円環状剛体パンチによる
横等方性厚板の軸対称接触問題*原 利 昭*¹, 坂 本 信*²
渋谷 寿 一*³, 小 泉 堯*³An Axisymmetric Contact Problem of a Transversely Isotropic
Layer Indented by an Annular Rigid PunchToshiaki HARA, Makoto SAKAMOTO,
Toshikazu SHIBUYA, and Takashi KOIZUMI

A solution is given for the frictionless indentation of a transversely isotropic layer by an annular rigid punch, where the elastic layer is resting on a rigid foundation. The problem is reduced to an infinite system of simultaneous equations using the method of expressing the normal stress under the punch as appropriate series. The effect of transverse isotropy and indentational load on the stress field are studied. Results are compared with numerical solutions for the corresponding isotropic problem.

Key Words: Elasticity, Contact Stress, Transverse Isotropy, Elastic Layer, Rigid Foundation, Mixed Boundary-Value Problem

1. 緒 言

複合材料は種々の優れた性質を有するため、最近いろいろな方面で利用され、同時に多くの関心を集めている。このような新しい材料は特有の機能や性能を有し、従来の材料には見られない複雑な力学的挙動を示すことから、これらを理論的に解明することが材料の強度評価資料を提供する上からも重要視されている。

一般に繊維強化複合材料は不均質で複雑な異方性を有するが、巨視的観点から均質な異方性材料として扱うことも可能である。このような考え方により、一方向繊維強化材を強化繊維方向に垂直な面内で等方性を有する横等方性弾性体とみなすとともに等方性の場合に類似した解析方法を適用して種々の剛体パンチ等に関する接触問題が研究されている。例えば、横等方性半無限体の問題では、Elliott⁽¹⁾が球、円すいおよび円柱状剛体パンチで押し込む場合を調和応力関数を導入して解析し、パンチ形状がだ円の場合を Shield⁽²⁾が、また、円柱、円すいおよび回転放物状パンチの場合を

Deutsch⁽³⁾がそれぞれ扱っている。他方、横等方性厚板を扱った問題では、England⁽⁴⁾が剛体床上的無限厚板を球状剛体パンチで押し込む場合を、笠野⁽⁵⁾はアーベル変換を適用して厚板両面を剛体円柱で押し付ける場合を、ともに第二種フレドホルム形積分方程式の解法問題に帰着する方法により解析している。また、Tsai⁽⁶⁾は前者と同じ場合を、ハンケル変換法を適用することにより、板厚関連項を分離した形の解を導いている。

ところで、横等方性弾性体を扱ったこの種の三領域混合境界問題の解析例は極めて少ない。例えば、Rogowski⁽⁷⁾はともに横等方性を有する半無限体上に接着した厚板の上面を円環状剛体パンチで押し込む場合を扱っているが、接触円形領域の内外径比および板厚に対する外径の比がともに小さい場合を除いて数値計算は不利なようであり、数値結果を示していない。そこで、この種の問題に関する一つの解析法を示すために本研究では剛体床上的横等方性厚板を円環状剛体パンチで押し込む問題を扱い、等方性の場合⁽⁸⁾⁽⁹⁾の解法を拡張して適用すれば、この場合の解析は容易になることを示した。これにより、一方向繊維強化材料に関する接触応力や変形等を明らかにし、さらには等方性厚板の結果を比較して応力場に及ぼすこれらの材料異方

* 昭和62年11月20日 第949回講演会において講演、原稿受付 昭和62年5月26日。

*¹ 正員、新潟大学工学部 (〒950-21 新潟市五十嵐二の町8050)。

*² 准員、新潟大学大学院。

*³ 正員、東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

性の影響を明示した。

2. 応力解析

2.1 応力関数 円柱座標 (r, θ, z) において変位成分を (u_r, v_θ, w_z) , 応力成分を $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta})$ とすれば, $r\theta$ 面を等方性弾性面, 異方性主軸方向を z 軸とする横等方性弾性体のねじりのない軸対称応力状態は応力関数 $\varphi_j (j=1, 2)$ を用いて次のように表せる⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾.

