}$ に働く体積力の r, z 方向の成分を dP_r, dP_z とするとき [ただし式(2)を考慮して θ 方向の成分 $dP_\theta = 0$ とする], ピット上の境界条件を考慮して, 体積力密度 ρ_r, ρ_z を次式で定義する.

区間 A-C:

$$\left. \begin{aligned} \rho_r &= \frac{dP_r}{\rho d\varphi d\zeta} \\ \rho_z &= \frac{dP_z}{\rho d\varphi d\zeta} \frac{c}{\zeta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

区間 C-B:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_r &= \frac{dP_r}{\rho d\varphi d\zeta} & (\alpha \neq \pi) \\ \rho_r &= -\frac{dP_r}{\rho d\varphi d\rho} \frac{a}{\rho} & (\alpha = \pi) \\ \rho_z &= \frac{dP_z}{\rho d\varphi d\rho} \end{aligned} \right.$$

図 3(a) に示す, θ 方向に変化しない集中力のリング表 1 一軸引張りを受けるドリル状ピット ($\nu=0.3$)

	a/b	α		
		$\pi/2$	$2/3\pi$	π
$\sigma_{zA}/\sigma_\infty$	0.2	2.523	2.526	2.529
	0.4	2.412	2.440	2.427
	0.6	2.200	2.303	2.386
	0.8	1.953	2.151	2.293
	1.0	—	2.001	2.213
	1.0	—	2.001	2.213
$\sigma_{z \text{ max along A-C}}/\sigma_\infty$	0.2	2.98	2.99	3.01
	0.4	2.68	2.75	2.83
	0.6	2.32	2.48	2.65
	0.8	1.97	2.24	2.49
	1.0	—	2.03	2.36
	1.0	—	2.03	2.36

(a) 問題 A の基本解

(b) 問題 B の基本解

図 3 解析に用いる基本解

を基本解[その表示は文献(8), (13)を参照]とすれば, 周方向の一点で境界条件を満たせば周方向のいたる所で満足するので, 周方向分割を必要とせず, 高精度の解析となる⁽⁸⁾. 特異点の処理は前報⁽¹³⁾と同様に行った.

2.2 問題Bの解法 ピット上の境界条件を考慮して, r, θ, z 方向の体積力密度 $\rho_r, \rho_\theta, \rho_z$ を次式で定

図 4 ピット縁 A-C に沿った σ_x ($a/b=0.2$) 図 5 ピット縁 A-C に沿った σ_x ($a/b=0.4$) 図 6 ピット縁 A-C に沿った σ_x ($a/b=0.6$)

義する。

区間 A-C :

$$\rho_r = \frac{dP_r}{\cos 2\varphi \rho d\varphi d\zeta}$$

$$\rho_\theta = \frac{dP_\theta}{\sin 2\varphi \rho d\varphi d\zeta}$$

$$\rho_z = \frac{dP_z}{\cos 2\varphi \rho d\varphi d\zeta} \frac{c}{\zeta}$$

区間 C-B :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_r = \frac{dP_r}{\cos 2\varphi \rho d\varphi d\zeta} \quad (\alpha \neq \pi) \\ \rho_r = \frac{-dP_r}{\sin 2\varphi \rho d\varphi d\zeta} \frac{a}{\rho} \quad (\alpha = \pi) \end{array} \right. \dots\dots\dots (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\theta = \frac{dP_\theta}{\sin 2\varphi \rho d\varphi d\zeta} \quad (\alpha \neq \pi) \\ \rho_\theta = \frac{-dP_\theta}{\sin 2\varphi \rho d\varphi d\zeta} \frac{a}{\rho} \quad (\alpha = \pi) \end{array} \right.$$

$$\rho_z = \frac{-dP_z}{\cos 2\varphi \rho d\varphi d\zeta}$$

図 3(b) に示す θ 方向に $\cos 2\theta$ あるいは $\sin 2\theta$ で変化する集中力のリングを基本解 (その表示は前報⁽¹³⁾) を

