補強はりを有する柱の圧縮座屈後変形*

永井 健一^{*1}Postbuckling Deformations of Compressed Columns
Reinforced with a Beam

Ken-ichi NAGAI

Theoretical analyses are presented for postbuckling behavior of compressed columns reinforced with a beam, considering the effect of non-linearity due to a stretching of the beam, under three sets of boundary conditions. Introducing the coordinate function which is expressed with the product of the power series truncated with fourth order and the trigonometrical function to the Galerkin procedure, basic equations are reduced to coupled non-linear equations for unknown coefficients. The deflections of the column with the reinforcing beam are determined in each boundary conditions. Stabilities for the deformation of the columns are also examined. It is found that the reinforcing beam with immovable clamped ends and an appropriate supporting point gives high rigidity in the postbuckling state of the columns.

Key Words : Structural Analysis, Postbuckling, Column with a Stiffening Beam, Galerkin Method, Non-linear Deformation, Initial Deflection

1. 緒 言

細長い棒材が軽量構造要素の一つとして宇宙構造物、航空機、車両、ロボットなどの各種構造物に広く用いられている。これらに軸圧縮荷重が作用する場合、座屈荷重が強度の限界となる事は良く知られる。近年機械や構造物がより軽量化され、それにともない限界荷重近傍での使用が増加することを考慮すると、最小の部材で軽量化を図り、あわせて高い剛性を持つ要素の構成を考える必要がある。補強材により強化された柱の安定問題に関しいくつかの研究⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾があるが、柱をはりで支持した問題を各種境界条件のもとで、はりの非線形たわみ特性を考慮に入れて座屈後変形を解析した研究は十分でないように思われる。

本報では、柱の中間をはりにより支持し、補強した場合の、柱の圧縮座屈後変形問題を、はりの曲げ変形による非線形ばね効果を考慮にいれ、端が単純支持と固定を組み合わせた3種の境界条件のもとに理論的に解析した。なお本問題でははりを補強はりと呼ぶ事とする。解法では、境界条件を満足し柱の大変形を記述できる、

4次のべき級数と余弦関数の積の多項式による座標関数を導入し、基礎式にガレルキン法を適用することにより未定係数に関する連立三次方程式を導いた。ついでその安定性を吟味した。数値計算を各境界条件のもとに行い座屈荷重ならびに座屈後の変形を定めた。さらに補強はりの境界条件の相違や支持位置が座屈後の変形におよぼす影響を明らかにした。また本報で仮定した座標関数を用いた場合、べき級数の係数を変更するのみで各境界条件の場合に対応する実用上容易な方程式ならびに精度の良い解が得られることを示した。

2. 基礎式および境界条件

初期たわみを持つ柱の任意の位置を、はりにより支持し、一端に軸圧縮荷重 N_0 を作用させた場合の弾性安定問題を考える。いま図1に示すごとく、柱ならびにはりに座標軸 x_m, z_m ($m=1, 2$) を設定する。なお添字 $m=1$ は柱を、 $m=2$ ははりをそれぞれ意味するものとする。各部材の長さを L_m 、断面積を A_m 、断面二次モーメントを I_m 、ヤング率を E_m とする。また全たわみ、初期たわみをそれぞれ $W_m(x_m), W_{0m}(x_m)$ 、軸方向変位を $U_m(x_m)$ とする。さらに各部材の交差点までの距離を $x_m = s_m$ 、両部材間で変形により生ずる集中反力を Q_{mn} とする。例えば Q_{12} は柱がはりよ

* 昭和62年7月16日 第29回構造強度に関する講演会において講演、原稿受付 昭和62年7月27日。

*1 正員、群馬大学工業短期大学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1)。

り受ける力を意味する。なお軸変位に関し各部材の一端での変位を0とし、他端において、柱では軸圧縮荷重による変位を $-U_c$ 、補強はりでの初期変位を U_b 、これをまとめて U_{0m} とする。問題を十分に細長い部材の低次の曲げ変形に限定すると、せん断変形の影響は無視でき、これを支配する無次元化した基礎式は次式のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} L_m(w_m) &= (w_m - w_{0m})_{,\xi\xi\xi\xi} - n_m w_{m,\xi\xi} \\ &\quad - \delta(\xi_m - \eta_m) q_{mn} = 0 \\ n_m &= u_{0m} + \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{m,\xi}^2 - w_{0m,\xi}^2) d\xi_m \\ \text{柱の場合;} \quad &m=1, n=2 \\ \text{補強はりの場合;} \quad &m=2, n=1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