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \partial \varphi_j / \partial r, & v_\theta &= 0 \\ w_z &= k_j \partial \varphi_j / \partial z \\ \sigma_r / \alpha_j &= -\beta_j \partial \varphi_j / r \partial r - \partial^2 \varphi_j / \partial z^2 \\ \sigma_\theta / \alpha_j &= -\beta_j \partial^2 \varphi_j / \partial r^2 - \partial^2 \varphi_j / \partial z^2 \\ \sigma_z / \alpha_j &= \mu_j \partial^2 \varphi_j / \partial z^2 \\ \tau_{rz} / \alpha_j &= \partial^2 \varphi_j / \partial r \partial z, & \tau_{\theta z} &= \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} (\partial^2 / \partial r^2 + \partial / r \partial r + \mu_j \partial^2 / \partial z^2) \varphi_j &= 0 \\ k_j &= (C_{11} \mu_j - C_{44}) / (C_{13} + C_{44}) \\ \alpha_j &= (1 + k_j) C_{44}, & \beta_j &= (C_{11} - C_{12}) \alpha_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

であり, μ_j は横等方性弾性体の五個の独立な弾性定数 C_{mn} に関する次式を満たす解である。

$$C_{11} C_{44} \mu^2 + \{C_{13}(2C_{44} + C_{13}) - C_{11} C_{33}\} \mu + C_{33} C_{44} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

2.2 解析方法 図1に示すように剛体床上に置かれた厚さ h の横等方性厚板表面を円環状剛体パンチで微小量 ε_0 だけ押し込む場合を考える。このとき厚板はパンチおよび剛体床に滑らかに接触しているものとすれば, 境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (i) & (\sigma_z)_{z=h} = 0, & (0 \leq r < r_i, r_0 < r) \\ (ii) & (w_z)_{z=h} = -\varepsilon_0, & (r_i \leq r \leq r_0) \\ (iii) & (\tau_{rz})_{z=h} = 0, & (0 \leq r) \\ (iv) & (\tau_{rz})_{z=0} = 0, & (0 \leq r) \\ (v) & (w_z)_{z=0} = 0, & (0 \leq r) \\ (vi) & \text{無限遠方で全ての応力は消失。} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

境界条件 (iv) ~ (vi) を考慮して応力関数 $\varphi_j (j=1, 2)$ を次式のように選ぶ。

$$\varphi_j = \int_0^\infty A_j(\lambda) \cosh \lambda_j z J_0(\lambda r) d\lambda \dots\dots\dots (5)$$

ここで, $\lambda_j = \lambda \mu_j^{-1/2}$ であり, $A_j(\lambda)$ は境界条件より決定される λ のみの未知関数, $J_n(\lambda r)$ は n 次の第一種ベッセル関数である。式(1)と式(5)より得られる τ_{rz} に境界条件 (iii) を適用すれば次式を得る。

$$A_2(\lambda) = -\xi \eta g_1(\lambda) A_1(\lambda) \dots\dots\dots (6)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (\mu_2 / \mu_1)^{1/2}, & \eta &= \alpha_1 / \alpha_2 \\ g_1(\lambda) &= \sinh \lambda_1 h / \sinh \lambda_2 h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式(6)を考慮して式(5)により変位と応力を表せば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \int_0^\infty \{ \xi \eta g_1(\lambda) \cosh \lambda_2 z - \cosh \lambda_1 z \} \\ &\quad \times \lambda A_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \\ w_z &= \int_0^\infty \{ k_1 \sinh \lambda_1 z - k_2 \eta g_1(\lambda) \sinh \lambda_2 z \} \\ &\quad \times \lambda A_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \alpha_1 \int_0^\infty \{ \beta_1 \cosh \lambda_1 z - \beta_2 \xi g_1(\lambda) \cosh \lambda_2 z \} \\ &\quad \times \lambda^2 A_1(\lambda) J_2(\lambda r) d\lambda \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= \alpha_1 \int_0^\infty \{ (\lambda^2 \beta_1 - 2\lambda^2) \cosh \lambda_1 z - (\lambda^2 \beta_2 - 2\lambda^2) \\ &\quad \times \xi g_1(\lambda) \cosh \lambda_2 z \} A_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\ \sigma_z &= \alpha_1 \int_0^\infty \{ \cosh \lambda_1 z - \xi g_1(\lambda) \cosh \lambda_2 z \} \\ &\quad \times \lambda^2 A_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{rz} &= \alpha_1 \int_0^\infty \{ g_1(\lambda) \sinh \lambda_2 z - \sinh \lambda_1 z \} \\ &\quad \times \lambda^2 A_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式(8)に残りの条件 (i), (ii) を適用すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_z)_{z=h} &= \alpha_1 \int_0^\infty \{ \cosh \lambda_1 h - \xi g_1(\lambda) \cosh \lambda_2 h \} \\ &\quad \times \lambda^2 A_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, & (0 \leq r < r_i, r_0 < r) \\ (w_z)_{z=h} &= (\eta - 1) \int_0^\infty \lambda A_1(\lambda) \sinh \lambda_1 h J_0(\lambda r) d\lambda \\ &= -\varepsilon_0, & (r_i \leq r \leq r_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