参照) とすれば, 周方向の一点で境界条件を満たせば周方向のいたる所で満足するので, 周方向分割を必要とせず, 高精度の解析となる⁽¹³⁾。

図 7 ピット縁 A-C に沿った σ_x ($a/b=0.8$)

図 8 ピット縁 A-C に沿った σ_x ($a/b=1.0$)

図 9 ピット縁 B-C-A に沿った σ_x ($\alpha=\pi/2$)

図 10 ピット縁 B-C-A に沿った σ_x ($\alpha=2/3\pi$)

図 11 ピット縁 B-C-A に沿った σ_x ($\alpha=\pi$)

3. 数値計算結果

数値計算においては、ピットを分割し、各区間で体積力密度を一定と仮定した。そして各区間の注目点の境界条件からその体積力密度を決定した。そして分割

数の逆数で解析結果を外そうとすることにより厳密解を推定する方法⁽¹⁵⁾を用いた。ピットの頂角 α は $\pi/2$, $2/3\pi$, π の3とおりとし、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。

解析結果の数値は、紙面の都合上、点A（ピット縁とy軸の交点）での応力およびピット縁A-C間での

図 12 点Aからの応力分布 ($\alpha=\pi/2$) 図 13 点Aからの応力分布 ($\alpha=2/3\pi$) 図 14 点Aからの応力分布 ($\alpha=\pi$) 図 15 点Bからの応力分布 ($\alpha=\pi/2$) 図 16 点Bからの応力分布 ($\alpha=2/3\pi$) 図 17 点Bからの応力分布 ($\alpha=\pi$) 図 18 点Cからの応力分布 ($\alpha=\pi/2$) 図 19 点Cからの応力分布 ($\alpha=2/3\pi$) 図 20 点Cからの応力分布 ($\alpha=\pi$)

図 21 点 A の応力集中係数

図 22 ピット縁 A-C 上での最大応力

最大応力のみを表 1 に示す。

まずピットの縁に沿った応力分布を示す。図 4~8 において、ピットのアスペクト比 a/b を揃えて、ピットの頂角が縁 A-C 間の応力分布に与える影響を示す。 a/b が小さくなるにつれてピットの頂角は縁 A-C の応力分布に影響しなくなる（本計算結果範囲内では、15% の誤差内で、 $a/b \leq 0.5$ では頂角の影響はない）。次に、図 9~11 において、頂角を揃え、 a/b が縁 B-C-A 間の応力分布に与える影響を示す。頂角が等しければ、縁 B-C 付近の応力場はほぼ等しくなっている（図 15~17 からこのことはわかる）。

次に、ピット縁から材料内部への応力分布を示す。点 A から y 軸に沿った応力分布は図 12~14 に、線形切欠力学⁽¹⁷⁾に基づいて、点 A の応力 σ_{xA} を基準にした相対応力分布で示すが、 $a/b \leq 0.5$ の範囲ではほぼ 1 本の曲線になっている。最深点 B から z 軸に沿った分布は、Bazant ら⁽¹⁸⁾ の円すい頂点の特異性と比較するため、両対数で図 15~17 に示す。B 点付近の応力分布は、Bazant らの特異性にいずれも漸近しており、

図 23 縁 A-C 間の相対応力分布 (σ_{xA} を基準)

頂点から材料内部に急激に応力は減衰している。点 C から y 軸に平行な線に沿った応力分布は図 18~20 に示す。

図 21, 22 には点 A の応力および縁 A-C 間の最大応力を a/b を横軸にとって示す。破線で回転半円体状ピットの結果⁽¹³⁾も付記したが、いずれの結果も $a/b \rightarrow 0$ に相当する Kawai らの結果⁽¹⁶⁾になめらかに外そうされる。図 23 には、縁 A-C 間の応力を σ_{xA} で無次元化したものを示す。図 12~14 に対応して、この図でも $a/b \leq 0.5$, $z/a \leq 0.5$ の範囲では 10% 程度の誤差で 1 本の曲線になっている。

