はり理論におけるせん断変形について*

加 鳥 裕 明^{*1}, 西 村 融^{*2}

Shear Deformation in Beam Theory

Hiroaki KATORI and Tōru NISHIMURA

The elementary beam theory is based on the Bernoulli-Euler hypothesis, in which no shear deformation is allowed to occur excluding the case of torsional deformation. This theory involves some theory to be improved. We consider here a refined beam theory taking into account the effect of shear deformation. This theory may be applied to any cross section of beam using the finite element method. Next, we asked for the stiffness matrix of an element of space framework taking into account the effect of the shear deformation. Some numerical examples of the present theory are shown and compared with values obtained by other methods.

Key Words: Elasticity, Structural Analysis, Beam Theory, FEM, Saint Venant's Problem, Shear Deformation

1. 緒 言

はり理論は Bernoulli-Euler の曲げ理論に端を発し、数多くの研究者の貴重な業績の蓄積によって体系化されてきた。しかしながら、そのはり理論はせん断変形を無視することから出発している。そのため実際の構造解析に適用する場合問題になることがある。せん断変形の影響は一般には小さいが、断面寸法に比べて長さが短いはりや固定端のように断面拘束の強い部分では影響が大きくなる。せん断変形の影響を考慮したはりの曲げに関する理論には、Timoshenko はり理論⁽¹⁾がある。また、Cowper⁽²⁾はせん断補正係数を三次元弾性論から精密に求めている。さらにねじりを受けるはりの理論には St. Venant のねじれ理論⁽³⁾があるが、まだ十分等統一的であるとはいえない。

ここでは、断面形不変、一樣断面直線はりに限ることとするが、それでもせん断力によるせん断変形、ねじりモーメントによる変形を考慮する実用的な方法が

確立されていない。また、せん断変形が重要な因子となる薄肉構造でも、いわゆるせん断流理論はせん断変形を一般には無視し、ただ閉断面でのねじれ変形だけを考慮するという変則を取っている。弾性論では St. Venant による一樣せん断力、一樣ねじりの解があるが、ねじりとせん断の連成について実用的な計算法が望まれる。

本論文では、まず St. Venant 理論による任意断面はりの一樣せん断・ねじりにおけるせん断応力分布を定めるため、warping とせん断たわみ・ねじれ角とに関する連立方程式を有限要素近似により導く。これを数値的に解いて、せん断剛性・ねじり剛性の行列を求める。これは一般にせん断たわみとねじれの連成を表すが、非対角項を消すように座標軸を定めてせん断中心が得られる。次に上で得られたせん断剛性を用いて、せん断変形を考慮した立体骨組要素の剛性行列を求める。これは曲げ変形のみを考慮した通常の表現を補正する形で与えられるが、これまでは平面骨組要素の場合だけが得られていた。この理論の検証として片持はりの静変形問題を解析する。また、振動問題についても解析を試みる。

* 昭和 63 年 3 月 14 日 東海支部第 37 期総会講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 10 月 12 日。

^{*1} 正員、名城大学附属高等学校 (〒453 名古屋市千川区新富町 1-3-16)。

^{*2} 正員、名城大学理工学部 (〒468 名古屋市天白区塩釜口 1-501)。

2. 理 論

2.1 有限要素法によるはりのせん断変形解析

一様断面直線はりに対して図1に示すように、図心軸を x 軸に取り、これに垂直に y, z 軸を右手系で定める。断面不変の仮定からひずみ成分は $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$ とし、横方向変位として

$$v = \eta - z\theta, \quad w = \zeta + y\theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 η, ζ, θ は x のみの関数

また、曲げ応力を通常のはり理論により片持ばり先端荷重の場合に対して直応力を $\sigma_x = x(\alpha y + \beta z)$ とすると、曲げモーメント M_y, M_z 、せん断力 Q_y, Q_z について次式が得られる。

$$xQ_y = M_z = \int \sigma_x y dA, \quad xQ_z = M_y = \int \sigma_x z dA$$

上式より

$$\begin{pmatrix} Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{yy} & I_{yz} \\ I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $I_{yy} = \int y^2 dA, I_{zz} = \int z^2 dA, I_{yz} = \int yz dA$