式(9)を数値的に解いて $A_1(\lambda)$ を決定する方法も考えられるが, ここでは従来の等方性弾性体の場合⁽⁸⁾の解法を拡張して利用する。

本問題におけるパンチ接触部の $(\sigma_z)_{z=h}$ は, 横等方性弾性体を円柱状パンチで押し込む場合⁽¹⁾を参考にすればパンチ縁で $\{(r^2 - r_i^2)(r_0^2 - r^2)\}^{-1/2}$ の特異性を有し, $r_i < r < r_0$ では有限かつ連続であると考えられる。そこで, 厚板が等方性の場合⁽⁹⁾と同様な考え方により, 次の変数変換式

図1 剛体床上の横等方性厚板

$$\left. \begin{aligned} r_c &= (r_o + r_i)/2, \quad b = (r_o - r_i)/2 \\ \phi &= \cos^{-1}\{(r_c^2 + b^2 - r^2)/2r_cb\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

を考慮するとともに未知係数 $a'_n (n=0, 1, 2, \dots)$ を用いて次のように $(\sigma_z)_{z=h}$ を表示することが可能である。

$$(\sigma_z)_{z=h} = -\frac{\alpha_1}{\pi r_c b} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \frac{\cos n\phi}{\sin \phi}, \quad (r_i < r < r_o) \dots\dots\dots (11)$$

さらに、式(9)の第1式および式(11)を用いてハンケル逆変換し、式(10)およびベッセル関数の積分公式⁽¹²⁾を用いれば次式を得る。

$$\lambda A_1(\lambda) = g_2(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} a'_n Z_n(\lambda) \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} Z_n(\lambda) &= J_n(\lambda r_c) J_n(\lambda b), \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ g_2(\lambda) &= 1/(\cosh \lambda_1 h - \xi \coth \lambda_2 h \sinh \lambda_1 h) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

式(12)は任意の a'_n に対して $(\sigma_z)_{z=h}$ の条件を常に満足することから、 a'_n を次のように決定する。式(12)を式(9)の第2式に代入し、ゲーゲンバウアーの加法定理⁽¹³⁾を用いて次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} g_2(\lambda) \sinh \lambda_1 h Z_n(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) Z_m(\lambda) \times \cos m\phi d\lambda = 1, \quad (0 \leq \phi \leq \pi) \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 δ_{0m} はクロネッカデルタであり、

$$a_n = (1 - \eta) a'_n / \varepsilon_0 \sqrt{\mu_1} \dots\dots\dots (15)$$

式(14)は $0 \leq \phi \leq \pi$ で常に成立する必要がある、そのため両辺の $\cos m\phi$ に関する係数を等置すれば次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} g_2(\lambda) \sinh \lambda_1 h Z_m(\lambda) Z_n(\lambda) d\lambda = \delta_{0m}, \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (16)$$

したがって、本問題は式(16)を解いて a_n を決定する問題になる。 a_n が決定されれば式(12)より $A_1(\lambda)$ は次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda A_1(\lambda) &= \xi g_2(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_n(\lambda) \\ \xi &= \sqrt{\mu_1} \varepsilon_0 / (1 - \eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

式(8)および式(17)を用いればすべての変位と応力は決定され、これらの表示式は以下のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\xi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ \cosh \lambda_1 z - \xi \eta g_1(\lambda) \cosh \lambda_2 z \} \\ &\quad \times Q_n^0(\lambda) d\lambda \\ w_z &= \xi \mu_1^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ k_1 \sinh \lambda_1 z - k_2 \eta g_1(\lambda) \sinh \lambda_2 z \} \\ &\quad \times Q_n^0(\lambda) d\lambda \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \alpha_1 \xi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ \beta_1 \cosh \lambda_1 z - \beta_2 \xi \eta g_1(\lambda) \\ &\quad \times \cosh \lambda_2 z \} \lambda Q_n^2(\lambda) d\lambda \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= \alpha_1 \xi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \left(\beta_1 - \frac{2}{\mu_1} \right) \cosh \lambda_1 z - \left(\beta_2 - \frac{2}{\mu_2} \right) \right. \\ &\quad \times \xi g_1(\lambda) \cosh \lambda_2 z \} \lambda Q_n^0(\lambda) d\lambda \\ \sigma_z &= \alpha_1 \xi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ \cosh \lambda_1 z - \xi g_1(\lambda) \cosh \lambda_2 z \} \\ &\quad \times \lambda Q_n^0(\lambda) d\lambda \\ \tau_{rz} &= -\alpha_1 \xi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ \sinh \lambda_1 z - g_1(\lambda) \sinh \lambda_2 z \} \\ &\quad \times \lambda_1 Q_n^1(\lambda) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで

$$Q_n^i(\lambda) = a_n g_2(\lambda) Z_n(\lambda) J_i(\lambda r), \quad (i=0, 1, 2) \dots\dots\dots (19)$$

