円柱状介在物と円環状き裂を有する弾性体のねじり衝撃応答*

神 野 義 久*¹, 進 藤 裕 英*²

Torsional Impact Response of a Flat Annular Crack in an Infinite Elastic Medium with a Cylindrical Inclusion

Yoshihisa KANNO and Yasuhide SHINDO

This paper is concerned with the torsional impact response of an infinite medium with a flat annular crack around an infinitely long cylinder with different elastic constants. Laplace and Hankel transforms are used to reduce the problem to the solution of a set of triple integral equations in the Laplace transform domain. These equations are solved by using an integral transform technique and the result is expressed in terms of a singular integral equation of the first kind. The dynamic stress intensity factor is obtained numerically, and the effects of the geometrical configurations and the material properties of the composite material on the dynamic stress intensity factor are shown graphically. Two limiting cases, in which the surface of the cylindrical cavity is stress free and is fixed, are included.

Key Words: Elasticity, Torsional Impact Response, Composite Materials, Cylindrical Inclusion, Annular Crack, Integral Transform, Singular Integral Equation, Dynamic Stress Intensity Factor

1. 緒 言

複合材料の開発に伴い、構造材として使用される複合材の安全性評価のための破壊力学的研究が盛んに行われ、最近の中心課題となっている⁽¹⁾。しかし、これらの多くは静的負荷に関するものであり、衝撃負荷に関するものは極めて少ない。また、実際の機械・構造物は衝撃負荷を受けることが多く、しかも初期欠陥近傍の動的特異応力は相当する静的負荷の場合と比べかなり大きくなることが示されている⁽²⁾⁽³⁾。このため、衝撃荷重の使用を受ける複合材に対する各種破壊形態の力学的挙動の解明が問題となり、ねじり衝撃応答問題に関して、上田ら⁽⁴⁾は、円板状界面き裂を有する層状複合材モデルを設定し、動的応力拡大係数を理論解析した。さらに姫宮ら⁽⁵⁾はバナナ状欠陥の数値モデルとして評価された円環状き裂を取り上げ、ねじり衝撃を受ける界面き裂先端近傍の動的特異応力に及ぼす物質特性の影響を理論的に検討した。

そこで本報では、異種弾性円柱に接合された界面に

垂直な円環状き裂を有する弾性体の複合材モデルを設定し、き裂面にねじり衝撃負荷が作用する場合の動的応力拡大係数を理論解析した。解析は、ラプラス変換およびフーリエ・ハンケル変換を用いて三領域積分方程式を導き、これを第1種特異積分方程式に変換して解く方法によった。また、積分核を詳細に評価し、積分方程式の解を第1種チェビシェフ多項式で展開して高精度な解を得た。ラプラス逆変換には数値的方法⁽⁶⁾を採用し、動的応力拡大係数の経時挙動特性を静的な場合と比較して明らかにした。

2. 基礎式と問題の呈示

図1に示すように、横弾性係数 μ_1 、質量密度 ρ_1 、半径 a の無限円柱から成る異種弾性体に接合された内外半径 b, c の円環状き裂を有する材料定数 μ_2, ρ_2 の無限弾性体から成る複合材モデルを設定する。円柱座標 (r, θ, z) を採用し、 z 軸を円柱およびき裂の対称軸にとる。

軸対称ねじり変形の場合、 r, θ, z 方向の変位 $(u_r)_j, (u_\theta)_j, (u_z)_j$ は

$$\left. \begin{aligned} (u_r)_j &= (u_z)_j = 0 \\ (u_\theta)_j &= (u_\theta)_j(r, z, t) \quad (j=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 t は時間、下添字 $j=1, 2$ はそれぞれ無限円柱

* 昭和 63 年 3 月 30 日 第 65 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 11 月 9 日。

*¹ 正員、トヨタ自動車(株) (〒471 豊田市トヨタ町 1)。

*² 正員、東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻字青葉)。

および円柱状空かを有する無限体を示すものとする。

式(1)に相当する応力場は

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_j(r, z, t) &= \mu_j \left\{ \frac{\partial(u_\theta)_j}{\partial r} - \frac{1}{r}(u_\theta)_j \right\} \\ (\tau_{z\theta})_j(r, z, t) &= \mu_j \frac{\partial(u_\theta)_j}{\partial z} \quad (j=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

$(u_\theta)_j$ に関する運動方程式を求めると

$$\frac{\partial^2(u_\theta)_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)_j}{\partial r} - \frac{1}{r^2}(u_\theta)_j + \frac{\partial^2(u_\theta)_j}{\partial z^2} = \frac{1}{c_{2j}^2} \frac{\partial^2(u_\theta)_j}{\partial t^2} \quad (j=1, 2) \dots\dots (3)$$