式(1)で与えられる断面変位に伴うべき軸方向変位 u は、軸方向ひずみ $\varepsilon_x = \partial u / \partial x = \sigma_x / E = x(\alpha y + \beta z) / E$ を積分して端条件を考えて

$$u = (x^2 - l^2)(\alpha y + \beta z) / 2E + \varphi(y, z) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 E はヤング率であるが断面不変の仮定を厳密に守っていくと $E' = E(1-\nu)/(1+\nu)(2-\nu)$ を用いなければならないことになるが、従来のはり理論の立場をとって E を使用することにする。

断面に生ずるせん断ひずみ γ_{xy}, γ_{xz} は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{xy}}{G} = \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\eta}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} + \frac{x^2 - l^2}{2E} \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial y} - z \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{\tau_{xz}}{G} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d\zeta}{dx} + y \frac{d\theta}{dx} + \frac{x^2 - l^2}{2E} \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + y \frac{d\theta}{dx} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

図1 座標系

ここで、 η, ζ を通常のはり理論によるたわみ η^*, ζ^* とせん断変形によるたわみ η', ζ' の和 $\eta = \eta^* + \eta', \zeta = \zeta^* + \zeta'$ とし、 $d\eta^*/dx + (x^2 - l^2)\alpha/2E = 0, d\zeta^*/dx + (x^2 - l^2)\beta/2E = 0$ と書き、 ϕ を次式のように定義する。

$$\phi = \eta + y \frac{d\eta'}{dx} + \zeta + z \frac{d\zeta'}{dx} \quad \dots\dots\dots (5)$$

応力平衡条件 $\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + \partial \tau_{xz} / \partial z = 0$ に各応力を代入し整理すると ϕ に関する基礎式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{G}(\alpha y + \beta z) \quad \dots\dots\dots (6)$$

境界条件は、図2に示すようなはりの表面における無応力の条件より求められる。

$$\tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

上式より

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (y^2 + z^2) \frac{d\theta}{dx} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 n は境界の外向きに立てた法線方向を表し s は接線方向を表す。

ϕ が定まれば式(5)から $d\eta'/dx, d\zeta'/dx$ を求めるため曲げ変位と独立となるための条件 $\int \phi dA = \int \phi y dA = \int \phi z dA = 0$ を用いて

$$\begin{pmatrix} \int \phi y dA \\ \int \phi z dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{yy} & I_{yz} \\ I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式よりせん断変形が求まる。

前述の問題を仮想仕事の原理を用い、有限要素法による定式化を行う。 x 軸方向単位長さ当たりの仮想仕事を考えると、仮想内力仕事は、

$$\begin{aligned} & \int (\bar{\tau}_{xy} G \gamma_{xy} + \bar{\tau}_{xz} G \gamma_{xz}) dA \\ &= \int \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{d\theta}{dx} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & y \\ -z & y & y^2 + z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{d\theta}{dx} \end{pmatrix} dA \quad \dots\dots\dots (10 \cdot a) \end{aligned}$$

図2 n, s の方向

仮想外力仕事は,

$$\int \bar{\phi}(\alpha y + \beta z) dA + \frac{d\bar{\eta}'}{dx} Q_y + \frac{d\bar{\zeta}'}{dx} Q_z + \frac{d\bar{\theta}}{dx} M_x \\ = \int \bar{\phi}(\alpha y + \beta z) dA + \frac{d\bar{\theta}}{dx} M_x \quad (10 \cdot b)$$

ここで, $\bar{}$ は仮想量, $\sim$ は転置を表す.

ϕ を有限要素分割により表現しなおして,

$$\phi = \sum N_i \phi_i = (N_1, N_2, \dots) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = N\phi \quad (11)$$

ここで, ϕ は節点値ベクトル, $N(y, z)$ は形状関数であり, $\partial\phi/\partial y = N_{,y}\phi$, $\partial\phi/\partial z = N_{,z}\phi$ と書くことにすると式(10)の関係は

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi} \\ \frac{d\theta}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{d\theta}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\phi} \\ \frac{d\theta}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで,

$$A = \int_A (\bar{N}_{,y} G N_{,y} + \bar{N}_{,x} G N_{,x}) dA$$

$$B = \int_A (-\bar{N}_{,y} z + \bar{N}_{,x} y) G dA$$

$$C = \int_A (y^2 + z^2) G dA$$

$$D = \int_A (\bar{N}_y, \bar{N}_z) dA \cdot I^{-1}$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{yy} & I_{yz} \\ I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \frac{d\theta}{dx} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} A & B \\ \bar{B} & C \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{pmatrix} \quad (13)$$