なおつぎの記号を導入している。

$$\left. \begin{aligned} [\xi_m, \eta_m] &= [x_m, s_m] / L_m, \quad r_m = (I_m / A_m)^{1/2} \\ [w_m, w_{0m}] &= [W_m, W_{0m}] / r_m \\ u_{0m} &= U_{0m} L_m / r_m^2, \quad n_m = N_m L_m^2 / E_m I_m \\ q_{mn} &= Q_{mn} L_m^3 / E_m I_m r_m \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上式で n_m は無次元の断面力(N_m は断面力)、 q_{mn} は互いの交差点 $\xi_m = \eta_m$ での無次元集中反力である。また $\delta(\xi_m - \eta_m)$ はディラックのデルタ関数、カンマの後の添字はその関数の微分を示す。 $(w_{m,\xi} = dw_m/d\xi_m)$ 軸変位に関する境界条件として、まず柱の場合、次式を考慮する。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0; \quad u_{01} = 0 \\ \xi_1 &= 1; \quad n_1 = -n_c \quad (u_{01} = -u_c) \end{aligned} \right\} \quad (3, a)$$

補強はりではつぎの場合を考える。

$$(I) \quad \xi_2 = 0; u_{02} = 0, \quad \xi_2 = 1; n_2 = 0 \quad (3, b)$$

$$(II) \quad \xi_2 = 0; u_{02} = 0, \quad \xi_2 = 1; u_{02} = u_b \quad (3, c)$$

図1 柱と補強はりの諸元と座標系

なお、(I)は初期軸変位を自由とする場合、(II)は指定する場合にそれぞれ対応する。さらに両者の交差点での集中反力とたわみの関係はつぎのごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1 \quad \text{および} \quad \xi_2 = \eta_2; \\ q_{12} &= -\alpha q_{21}, \quad w_2 - w_{02} = \beta (w_1 - w_{01}) \\ \alpha &= (E_2 I_2 r_2 / L_2^3) / (E_1 I_1 r_1 / L_1^3), \quad \beta = r_1 / r_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

上式で α は柱とはりの剛性に関する比例定数で、 β は断面二次半径の比である。さらにたわみに関する境界条件はつぎの三場合を考慮する。

$$\left. \begin{aligned} \xi_m &= 0; \quad \xi_m = 1; \quad (m=1, 2) \\ (SS)_m: &w_m = w_{m,\xi} = 0, \quad w_m = w_{m,\xi} = 0 \\ (CS)_m: &w_m = w_{m,\xi} = 0, \quad w_m = w_{m,\xi} = 0 \\ (CC)_m: &w_m = w_{m,\xi} = 0, \quad w_m = w_{m,\xi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

上記記号Sは単純支持、Cは固定の場合に対応する。

また、初期たわみ w_{0m} に関して上記の各場合に対して同一の条件を満足するものとする。

問題は各部材の諸量、初期変形、ならびに境界条件が指定された場合の柱の圧縮荷重 n_c とたわみ w_1 との関係を定めることにある。

3. 解 法

本解析では、まず補強はりの集中反力とたわみの関係から等価な非線形ばね定数を求め、さらにこのばねにより支持された柱の座屈問題を解く、ついで変形状態の安定性を吟味する。

まず問題の境界条件を考慮し、たわみ w_{0m}, w_m をつぎのごとく仮定する。

$$\left. \begin{aligned} [w_{0m}, w_m] &= \sum_j [a_{mj}, b_{mj}] \zeta_j(\xi_m) \\ &\quad (m=1, 2; j=1, 2, 3, \dots) \\ \zeta_j(\xi_m) &= f(\xi_m) \cos(j-1)\pi\xi_m \\ f(\xi_m) &= \sum_{p=1}^4 C_p \xi_m^p \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