なお、本問題において $h \rightarrow \infty$ とすれば式(7)および式(13)より

$$g_2(\lambda) \sinh \lambda_1 h \rightarrow 1/(1 - \xi) \dots\dots\dots (20)$$

となり、式(16)に対応する無限連立一次方程式は次のようになる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_m(\lambda) Z_n(\lambda) d\lambda = (1 - \xi) \delta_{0m} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (21)$$

式(21)は、Behera ら⁽¹⁴⁾が導いた横等方性半無限体表面を円環状剛体パンチで ε_0 だけ押し込む場合の結果に一致する。

3. 厚板上面の変位と応力 および応力特異性係数

式(18)の変位と応力はいずれも厚板内部 ($0 \leq z < h$) では直接数値積分により容易に求められるが、厚板上面では $z=h$ となるため被積分関数の性質上、数値計算は不利になる。そこで、これら被積分関数の収束性を考慮するとともに次のように数値積分適用項と積分公式を利用する項に分離して計算を行った。

$$\left. \begin{aligned} (u_r)_{z=h} &= -\xi \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\eta - 1) \int_0^{\infty} G(\lambda) q_n^1(\lambda) d\lambda \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - \xi \eta}{1 - \xi} a_n I_1^n \right] \\ (w_z)_{z=h} &= \frac{\varepsilon_0}{1 - \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \left\{ (1 - \tanh \lambda_2 h) + \frac{1 - \xi}{\xi} \right. \right. \\ &\quad \left. \times G(\lambda) \tanh \lambda_2 h \} q_n^0(\lambda) d\lambda - a_n I_0^n \right] \\ (\sigma_r - \sigma_\theta)_{z=h} &= \alpha_1 \xi \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\beta_2 \eta}{\xi} - \beta_1 \right) \int_0^{\infty} \lambda G(\lambda) \right. \\ &\quad \times q_n^2(\lambda) d\lambda + \frac{\beta_1 - \beta_2 \eta}{1 - \xi} \frac{2}{r} a_n I_1^n \right] - \frac{\beta_1 - \beta_2 \eta}{1 - \xi} \\ &\quad \times (\sigma_z)_{z=h} \\ (\sigma_r + \sigma_\theta)_{z=h} &= -\alpha_1 \xi \left(\beta_1 - \beta_2 - \frac{2}{\mu_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\mu_2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda G(\lambda) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \times q_n^0(\lambda) d\lambda - \frac{1}{1-\xi} \left\{ \beta_1 - \frac{2}{\mu_1} - \left(\beta_2 - \frac{2}{\mu_2} \right) \xi \right\} (\sigma_z)_{z=h} \\ & (\sigma_z)_{z=h} = \frac{\alpha_1 \xi}{\pi r_c b} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\cos n\phi}{\sin \phi}, \quad (r_i < r < r_o) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} & G(\lambda) = \xi \{ 1/(1-\xi) + 1/(\xi - \coth \lambda_1 h \tanh \lambda_2 h) \} \\ & q_n^i(\lambda) = Q_n^i(\lambda)/g_2(\lambda), \quad (i=0, 1, 2) \\ & I_l^n = \int_0^{\infty} Z_n(\lambda) J_l(\lambda r) d\lambda, \quad (l=0, 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

であり, I_l^n は文献(9)の結果を利用して容易に求めることができる。

パンチを ε_0 だけ押し込むのに要する全荷重 P は, 式(22)を利用して

$$P = -2\pi \int_{r_i}^{r_o} (\sigma_z)_{z=h} r dr = 2\pi \alpha_1 \xi a_0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

となり, 等方性の場合と同様に P は係数 a_0 のみに依存する。

ところで, 厚板上面の応力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ は式(22)より明らかなようにいずれもパンチ両縁で特異性を有する。そこで, 従来のこの種の研究例⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾でも扱われているようにこれら応力の特異性を評価することにも関連して次式によって定義される係数を導入する。

$$\left. \begin{aligned} & S_{ji} = \lim_{r \rightarrow r_i+0} r_o^{3/2} \sqrt{2\pi(r-r_i)} (\sigma_j)_{z=h}/P \\ & S_{jo} = \lim_{r \rightarrow r_o-0} r_o^{3/2} \sqrt{2\pi(r_o-r)} (\sigma_j)_{z=h}/P \\ & (j=r, \theta, z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここでは $(\sigma_z)_{z=h}$ に基づく $S_{zk}(k=i, 0)$ のみを示すことにすれば式(22)と式(25)より次式を得る。

$$\left\{ \begin{aligned} S_{zi} \\ S_{zo} \end{aligned} \right\} = -\frac{r_o}{2\pi a_0} \sqrt{\frac{r_o}{\pi r_c b}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \begin{aligned} r_i^{-1/2} \\ (-1)^n r_o^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