せん断たわみは式(9), (11)より

$$\begin{pmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \end{pmatrix} = I^{-1} \begin{pmatrix} \int \phi y dA \\ \int \phi z dA \end{pmatrix} = I^{-1} \begin{pmatrix} \int_A y N dA \\ \int_A z N dA \end{pmatrix} \phi \\ = \bar{D} \phi$$

したがって

$$\begin{pmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \\ d\theta/dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ d\theta/dx \end{pmatrix} \quad (14)$$

せん断たわみとせん断力の関係は式(13), (14)より

$$\begin{pmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \\ d\theta/dx \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{pmatrix} \quad (15)$$

ただし,

$$G = \left[\begin{pmatrix} \bar{D} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

なおせん断応力分布は

$$\begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} N_{,y} & -z \\ N_{,x} & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ d\theta/dx \end{pmatrix} \quad (16)$$

によって表されるから前述の式と結びつけてせん断力あるいはせん断たわみによって表すこともできる。これまでの原点(図心)における変位, 作用力を (y_1, z_1) 点に変換すると

$$\begin{pmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{y1} \\ Q_{z1} \\ M_{x1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \\ d\theta/dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\eta'_1/dx \\ d\zeta'_1/dx \\ d\theta_1/dx \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} Q_{y1} \\ Q_{z1} \\ M_{x1} \end{pmatrix} = G_1 \begin{pmatrix} d\eta'_1/dx \\ d\zeta'_1/dx \\ d\theta_1/dx \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d\eta'_1/dx \\ d\zeta'_1/dx \\ d\theta_1/dx \end{pmatrix} \\ = G_1^{-1} \begin{pmatrix} Q_{y1} \\ Q_{z1} \\ M_{x1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

ここで,

$$G_1 = \bar{T} G T \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

G_1 または G_1^{-1} の (1, 3), (2, 3) 要素を零にするように (y_1, z_1) 点を定めることによりせん断中心が決定される.

$$y_1 = \frac{G_{11}G_{23} - G_{12}G_{13}}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}, \quad z_1 = \frac{G_{12}G_{23} - G_{22}G_{13}}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2} \quad (18)$$

ただし, G_{ij} は G の ij 要素である.

図 3 座標軸の変換

次に薄肉断面部材について考える。簡単のため要素分割ののち、軸力に耐える面積を節点に集中し、これを結ぶパネルはせん断流のみに耐えるものとする。

変位、直応力は、

$$\left. \begin{aligned} v &= \eta - z\theta, \quad w = \xi + y\theta, \quad \sigma_x = x(\alpha y + \beta z) \\ s \text{ 方向変位 } V &= v \cos \alpha_k + w \sin \alpha_k \\ \text{軸方向変位 } u_i &= (x^2 - l^2)(\alpha y_i + \beta z_i)/2E + \varphi_i \\ &= -\left(\frac{d\eta^*}{dx} y_i + \frac{d\xi^*}{dx} z_i\right) + \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $\cos \alpha_k = (y_j - y_i)/b_k$, $\sin \alpha_k = (z_j - z_i)/b_k$

$$b_k = \sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

節点 ij を結ぶパネルのせん断変形として

$$b_k \gamma_k = \left(\frac{dV}{dx} + \frac{u_j - u_i}{b_k}\right) b_k = \phi_j - \phi_i + \rho_k \frac{d\theta}{dx} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\rho_k = y_i z_j - y_j z_i$$

ゆえにせん断流は

$$q_k = (\tau t)_k = \left(\frac{Gt}{b}\right)_k \left(\phi_j - \phi_i + \rho_k \frac{d\theta}{dx}\right)$$

これを行列表示すると

$$q = H(a\phi + b d\theta/dx) \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 H は $(Gt/b)_k$ を要素とする対角行列、 b は ρ_k を要素とする列行列、 a は 0, 1, -1 を要素とする行列でパネル k の両端が ij 節点に接続している場合 k 行 j 列に 1, k 行 i 列に -1 が入る。

釣合い式 $dP_i/dx = d(\sigma_i A_i)/dx = \sum q_{ij}$ およびねじりモーメント $M_x = \sum (Gbt^3/3)_k d\theta/dx + \sum \rho_k q_k$ より

図 4 薄肉断面部材

図 5 部材力

$$\begin{pmatrix} \bar{a}H\bar{a} & \bar{a}H\bar{b} \\ \bar{b}H\bar{a} & \bar{b}H\bar{b} + c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ d\theta/dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで $c_0 = \sum (Gbt^3/3)_k$