なお a_{mj} は初期たわみによる既知定数、 b_{mj} は未定係数である。また $\zeta_j(\xi_m)$ は座標関数で $f(\xi_m)$ の4次までのべき級数と余弦関数の積で表してある。 C_p は定数で各境界条件に対応して表1に示す。なお $\zeta_j(\xi_m)$ は本問題の幾何学ならびに力学的境界条件を満たすことが確かめられる。

表1 べき級数 $f(\xi_m)$ の係数 C_p の値

Boundary Condition	C_1	C_2	C_3	C_4
(SS) _m	1	0	-2	1
(CS) _m	0	3	-5	2
(CC) _m	0	1	-2	1

つぎに、補強はりに関し解析を行う。はり は柱の変形にともない接触集中力 q_{21} をうける。この集中力によるたわみを求めるため式(1)にガレルキン法を適用すると $\zeta_i(\xi_m)$ に関する、つぎの条件式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 L_m(w_m) \zeta_i(\xi_m) d\xi_m &= 0 \\ (m=2; i=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上式に w_{02}, w_2 を代入し、積分を実行して整理すると b_{2j} に関するつぎの連立三次方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sum_j C_{ij}^{(2)} b_{2j} + \sum_{j,k,l} E_{ijk}^{(2)} b_{2j} b_{2k} b_{2l} \\ - F_i^{(2)} - q_{21} G_i^{(2)} &= 0 \\ (i, j, k, l=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただしつぎの記号を用いてある。

$$\left. \begin{aligned} C_{ij}^{(2)} &= A J_{ij} + K_{ij}, \quad E_{ijk}^{(2)} = (1/2) J_{ij} J_{kl} \\ F_i^{(2)} &= \sum_j K_{ij} a_{2j}, \quad G_i^{(2)} = \psi_{2i} \\ A &= u_b - (1/2) \sum_{j,k} J_{ik} a_{2j} a_{2k} \\ J_{ij} &= (1/2) \bar{\nu}^{(+)}_{ij1} + (1/4) (\bar{i}^2 + \bar{j}^2) \bar{\nu}^{(+)}_{ij0} \\ K_{ij} &= (1/2) \bar{\nu}^{(+)}_{ij2} + (\bar{i}^2 + \bar{j}^2) \bar{\nu}^{(+)}_{ij1} \\ &\quad + \bar{i} \bar{j} \bar{\nu}^{(-)}_{ij1} + (1/4) (\bar{i}^4 + \bar{j}^4) \bar{\nu}^{(+)}_{ij0} \\ \bar{\nu}^{(\pm)}_{ijk} &\equiv \nu_{k,j-i} \pm \nu_{k,j+i-2}, \quad \bar{i} \equiv (i-1)\pi \\ \nu_{ki} &\equiv \int_0^1 f_k^2 \cos i \pi \xi_m d\xi_m \\ f_k &\equiv d^k f(\xi_m) / d\xi_m^k, \quad \psi_{mj} \equiv \zeta_j(\eta_m) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

なお $f(\xi_m)$ は式(6)にて既に定義してある。上記各項はつぎに示す定積分 μ_{ij} の関数として与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{ij} &= \int_0^1 \xi_m^i \cos j \pi \xi_m d\xi_m = \delta_{j0} (i+1)^{-1} \\ &\quad + (1-\delta_{j0}) (1-\delta_{j0}) \{ (-1)^j \sum_{k=1}^j (-1)^{k+1} i P_{i-2k+1} (j\pi)^{-2k} \\ &\quad - (1/2) [1 - (-1)^i] (-1)^{j+1} i! (j\pi)^{-2j} \} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 $i P_j = i! / j!$ であり、 l の値は i が奇数の場合 $l = (i+1)/2$ 、また i が偶数の場合 $l = i/2$ とする。さらに J_{ij}, K_{ij} は添字 i, j に関して対称であることが確かめられる。