4. 数 値 計 算

異方性パラメータ $\mu_j, k_j, \beta_j (j=1, 2)$ は横等方性弾性体の五つの独立な弾性定数によって表示できるが, 解析結果における異方性の影響を明確にする一つの方法として笠野ら⁽¹¹⁾と同様な考え方により, これらのパラメータを工学的弾性定数を用いて次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} & \gamma = E'/E, \quad \rho = G'/G \\ & \mu_j = (X \pm \sqrt{X^2 - 4Y})/2 \\ & X = \frac{2(1+\nu)\gamma(\gamma-\nu'\rho)}{\rho(\gamma-\nu'^2)}, \quad Y = \frac{\gamma^2(1-\nu'^2)}{\gamma-\nu'^2} \\ & k_j = \frac{(\gamma-\nu'^2)\mu_j - \rho\{(1-\nu)\gamma - 2\nu'^2\}/2}{(1+\nu)\nu'\gamma + \rho\{(1-\nu)\gamma - 2\nu'^2\}/2} \\ & \beta_j = 2/\rho(1+k_j) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで, E, G, ν はそれぞれ等方性面内の縦弾性係数, 横弾性係数およびポアソン比であり, “'” を付けた諸量は異方性主軸に関するそれぞれの係数である。なお, これらの間には弾性ひずみエネルギーに関する熱力学的条件から次式の関係⁽¹⁷⁾が成立する。

$$E, E', G, G' > 0, \quad |\nu'| < \gamma^{1/2}, \quad -1 < \nu < 1 - 2\nu'^2/\gamma \quad \dots\dots\dots (28)$$

a_n を決定するにあたって式(21)の無限連立一次方程式の係数を求める必要があり, これらはいずれもベッセル関数を含む無限積分形で与えられる。そのため文献(8)と同様にこれらを直接数値積分する項とベッセル関数の漸近展開式を利用する項とに分離して計算を行った。

5. 数 値 結 果

本研究では横等方性材料として, 表1に示す炭素繊維およびガラス繊維強化エポキシ樹脂複合材料⁽¹¹⁾⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾を考慮して数値計算を行った。また, 比較のために等方性材料の結果についても示した。

表2は板厚およびパンチ形状パラメータをそれぞれ $h/r_o = 2, r_i/r_o = 0.25, 0.5, 0.75$ とした場合の各々の材料に関する係数 a_n を示したものである。収束の傾向はいずれの場合も同様であり, 応力値の収束性を確認してこれらの項数を決定した。

図2~5において変位と応力の半径方向分布を示した。これら図中の“—”を付した変位と応力は, それぞれパンチ押し込み量 ε_0 とパンチ押し付け力 P による無次元量を表しており, また, 比較のために等方性厚板の結果⁽⁹⁾を実線により示した。

図2と図3はパンチ内外径比および板厚のパラメータをそれぞれ $r_i/r_o = 0.5, h/r_o = 2$ とした場合の w_z と σ_z の分布図である。これらはともに板内部の表面近傍でパンチ両縁の影響を強く受けるが, 板下面に近づくとともに滑らかな分布曲線を呈し, その影響は減少する。また, 板内部の $r_i < r < r_o$ における変位および応力はともにグラファイト/エポキシ材の場合に最も大きくなる傾向がある。

表1 材料の弾性定数値

	γ	ρ	ν	ν'
Graphite/Epoxy $V_f=0.5$	11.5	1.456	0.32	0.30
E-glass/Epoxy $V_f=0.63$	3.44	1.014	0.37	0.24
Isotropy	1.0	1.0	0.3	0.3

(V_f : fiber volume fraction)

表 2 係数 a_n の値 ($h/r_o=2$)

$\frac{r_i}{r_o}$ n	(a) Graphite/Epoxy			(b) E-glass/Epoxy		
	0.25	0.5	0.75	0.25	0.5	0.75
0	1.41835821	1.31350650	1.07085155	1.03728413	0.98680914	0.84894618
1	-0.53179407	-0.35144319	-0.17000637	-0.48494664	-0.33373203	-0.16435287
2	-0.26617016	-0.12320436	-0.02773837	-0.15348531	-0.07003091	-0.01581918
3	-0.07839723	-0.02158282	-0.00214366	-0.04653280	-0.01277265	-0.00128554
4	-0.02674867	-0.00361519	-0.00011326	-0.01733213	-0.00266260	-0.00011012
5	-0.01150821	-0.00084304	-0.00001001	-0.00750234	-0.00065439	-0.00001201
6	-0.00544638	-0.00023263	-0.00000221	-0.00352793	-0.00017332	-0.00000203
7	-0.00267879	-0.00006659		-0.00173260	-0.00004834	
8	-0.00137106	-0.00001976		-0.00088819	-0.00001427	
9	-0.00070423	-0.00000227		-0.00045490	-0.00000131	
10	-0.00037937			-0.00024618		
11	-0.00019166			-0.00012257		
12	-0.00012264			-0.00008150		
13	-0.00003790			-0.00002098