一方、せん断たわみは

$$\begin{pmatrix} d\eta'/dx \\ d\xi'/dx \end{pmatrix} = I^{-1} \begin{pmatrix} \sum \phi_i y_i A_i \\ \sum \phi_i z_i A_i \end{pmatrix} = \bar{D}\phi$$

したがって、せん断たわみとせん断力の関係は

$$\begin{pmatrix} d\eta'/dx \\ d\xi'/dx \\ d\theta/dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ d\theta/dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}H\bar{a} & \bar{a}H\bar{b} \\ \bar{b}H\bar{a} & \bar{b}H\bar{b} + c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (23)$$

これは、中実材と全く同じ形式〔式(15)〕で表され、せん断中心も同様に求められる。

2.2 せん断変形を考慮した立体骨組要素の剛性行列

図 5 に示すような要素 ij を考える。その節点を i および j とし、長さを l とする。部材力 S は釣合いを考えて図 5 に示すような 6 成分をとる。すなわち

$$s = \{T, M_x, M_y, Q_y, Q_z, M_x\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

曲げによるひずみエネルギーとせん断力によるひずみエネルギーを考えると

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_x}{E} dA dx &= \bar{S} \begin{pmatrix} f_{B1} & 0 \\ 0 & f_{B2} \end{pmatrix} S \\ f_{B1} &= \begin{pmatrix} l/E A & 0 & 0 \\ 0 & l \begin{pmatrix} I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f_{B2} &= \begin{pmatrix} \frac{l^3}{12E} \begin{pmatrix} I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \int \begin{pmatrix} \bar{Q}_y \\ \bar{Q}_z \\ \bar{M}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\eta'/dx \\ d\xi'/dx \\ d\theta/dx \end{pmatrix} dx &= \begin{pmatrix} \bar{Q}_y \\ \bar{Q}_z \\ \bar{M}_x \end{pmatrix} G^{-1} l \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{pmatrix} \\ &= \bar{S} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f_{S2} \end{pmatrix} S \\ f_{S2} &= G^{-1} l \end{aligned}$$

部材力 S に対応する部材変形を s として、フレキシビリティ行列を f とすると、これは曲げ変形によるもの f_B とせん断変形によるもの f_S の和で与えられる。

$$\tilde{S}s = \tilde{S} \begin{pmatrix} f_{B1} & 0 \\ 0 & f_{B2} + f_{S2} \end{pmatrix} S = \tilde{S}fS \quad \dots\dots\dots (25)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} s &= fS, \quad S = f^{-1}s = ks \\ k &= f^{-1} = \begin{pmatrix} f_{B1}^{-1} & 0 \\ 0 & (f_{B2} + f_{S2})^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

要素の節点変位を r として要素両端の 3 軸方向変位と 3 軸まわりの回転をとり, 部材変形 s を書き表すと

$$s = ar \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで

$$r = \{u_i \ v_i \ w_i \ p_i \ q_i \ r_i : u_j \ v_j \ w_j \ p_j \ q_j \ r_j\}$$

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -l/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -l/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & l/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに, r に関する要素剛性行列は

$$K_e = \bar{a}ka \quad \dots\dots\dots (28)$$

式(28)はせん断変形を考慮に入れた要素剛性行列である。

2・3 はりの振動解析 せん断変形を考慮したはり要素の剛性行列が求められれば, それを用いてはりの振動解析を容易に行うことができる。すなわち, 自由振動の振動数方程式は

$$|K - p^2 M| = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで, K, M は構造全体の剛性行列および質量行列, p は固有円振動数である。質量行列に集中質量行列を考えると M は対角行列となり, 分布質量系⁽⁴⁾に比べて記憶容量は少なくなる。また運動方程式を解く場合にも逆行列の演算も容易で能率的となる。よってここでは節点に集中質量と集中慣性能率を考え, しかも慣性能率は 3 軸まわりみな同じ球状体にとることとする。具体的には部材質量は折半し, 慣性能率は材軸まわりのものを折半する。

3. 数値計算例

2章で説明した手法を用いて, 図 6(a), (b)に示すような薄肉箱形断面および矩形断面を有する片持ばりの変形解析および振動解析を行った。計算に用いた材料定数は, $E=205.9$ GPa, $G=79.4$ GPa, 密度 $\rho=7.86$ g/cm³ とした。