式(8)において u_b, w_{02}, q_{21} を与え、これを解くことにより未定係数 $b_{2j} (j=1, 2, 3, \dots)$ が定まり式(6)よりたわみ w_2 が決定される。ここで $\xi_2 = \eta_2$ における q_{21} とたわみの関係を次式のごとく置き換える。

$$\left. \begin{aligned} q_{21} &= \sum_k \gamma_{2k} [w_2(\eta_2) - w_{02}(\eta_2)]^k \\ (k=0, 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで γ_{2k} は等価ばね定数である。つぎに上式と式(4)を考慮に入れ柱の場合、 $\xi_1 = \eta_1$ では集中力はつぎのごとくなる

$$\left. \begin{aligned} q_{12} &= - \sum_k \gamma_{1k} [w_1(\eta_1) - w_{01}(\eta_1)]^k \\ \gamma_{1k} &= \alpha \beta^k \gamma_{2k}, \quad (k=0, 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

柱のたわみは、補強はりの場合と同様の解析を行い次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sum_j C_{ij}^{(1)} b_{1j} + \sum_{j,k} D_{ijk}^{(1)} b_{1j} b_{1k} \\ + \sum_{j,k,l} E_{ijk}^{(1)} b_{1j} b_{1k} b_{1l} - F_i^{(1)} &= 0 \\ (i, j, k, l=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} C_{ij}^{(1)} &= K_{ij} - n_c J_{ij} + S_{ij}, \quad D_{ijk}^{(1)} = S_{ijk} \\ E_{ijk}^{(1)} &= S_{ijk}, \quad F_i^{(1)} = \sum_j k_{ij} a_{1j} - S_i \\ S_i &= \psi_{1i} (\gamma_{10} - \gamma_{11} \sum_j \psi_{1j} a_{1j} \\ &\quad + \gamma_{12} \sum_{j,k} \psi_{1j} \psi_{1k} a_{1j} a_{1k} \\ &\quad - \gamma_{13} \sum_{j,k,l} \psi_{1j} \psi_{1k} \psi_{1l} a_{1j} a_{1k} a_{1l}) \\ S_{ij} &= \psi_{1i} \psi_{1j} (\gamma_{11} - 2\gamma_{12} \sum_k \psi_{1k} a_{1k} \\ &\quad + 3\gamma_{13} \sum_{k,l} \psi_{1k} \psi_{1l} a_{1k} a_{1l}) \\ S_{ijk} &= \psi_{1j} \psi_{1j} \psi_{1k} (\gamma_{12} - 3\gamma_{13} \sum_l \psi_{1l} a_{1l}) \\ S_{ijkl} &= \psi_{1i} \psi_{1j} \psi_{1k} \psi_{1l} \gamma_{13} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで軸圧縮荷重 n_c と軸変位 u_c との関係は式(1)よりつぎのごとくなる

$$\left. \begin{aligned} u_c &= n_c + \frac{1}{2} \sum_{k,l} J_{kl} (b_{1k} b_{1l} - a_{1k} a_{1l}) \\ (k, l=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

柱ならびに補強はりの諸元、初期変形量、境界条件が指定された場合上式を解くことにより圧縮荷重 n_c もしくは軸変位 u_c によるたわみ w_1 が決定され問題は解けたことになる。つぎに釣合い状態での安定性を吟味するために式(1)に慣性項を導入する。

$$L_1(w_1) + [1 + \epsilon \delta(\xi_1 - \eta_1)] w_{1, \tau\tau} = 0 \quad (15)$$

なお $\epsilon = M_e / \rho_1 A_1 L_1$ は $\xi_1 = \eta_1$ における柱の全質量に対する補強はりに等価な集中質量 M_e の比を示す。また τ は無次元の時間である。($\tau = (r_1 / L_1^2) (E_1 / \rho_1)^{1/2} t$; 時間) ここで解 w_1^* を次式のごとくおいて、上式に代入し上記と同様な操作により c_{1j} に関する連立の非線形常微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} w_1^* &= \sum_j [b_{1j} + c_{1j}(\tau)] \zeta_j(\xi_1) \\ (j=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