図 2 $\bar{w}_z$ の分布 ($r_i/r_o=0.5, h/r_o=2$) 図 3 $\bar{\sigma}_z$ の分布 ($r_i/r_o=0.5, h/r_o=2$)

図 4 はパンチ内外径比を一定 ($r_i/r_o=0.5$) として種々の板厚に対する板上面の $(\bar{w}_z)_{z=h}$ と $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ の半径方向分布を示した図である。パンチ両縁で $(\bar{w}_z)_{z=h}$ の半径方向こう配はいずれの板厚の場合にも無限大になるなどその分布傾向は等方性の場合と同様であるが、変位量は等方性の場合よりも小さく、いずれの板厚に対してもパンチ非接触部での値はグラファイト/エポキシ材の場合に最も小さくなる。一方、パンチ接触域における $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ は接触部中央、すなわち $r=r_o$ よりやや内径側で極小となる上に凸の分布形状を呈し、パンチ両縁で無限大になる。いずれの板厚に対してもパンチ内径縁から中央部付近では等方性の場合よりも圧力値は大きく、板厚が大きくなるとともに圧力値は等方性の場合に漸近する。半無限体の場合には、これら $(\bar{w}_z)_{z=h}$ と $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ の分布曲線はともに等方性の場合に一致する。

図 5 は板厚を一定 ($h/r_o=2$) として r_i/r_o を変化した場合の $(\bar{w}_z)_{z=h}$ と $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ の分布図である。パンチ非接触域における $(\bar{w}_z)_{z=h}$ は、パンチ内側 ($r < r_i$) では r_i/r_o が小さいほど値は大きくなるが、パンチ外側 ($r_o < r$) では r_i/r_o による差異は小さく、 $r_i/r_o=$

0.25, 0.5 の場合の分布曲線はほぼ一致する。他方、 $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ は r_i/r_o が大きくなるほど、すなわちパンチ接触域が小さくなるほど大きな値になる。パンチ外縁ではいずれの r_i/r_o の場合にもこの圧力値は等方性の場合よりも小さくなる傾向がみられる。

図 6 および図 7 はパンチ押し付け力の板厚とパンチ内外径比による変化をそれぞれ示した図であり、縦軸の $\bar{P}$ はいずれも $G' r_o \epsilon_0$ による P の無次元量を表している。図 6 より板が薄いほど押し付け力は大きく、板厚の増加とともに単調に減少するが、グラファイト/エポキシ材では他の場合よりも常に大きな値になる。いずれの材料の場合も板厚の増加とともに半無限体の結果に漸近する。他方、図 7 においていずれの材料の場合にも $\bar{P}$ は r_i/r_o の増加とともに減少するが、その割合はグラファイト/エポキシ材の場合に最も著しくなる。

図 8 および図 9 は式 (25) で与えられる応力特異性係数の板厚とパンチ内外径比による変化をそれぞれ示した図である。図 8 より r_i/r_o が一定の場合、いずれの材料に対しても $S_{jo} > S_{ji}$ ($j=r, \theta, z$) であり、板厚の増加とともにパンチ外縁における S_{jo} は増加し、いず

れも半無限体の結果に漸近する。これに対し、パンチ内径縁における S_{ji} は板厚の増加とともにほぼ一様に減少してそれぞれの材料に関する半無限体の結果に漸近する。特に異方性材料の場合には S_{jo} および $S_{ji}(j=r, \theta, z)$ はそれぞれ一定値になる。図9より板厚一定の場合、いずれの材料においても図8と同様に $S_{jo} > S_{ji}$ となり、 r_i/r_o とともにいずれの係数値も大きくなる傾向を示す。

図10はポアソン比 ν あるいは ν' のいずれか一方を0.3で一定とし、他方によるパンチ押し付け荷重の変化を示した図である。 ν' による P の変化は極めて小

さいのに対し、 ν とともに P はいずれも単調に増加して ν' よりも強く P に影響を及ぼすことがわかる。

図11は板厚を $h/r_o=2$ として式(27)で与えたパラメータ γ によるパンチ押し付け荷重の変化を示した図である。パラメータ ρ に基づく P は半無限体の場合と同様な傾向を示すが、 γ による P の増加率は半無限体の場合よりも大きい。

図4 $(\bar{w}_z)_{z=h}$ と $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ の分布 ($r_i/r_o=0.5$)