4. 結 言

ドリル穴状ピットを有する半無限体の引張りを受ける場合を体積法を用いて高精度に解析し、その場合の応力状態を示した。

文 献

- (1) Eubanks, R. A., *J. Appl. Mech.*, 21 (1954), 57.
- (2) 藤田・ほか 2 名, 防衛大学校理工学研究報告, 13-4 (昭 50-12), 599.
- (3) 渥美・伊藤, 機講論, No.761-1 (昭 51-6), 13.
- (4) 藤田・ほか 2 名, 機論, 45-399, A (昭 54), 1338.
- (5) 藤田・土田, 機論, 46-405, A (昭 55), 525.
- (6) 藤田・土田, 防衛大学校理工学研究報告, 18-2 (昭 55-16), 131.
- (7) 長谷川, 機論, 50-449, A (昭 59), 1592.
- (8) 村上・ほか 2 名, 機論, 48-426, A (昭 57), 150.
- (9) 藤田・ほか 3 名, 機論, 43-372 (昭 52), 2845.
- (10) 斎藤・中原, 機論, 33-247 (昭 42), 343.
- (11) Fujita, T., ほか 2 名, *J. Elasticity*, 12-2 (1982), 177.
- (12) 藤田・ほか 2 名, 機論, 47-423, A (昭 56), 1175.
- (13) 野口・ほか 3 名, 機論, 53-488, A (昭 62), 820.
- (14) 例えば, 西谷・河野, 機論, 37-300 (昭 46), 1492; 村上・

- ほか2名, 機論, 44-388 (昭53), 4003.
- (15) 西谷, 機誌, 70-580 (昭42), 13.
- (16) Kawai, T. and Endoh, T., *Int. Conf. on Computational Mechanics*, (1986), V-37.
- (17) 西谷, 機論, 49-447, A (昭58), 1353.
- (18) Bazant, Z. P. and Keer, L. M., *Int. J. Solids Struct.*, 10 (1974), 957.

討 論

〔質問〕 長谷川 久 夫〔明治大学工学部〕

(1) 非貫通孔による応力集中のご研究, 興味深く拝読させていただいた。表1を見ると α は3.0を超えていないが, 図22は $a/b \rightarrow 0$ のとき $\alpha \rightarrow 3.07$ となっている。 $a/b \rightarrow 0$ のときには貫通円孔の結果(二次元) $\alpha \rightarrow 3.0$ になるとも考えられるが, $\alpha > 3.0$ となるのは三次元の影響か。

(2) 図9~11ではC点近傍の応力 σ_x が示されていないが, C点の σ_x は左側と右側の値で一致するのか(図18~20からは, 点Cで特異性があるようにも見受けられますが)。

〔回答〕 (1) ご指摘のとおり, $a/b \rightarrow 0$ において, $\sigma_{x\max} \text{ along A-C} / \sigma_\infty > 3$ になるのは, 三次元の影響で

ある(ただし, ポアソン比 ν が零の場合は3となる)。二次元問題と $a/b \rightarrow 0$ の問題の相違は, $z=0$ の面における $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ の有無に起因している(ただし, σ_x と σ_y は二次元問題の応力)。このことにより, $a/b \rightarrow 0$ においても, ピット縁にそっての σ_x / σ_∞ は一様な3とならず, 図23のように変化し, 最大値は3を超えらると思えられる。

(2) 本法ではC点近傍の応力を精度よく計算することができないので, 図9~11ではC点近傍の σ_x を示していない。しかしながら, 理論的には, C点の σ_x は左側(B $\rightarrow$ C)と右側(A $\rightarrow$ C)においてそれぞれ異なった有限値に収束すると考えている。