なお c_{1j} は釣合い状態からの微小な変動値を意味する。上記微分方程式で非線形項を省略し、 $c_{1j} = \tilde{c}_{1j} e^{i\omega t}$ (i :純虚数)とおいて代入すると $\tilde{c}_{1j}$ に関する齊次の方程式を得る。これより ω が定まる。ここで解 c_{1j} が時間とともに発散する場合不安定(ω :純虚数)で、発散を起こす前が安定境界となる($\omega=0$)。

4. 計算結果

解析結果にもとづき、代表的な例として、同一諸元を持つ柱と補強はりの場合($\alpha=\beta=1$)につき、各境界条件のもとで数値計算を行い座屈荷重、軸荷重とたわみの関係を明らかにした。なお式(8)、(13)の連立三次方程式の解法にはニュートン・ラプソンの反復法を用いて定めた。

4.1 柱の座屈荷重 まず解の精度におよぼす項数の影響を明らかにするため、補強はりならびに初期たわみのない柱の各境界条件における最小の座屈荷重 N_{cr} を項数を逐次増加して求めた。座屈荷重に対する無次元係数 n_{cr} を表2に示す。比較のため厳密解をあわせ示す⁽⁵⁾。これより最初の5~7項で実用上十分な精度を持つことがわかる。これより実際の計算は7項近似で行うことにした。ついで第2次の座屈荷重として $(SS)_1$ では $n_{cr}=39.48$ 、 $(CS)_1$ では $n_{cr}=59.74$ 、 $(CC)_1$ では $n_{cr}=80.95$ を得た。なおこれらの場合の無次元座屈変位 u_{cr} は n_{cr} と等しくなる。

4.2 集中反力による補強はりのたわみ 集中反力 q_{21} を変化させ、補強はりのたわみを各境界条件のもとで求めた。結果を図2に示す。縦軸は荷重 q_{21} 、横軸ははり中央のたわみ $w_{2c} = W_2(L_2/2)/r_2$ である。なお初期たわみ w_{01} は0とし、 u_b/u_{cr} は各境界条件における座屈変位に対する軸方向の初期引張変位の比を示す。図より反力 q_{21} とたわみの関係はいわゆる漸硬ばね特性を示す。さらに u_b/u_{cr} の増大とともに、同一たわみでの反力が大きくなる事がわかる。特に両端

固定 $(CC)_2$ の場合最も高く、両端単純支持 $(SS)_2$ では特に大きな変化はない。なお q_{21} が小なる範囲での曲線の傾きが境界条件、式(3b)の(1)におけるはりのばね定数に対応する。以下、補強はりのはりの中央で柱を支持するものとする。

4.3 柱の座屈後変形におよぼす補強はりの影響

両端固定の柱の中央を両端単純支持のはり中央で支持し、はりの初期軸変位を拘束しない場合と0の場合について、柱の荷重とたわみとの関係を求めた。結果を図3に示す。縦軸は軸荷重 n_c を、横軸は柱の中央のたわみ $w_{1c} = W_1(L_1/2)/r_1$ を示す。なお柱の初期たわみは、一様分布横荷重のもとでの変形形状を仮定し、中央でのたわみが $w_{01c}=0.01$ の場合を細線で、 $w_{01c}=0.1$ の場合を太い実線で示す。また $w_{01c}=0.01$ の場合の軸変位の大きさ u_c とたわみとの関係をも図4に示す。両図で、実線は安定な釣合い曲線で破線は不安定な釣合いを示す。曲線(1)は境界での軸変位を許し、(2)は許さない $u_b=0$ の場合の結果である。また①で示す曲線ははりの無い場合である。図3で①は、荷重の増大に伴い、座屈荷重近傍で急激にたわみが増大し、いわゆる強度の限界となる。(1)では、はりのばね効果により耐えうる荷重は $w_{01c}=0.01$ では座屈荷重の約1.2倍となるが、たわみははりが無い場合と同様となる。一方(2)では荷重が増大しても、急激な変形とはならず、軸荷重に抗する事が可能となる。その効果は支持しない場合と比べ、中央でのたわみ w_{1c} が1近傍では約1.3倍であるが、 w_{1c} が2から3へと増加するにつれて約1.5から1.7倍となる。