図5 $(\bar{w}_z)_{z=h}$ と $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ の分布 ($h/r_o=2$)

図6 $\bar{P}$ の板厚による変化 ($r_i/r_o=0.5$)

図7 $\bar{P}$ の r_i/r_o による変化 ($h/r_o=2$)

図8 S_{ji}, S_{jo} の板厚による変化 ($r_i/r_o=0.5$)

図9 S_{ji}, S_{jo} の r_i/r_o による変化 ($h/r_o=2$)

図 10 P に及ぼすポアソン比の影響
($r_i/r_o=0.5$, $h/r_o=2$)

6. 結 言

剛体床上に置かれた横等方性厚板表面を円環状剛体パンチで押し込む場合を三次元弾性論に基づいて解析し、2種類の一方方向繊維強化複合材料を対象例とした数値計算を行った。変位や応力の分布などを明示するとともに板厚やパンチの幅が応力状態に及ぼす影響、さらには、等方性弾性体の結果を比較することにより、変位および応力等に及ぼす横等方性の影響などについて明示した。

文 献

- (1) Elliott, H. A., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 45 (1949), 621.
- (2) Shield, R. T., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 47 (1951), 401.

図 11 P に及ぼす弾性定数の影響
($r_i/r_o=0.5$, $h/r_o=2$, $\nu=\nu'=0.3$)

- (3) Deutsch, E., *Bull. Acad. Pol. Sci. Class. Quart.*, 11 (1963), 311.
- (4) England, A. H., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58 (1962), 539.
- (5) 笠野・ほか2名, 機論, 51-472, A (昭60), 2708.
- (6) Tsai, Y. M., *J. Elast.*, 16 (1986), 179.
- (7) Rogowski, B., *Arch. Mech.*, 34 (1982), 119.
- (8) 渋谷・ほか2名, 機論, 40-334 (昭49), 1523.
- (9) 田中・ほか3名, 機論, 41-349 (昭50), 2567.
- (10) Elliott, H. A., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 44 (1948), 522.
- (11) 笠野・ほか2名, 機論, 49-447, A (昭58), 1360.
- (12) Eldelyi, A., *Tables of Integral Transforms*, (1954), McGraw-Hill.
- (13) 森口・ほか2名, 数学公式(III), (昭38), 岩波書店.
- (14) Behera, B. and Das, A. K., *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Tech.*, 28 (1980), 179.
- (15) 野田・阿部, 機論, 49-444, A (昭58), 952.
- (16) Gecit, M. R., *Int. J. Eng. Sci.*, 24 (1986), 1245.
- (17) Lempriere, B. M., *AIJA J.*, 6-11 (1968), 2226.
- (18) Chen, C. H. and Cheng, S., *Trans. ASME, Ser. E*, 37-1 (1970), 186.
- (19) Chen, C. H., *J. Comp. Mat.*, 1 (1967), 30.

討 論

〔質問〕 笠野英秋〔拓殖大学工学部〕

次の二点をご教示願いたい。

(1) 図4, 5で示されている接触端近傍における接触圧の増加の割合と987ページ右欄下2行めの $S_{z0} > S_{zi}$ の関係は対応しているのか。

(2) 本接触問題を不均質を考慮した微視力学モデルで解析すれば一方方向ERP材の繊維方向圧縮破壊メカニズムについて有用な知見が得られると思うが、解析の可能性ならびに問題点があればご教示願いたい。

〔回答〕 (1) 応力特異性係数 $S_{zk}(k=i, o)$ とパンチ両縁近傍における $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ の対応性を調べる一つの方法として、パンチ両縁を基点にした場合の $|(\bar{\sigma}_z)_{z=h}|$ および

$$\begin{bmatrix} S_o^* \\ S_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_o - r) \\ (r - r_i) \end{bmatrix} \left(\frac{2\pi}{r_o} \right)^{1/2} |(\bar{\sigma}_z)_{z=h}|$$

により定義した S_o^* と S_i^* を考えることにする。例えば、グラフアイト/エポキシ, $r_i/r_o=0.5$, $h/r_o=2$ の場合を図示すれば付図1, 2のようになる。付図1より、パンチ両縁近傍では $|(\bar{\sigma}_z)_{z=h}|_{r_c \sim r_o} > |(\bar{\sigma}_z)_{z=h}|_{r_c \sim r_i}$ である。また、付図2では $S_o^* > S_i^*$ の関係が成立し、パンチ両縁で $S_o^* = |S_{z0}|$, $S_i^* = |S_{zi}|$ となる。他の材料, r_i/r_o , および h/r_o の場合についても同様な傾向が見られる。したがって、これらの結果よりご指摘の接触端近傍における $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ の増加割合と $|S_{z0}| > |S_{zi}|$ の関係は対応していると考えられる。