3・1 はりの曲げ変形解析 図 6 の 2 種類の片持ばりの先端に集中荷重を加えたときのたわみをはり理論との比較で図 7(a), (b)に示す。また, Timoshenko 理論, Cowper の方法, はり理論および本法によっ

て得られる最大たわみを表 1 に示す。Timoshenko の理論はせん断変形の影響を矩形断面では大きめに, 薄肉箱形断面ではやや小さめに評価している。Cowper の方法と本法とはほぼ近い値を示している。

3・2 自由振動解析 図 6(a)に示す薄肉箱形断面の片持ばりの動的解析として自由振動解析を行う。曲げ振動, ねじり振動および縦振動について, はり理論値, St. Venant のねじり理論値および棒理論値と本

(a) 薄肉箱形断面ばり

(b) 矩形断面ばり

図 6 解析モデル

表 1 最大たわみの比較

Cross Sections Theory	Box Section (mm)	Rectangle (mm)
Beam Theory	1.1477×10^{-2}	1.9047×10^{-5}
Timoshenko	1.4049×10^{-2}	3.7565×10^{-5}
Cowper	1.4826×10^{-2}	3.3579×10^{-5}
Present Theory	1.5092×10^{-2}	3.3816×10^{-5}

(a) 薄肉箱形断面ばり

(b) 矩形断面ばり

図 7 変形図

図 8 はりの長さが曲げ振動数におよぼす影響

法による値との比較を行う。また、集中質量行列と分布質量行列についても調べる。

曲げ振動の結果を表 2 に示す。本法とはり理論の相対的差異は、第一次振動数については y 軸 (v), z 軸 (w) 方向の曲げ振動ともに約 20 % 生じており、高次の振動数ほどその差異は大きくなる。また、集中質量行列は分布質量行列よりも常に低い値を示す。はりの長さが長くなると、せん断変形の影響は小さくなると考えられる。そこではりの長さを種々変えて計算した

表 2 曲げ振動数 (Hz)

Mode	Beam Theory	Present Theory	
		Consist.Mass	Lumped Mass
1	w	1190.4	975.7
	v	1750.5	1428.7
2	w	7460.9	3665.7
	v	10970.7	5337.8
3	w	20892.8	7537.2
	v	30721.4	10941.1

表 3 ねじり振動数 (Hz)

Mode	Torsion Theory	Present Theory	
		Consist.Mass	Lumped Mass
1	3178.0	2589.0	2572.7
2	9534.0	7941.9	7542.4
3	15890.1	13828.0	11999.3

表 4 縦振動数 (Hz)

Mode	Bar Theory	Present Theory	
		Consist.Mass	Lumped Mass
1	5117.1	5126.6	5102.1
2	15351.3	15747.4	14960.0
3	25585.4	27425.8	23799.7

結果をはり理論との比で図 8 に示してある。長さが長くなるほどはり理論値と本法による値は接近している。

次にねじり振動の結果を表 3 に示す。第一次振動数で約 20 % の相対的差異があるが、高次の振動数になるほどその差異は小さくなる。集中質量行列と分布質量行列の差は第一次振動数ではほとんどない。

縦振動の結果を表 4 に示す。棒の理論値と本法の値はほぼ一致している。集中質量行列と分布質量行列の値はほぼ近い値を示している。

4. 結 論

はり理論は、いわゆる一次元の棒理論であり実用性が最大の特徴であるが、本理論ははり理論の特徴を保ちながら精密化の一つの問題であるせん断変形問題についての実用的計算法を示すことができた。せん断変形を考慮した立体骨組要素の剛性行列を求めることができたが、これは曲げ変形のみを考える通常の表現を補正する形で与えられるがこれまでは平面骨組要素の場合だけが得られていた。片持ばりの静的・動的挙動の解析から、静変形について最大たわみは Cowper の理論値とほぼ一致しており、振動解析においては誘導

した集中質量行列は分布質量行列とともにほぼ妥当な結果が得られた。

文 献

- (1) Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, W. Jr., *Vibration Problems in Engineering*, 4th Ed., (1974),

John Wiley & Sons.

- (2) Cowper, G. R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 33-6 (1966), 335.
(3) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3rd Ed., (1970), McGraw-Hill.
(4) 川井, マトリックス法振動および応答, コンピュータによる構造工学講座, (昭 46), 培風館.