さらに軸変位を許さない(2)の状態では、はりのたわみに関する境界条件を変えた場合の結果を図5に示す。同一のたわみとなるまでの荷重は両端固定はり $(CC)_2$

表2 各場合の座屈荷重におよぼす項数の影響
 $n_{cr} = N_{cr}(L_1^2/EI_1)$

Number of Terms	Boundary Condition		
	(SS) ₁	(CS) ₁	(CC) ₁
1	9.8824	21.000	42.000
2	—	20.448	—
3	9.8703	20.241	39.760
4	—	20.225	—
5	9.8697	20.206	39.574
6	—	20.202	—
7	9.8696	20.197	39.523
Exact Results	9.8696	20.191	39.478

図2 各場合の補強はりのたわみ
 $w_{02} = 0, \eta_2 = 0.5$

で最も大きく、固定-単純支持 $(CS)_2$ 、ついで両端単純支持 $(SS)_2$ の順となる。その値は $w_{01c}=0.01$ について、 $w_{1c}=1$ では、それぞれはりの無い場合と比べ $(CC)_2$ の場合で1.9倍、 $(CS)_2$ で1.6倍、 $(SS)_2$ で1.2倍となる。

4・4 座屈後変形におよぼす柱の境界条件の影響

補強はりを両端単純支持 $(SS)_2$ 、初期軸変位を許さない(Ⅱ)、 $u_b=0$ とし、柱の境界条件を変えて、その変形を求めた。初期たわみが $w_{01c}=0.1$ の場合の荷重 n_c と柱中央のたわみを図6に示す。なお、縦軸上の丸印は、この場合の座屈荷重 n_{cr} を示す。柱中央に対し対

称な単純支持 $(SS)_1$ と固定 $(CC)_1$ の場合を比較すると、相互の座屈荷重の相違により、軸荷重は $(CC)_1$ の場合が $(SS)_1$ より $w_{1c}=1$ 近傍で約2.5倍ほど高くなるが、たわみの増加とともに、双方の荷重はほぼ同じ割合で増大する。 $(CS)_1$ の場合では両者とは異なる。図7には、初期たわみが $w_{01c}=0.1$ で、主に w_{1c} が1とした各場合の柱のたわみ形状 w_1 ならびに曲げモーメント $m_x \equiv -d^2(w_1 - w_{01})/d\xi_1^2$ の分布を示す。なお $(CS)_1$ の場合では w_{1c} が2と3の結果をも示す。 $(SS)_1$ と $(CC)_1$ では、 w_1 と m_x は柱中央に対し、対称性を持つが、 $(CS)_1$ の場合では、非対称性成分を有す

図3 柱の変形におよぼす補強はりの初期軸変位の影響 $\alpha = \beta = 1$, $(CC)_1, \eta_1 = 0.5$; $(SS)_2, \eta_2 = 0.5$

図4 柱の軸変位とたわみの関係 $(CC)_1, \eta_1 = 0.5$; $(SS)_2, \eta_2 = 0.5$

図5 柱の変形におよぼす補強はりの境界条件の影響 $(CC)_1, \eta_1 = 0.5$; (Ⅱ), $u_b = 0, \eta_2 = 0.5$

図6 各場合の柱の座屈後変形 $(SS)_2, (Ⅱ), u_b = 0, \eta_2 = 0.5$; $\eta_1 = 0.5$

図7 柱のたわみ形状ならびに曲げモーメント線図 $(SS)_2, (Ⅱ), u_b = 0, \eta_2 = 0.5$; $\eta_1 = 0.5$

る変形となっている。この場合のたわみならびに曲げモーメントの最大値は $\xi_1=0.7$ 近傍の単純支持側に生じる。この場合の変形を減少させるためには、補強はりの支持位置が問題となる。

4・5 座屈後変形におよぼす補強はりの支持位置の影響

補強はりの支持位置の変化が柱の変形におよぼす影響を明らかにするために、はりの境界条件を $(CC)_2$, (II) , $u_b=0$ とし, $(CS)_1$ と $(CC)_1$ について, 逐次支持位置を変えて変形を求めた。 $(CS)_1$ の場合の荷重と柱中央のたわみの関係を図8に示す。この場合, 支持位置が $\eta_1=0.2$ ないし 0.5 では荷重の増加に対したわみ