(2) 本研究では質問者による種々の研究例を参考にさせていただいたことに感謝申し上げる。著者らは、一方向繊維強化材に対し、繊維を均質な異方性材中に存在する等方性あるいは異方性介在物とみなす質問者らの解法(付1)(付2)に強く興味を有するとともに、現在不均質モデルを想定した一方向FRP材に関する界面問題を研究中である。

〔質問〕 長谷川 久 夫〔明治大学工学部〕

(1) 横等方性無限厚板の接触問題のご研究、興味深く拝読させていただいた。横等方性物体のパンチ縁で $-1/2$ のオーダの応力の特異性の生ずることは理論的に証明されているのか。

(2) 図2, 3などを見ると、応力も変位も等方性のときに比べて局所的な挙動を示している。また、図6, 7を見ると、押し付け力 P は等方性のときよりも常に大きくなっている。これらのことは横等方性体すべてに対して常にいえるのか。

(3) 半無限体($h/r_o \rightarrow \infty$)の場合には $(w_z)_{z=h}$ と $(\sigma_z)_{z=h}$ の分布は等方性のときのそれらと一致するとあるが、これは理論的に証明できるのか(異方性の影響のなくなる理由)。

〔回答〕 (1) この種の横等方性弾性体のパンチ問題の一つとして、半径 r_o の円柱状剛体パンチを半無限体表面に ε_o だけ押し付けた場合の $(\sigma_z)_{z=0}$ は

$$(\sigma_z)_{z=0} = \frac{2C_{11}\varepsilon_o r_o^2}{\pi(C_{13}^2 - C_{11}C_{33})(\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2})} \times \frac{H(r_o - r)}{(r_o^2 - r^2)^{1/2}}$$

と表示できることを文献(1)においてElliottが示し

付図1 パンチ両縁を基点とした $|\langle \sigma_z \rangle_{z=h}|$ の分布 ($G/E, r_i/r_o=0.5, h/r_o=2$)

(付1) 笠野・松本・中原, 機論, 51-471, A (昭60), 2450.

(付2) 笠野・松本・中原, 機論, 52-473, A (昭61), 1.

ている。

(2) 横等方性弾性体として単結晶 C_d (カドミウム, $\gamma=0.35, \rho=0.45, \nu=0.12, \nu'=0.25$)を考えた場合パンチ押し付け力 $\bar{P}$ は付図3のようになり、常に等方性材料の場合よりも値は小さくなるとともに、ここでは示していないが変位や応力に及ぼすパンチの影響も等方性の場合の方がより局所的になるなど、横等方性の材料によっては本結果と逆の傾向を示す場合がある。

(3) 本問題における $h/r_o \rightarrow \infty$ の特別な場合は半無限体の場合に対応し、無限連立一次方程式は式(21)で与えられる。いま、 $A_n = a_n/(1-\zeta)$ と置けば式(21)は

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\infty} Z_n(\lambda) Z_n(\lambda) \alpha \lambda = \delta_{0m}, (m=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots(i)$$

となり、文献(8)の等方性半無限体を円環状剛体パンチで押し込む場合の結果に一致する。また、横等方性半無限体表面($z=0$)における σ_z, w_z , およびパンチ押し付け力 P は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_z)_{z=0} &= \frac{\alpha_1 \xi (1-\zeta)}{\pi r_c b} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\cos n\phi}{\sin \phi} \\ (w_z)_{z=0} &= \varepsilon_o \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\infty} Z_n(\lambda) J_o(\lambda r) \alpha \lambda \\ P &= 2\pi \alpha_1 \xi (\zeta - 1) A_o \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(ii)$$

付図2 S_o^* と S_i^* の分布 ($G/E, r_i/r_o=0.5, h/r_o=2$)

付図3 C_d (カドミウム)における $\bar{P}$ の板厚による変化 ($r_i/r_o=0.5$)

式(ii)において本問題の無次元量に対応する $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$,

$(\bar{w}_z)_{z=0}$ を示せば次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\sigma}_z)_{z=0} &= \frac{r_o^2}{P} (\sigma_z)_{z=0} \\ &= -\frac{r_o^2}{2\pi^2 r_c b A_o} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\cos n\phi}{\sin \phi} \\ (\bar{w}_z)_{z=0} &= \frac{(w_z)_{z=0}}{\varepsilon_o} \end{aligned} \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\infty} Z_n(\lambda) J_o(\lambda r) d\lambda \quad \dots\dots\dots (iii)$$

したがって、これらの表示式は見かけ上異方性パラメータを含まず、パンチ形状のみに関係する。なお、式(iii)は式(i)に対応する等方性半無限体の $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$, $(\bar{w}_z)_{z=0}$ に一致している。