が急激に大となるが, $\eta_1=0.6$ から 0.7 の間では, たわみは小となる。軸荷重 n_c が45の場合のたわみ形状と曲げモーメント線図を図9に示す。はりの支持位置が柱の中央($\eta_1=0.5$)にある場合, 非対称変形が顕著となり, 対応する曲げモーメントも ξ_1 が0, 0.35ならびに0.75で大となる。しかし η_1 が0.6から0.7の間では, 変形は抑えられ, 対応する曲げモーメントも急激に減少する。その際の最大の補強効果は $\eta_1=0.64$ で与えられる。つぎに $(CC)_1$ の場合の結果を図10, 11に示す。図10より支持位置が境界に近い場合($\eta_1=0.8$), その補強効果は小さいが, 中央に至ると大となる。これは境界条件が中

図8 柱の変形におよぼす支持位置の影響
($CS)_1$: ($CC)_2$, (II) , $u_b=0$, $\eta_2=0.5$

図9 柱のたわみ形状ならびに曲げモーメント線図
($CS)_1$: ($CC)_2$, (II) , $u_b=0$, $\eta_2=0.5$

図10 柱の変形におよぼす支持位置の影響
($CC)_1$: ($CC)_2$, (II) , $u_b=0$, $\eta_2=0.5$

図11 柱のたわみ形状ならびに曲げモーメント線図
($CC)_1$: ($CC)_2$, (II) , $u_b=0$, $\eta_2=0.5$

中央に対して対称である事による。図11は $\eta_1=0.5$ と 0.6 の場合のたわみと曲げモーメントの分布である。 $\eta_1=0.6$ で、 n_c が約60を越えると、非対称変形が増大し、荷重のわずかな増加に対して大変形となり、十分な補強効果は得られない。一方、中央支持ではたわみ変形ならびに曲げモーメントが小なる事がわかる。

5. 結 言

補強はりを有する柱の圧縮座屈後変形問題を両部材が単純支持と固定を組合せた3種の境界条件のもとに、4次のべき級数と三角関数の積で示される座標関数を用い、基礎式にガレルキン法を適用して理論的に解析した。得られた結果を要約するとつぎのごとくなる。

(1) 補強はりの存在により、柱の座屈荷重は増加するが、初期軸方向変位を許す場合は、その荷重が最終荷重となる。一方、軸方向変位を許さない場合、有限変形のもとで最低次の座屈荷重以上の荷重に抗することが可能となる。なおその効果の大きいものは両端固定、固定-単純支持、両端単純支持の順となる。

(2) 柱の境界条件が中央に対して対称である場合、柱中央を支持することにより、補強効果を高めることが可能となる。一方、対称性を有しない固定-単純支

持の場合では、単純支持側に非対称変形を伴う大変形が生ずる。それ故、固定端から約64%の位置を支持することにより最大効果を得る。

(3) 本解析で用いた座標関数はべき級数の係数の変更のみで各境界条件に対する方程式が得られ、少ない近似項数で実用上十分な精度の解を得る。

最後に、本研究に対して有益な助言を頂いた工学部教授 長屋幸助先生、武田定彦先生に感謝の意を表す。また数値計算処理に協力された本学部学生 平本 立一君、図面作成に尽力された内山 茂 文部技官、本学部学生、根岸 修君、山越 二郎君に感謝する。

文 献

- (1) Temple, M.C., *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Struct. Div.* 103-4 (1977), 839.
- (2) Wong, K.C. and Temple, C., *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Struct. Div.* 108-6 (1982), 1623.
- (3) Catenacci, A., *Constr. Met.*, 37-2 (1985), 55.
- (4) Smith, E.A., *J. Struct. Eng.*, 115-5 (1985), 961.
- (5) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, (1961), McGraw-Hill.

討 論

〔質問〕 杉 山 吉 彦〔大阪府立大学工学部〕

(1) 結論(2)の後半に注目したい。補強がない場合の固定-単純支持の場合の長柱の一次座屈モードの最大たわみは、固定端より60%の位置にあり、二次座屈モードの節は64%の位置にある。したがって、微小変形座屈理論の立場からは、64%の位置に充分剛な拘束を加えることは、一次座屈を抑制し、二次座屈を誘導することを意味する(付1の討論参照)。貴研究の結論(2)の後半の64%の位置は、その物理的解釈として、二次座屈モードの節の位置と考えてよいのか。

〔回答〕 この場合の変形は柱の一端に作用した軸力と、その座屈変形に伴って生ずるはりの非線形復元力によるものであるため、単一の軸力による座屈変形とは異なる。そのため、座屈変形に及ぼす支持位置の影響を明らかにする際、一定軸力のもとで1次座屈モードの最大変位が最も小となるように支持位置を変化させて求めた。しかし、はりの曲げ剛性が極めて大で、その位置でのたわみを許さないものと解釈して、本解析を行い、座屈荷重の極小値を求めれば、ご指摘の節点の位置を決定することが可能となる。

〔質問〕 進 藤 明 夫〔神戸大学工学部〕

(1) 図3~6及び図8, 10において $W_{ic}>0$ があるのに $W_{ic}<0$ の結果はどのようにして出るのか。荷重が0のときから増分計算を行うと必然的に $W_{ic}>0$ の結果になるのではないか。また実際に生ずるとすればどのような条件の場合なのか。

(2) 図6において W_{ic} が大きくなると $(SS)_1$ より拘束の大きい $(CS)_1$ の方が荷重が小さくなるのは、図7のように $(CS)_1$ のたわみが大きくなるためか。 $(SS)_1$ において逆対称モードが生じて $(CS)_1$ より荷重が小さくなることはないのか。

〔回答〕 (1) 漸硬形の非線形復元力を持つ柱に軸荷重をうけると、座屈荷重にいたるまでたわみ w_1 が0である解のみを有し、荷重が座屈荷重を超えると、解が分岐し、 $w_1=0$ の他に、たわみの大きさが等しく $w_1>0$ と $w_1<0$ である三種の解となる。その場合 $w_1=0$ の解は不安定となる。一方初期たわみ w_{01} が存在する場合、荷重とたわみの関係は対称性を崩し、 $w_1>0$ と $w_1<0$ の解に分かれ、 $w_1>0$ 側では安定、 $w_1<0$ 側では安定ならびに不安定なつり合いとなる。本文の図はこれらの解を示したものである。物理的には軸荷重を0から逐次増大すると $w_1>0$ のみの変形が生じる。

なお $w_1 < 0$ の変形を生ずるためには十分な軸荷重のもとで、他の横荷重を与えれば $w_1 < 0$ の変形となり、その荷重を取去ってもその変形状態を保つ事が可能となる。

(2) 図6は柱を中央で支持し、その位置でのたわみを横軸に取ってある。 $(SS)_1$ や $(CC)_1$ では両端の境界条件が等しく、そのたわみも中央で最大となる。一方 $(CS)_1$ の場合、境界条件が異なり、必ずしも柱中央で最大変位とはならない。しかし $(SS)_1$ でも、

荷重が十分に大きく、柱が大変形を起こしかつ漸硬形のばねを持つはりにより低次の変形が規制された場合、また支持位置が中央よりずれた場合では非対称の変形や、高次の変形を伴ういわゆる二次座屈の可能性も生じてくる。本報では最低次座屈荷重の近傍の解を主に求めており、高次の変形問題は今後の課題と考えている。

(付1) 杉山, ほか2名, 機論, 43-376, A (昭52), 4435.

54巻500号, A編(昭63-4)正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
本田和男 ほか	621	脚注	下1	野尻	野尻
井関日出男 ほか	629	右	5	b_0	b_4
鈴木新一 ほか	766	左	5	$\left[\frac{D}{3.17}\right]^{5/3}$	$\left[\frac{D}{3.17}\right]^{5/2}$
多田幸生 ほか	839		Key Words	optimality	Optimality
	841	左	20	$[\sigma_{sp}(x)]^2$	$\{\sigma_{sp}(x)\}^2$