ここに, $c_{2j} = (\mu_j/\rho_j)^{1/2}$ はせん断波伝ば速度である。き裂面にねじり衝撃負荷が作用する場合を考えると, $z=0$ 上の境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} (u_\theta)_1(r, 0, t) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a) \dots\dots (4) \\ (\tau_{z\theta})_2(r, 0, t) &= -\tau_0(r/c)H(t) \quad (b < r < c) \\ (u_\theta)_2(r, 0, t) &= 0 \quad (a \leq r \leq b, c \leq r) \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

ここに, τ_0 は応力の次元を有する定数, $H(t)$ はヘビサイドの単位段階関数である。また複合材界面の完全接合を仮定すると, $r=a$ に沿う連続条件式は

$$(u_\theta)_1(a, z, t) = (u_\theta)_2(a, z, t) \dots\dots (6)$$

$$(\tau_{r\theta})_1(a, z, t) = (\tau_{r\theta})_2(a, z, t) \dots\dots (7)$$

3. 解 析

ラプラス変換および逆変換を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} f^*(p) &= \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} f^*(p)e^{pt}dp \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

ここに, Br はブロムウィッチの積分路である。式(3)にラプラス変換を施すと

$$\frac{\partial^2(u_\theta)_j^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)_j^*}{\partial r} - \frac{1}{r^2}(u_\theta)_j^* + \frac{\partial^2(u_\theta)_j^*}{\partial z^2} = -\frac{1}{c_{2j}^2} (u_\theta)_j^*$$

図 1 円環状き裂を有する複合材

$$= \frac{p^2}{c_{2j}^2} (u_\theta)_j^* \quad (j=1, 2) \dots\dots (9)$$

式(9)を積分変換法により解くと

$$\left. \begin{aligned} (u_\theta)_1^* &= \int_0^\infty C(s, p) I_1(\gamma_1 r) \sin(sz) ds \\ (u_\theta)_2^* &= \int_0^\infty A(s, p) J_1(sr) e^{-\gamma_2 z} ds \\ &\quad + \int_0^\infty B(s, p) K_1(\gamma_2 r) \sin(sz) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

ここに, $J_n(\)$ は n 次の第 1 種ベッセル関数, $I_n(\)$ は n 次の第 1 種変形ベッセル関数, $K_n(\)$ は n 次の第 2 種変形ベッセル関数である。また, $A(s, p)$, $B(s, p)$, $C(s, p)$ は境界条件式および連続条件式より決定される未知関数であり, 無限遠における変位および応力が零の条件を考慮した。上式中, γ_j は

$$\gamma_j(s, p) = (s^2 + p^2/c_{2j}^2)^{1/2} \quad (j=1, 2) \dots\dots (11)$$

境界条件式(4), (5)および連続条件式(6), (7)にラプラス変換を施すと

$$(u_\theta)_1^*(r, 0, p) = 0 \quad (0 \leq r \leq a) \dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{z\theta})_2^*(r, 0, p) &= -\tau_0(r/c) \frac{1}{p} \quad (b < r < c) \\ (u_\theta)_2^*(r, 0, p) &= 0 \quad (a \leq r \leq b, c \leq r) \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

$$(u_\theta)_1^*(a, z, p) = (u_\theta)_2^*(a, z, p) \dots\dots (14)$$

$$(\tau_{r\theta})_1^*(a, z, p) = (\tau_{r\theta})_2^*(a, z, p) \dots\dots (15)$$

解(10)は境界条件式(12)を自動的に満足している。

式(1), (2), (10)を考慮し, 境界条件式(13)を用いると, 次の未知関数 $A(s, p)$ に関する 3 領域積分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^\infty \gamma_2 A(s, p) J_1(sr) ds - \int_0^\infty s B(s, p) K_1(\gamma_2 r) ds \\ &= -\frac{\tau_0 r}{c \mu_0 p} \quad (b < r < c) \\ &\int_0^\infty A(s, p) J_1(sr) ds = 0 \quad (0 \leq r \leq b, c \leq r) \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

また, 式(14), (15)を考慮すると未知関数 $B(s, p)$ は $A(s, p)$ によって次のように表される。

$$\begin{aligned} &\delta(s, p) B(s, p) \\ &= -\frac{2}{\pi} s \left\{ \frac{1}{I_1(\gamma_1 a)} \int_0^\infty A(\eta, p) \frac{\eta}{\eta^2 + \gamma_2^2} J_2(\eta a) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0 \gamma_1 I_2(\gamma_1 a)} \int_0^\infty A(\eta, p) \frac{\eta}{\eta^2 + \gamma_2^2} J_2(\eta a) d\eta \right\} \end{aligned} \dots\dots (17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= \mu_1/\mu_2 \\ \delta(s, p) &= \frac{K_1(\gamma_2 a)}{I_1(\gamma_1 a)} + \frac{\gamma_2 K_2(\gamma_2 a)}{\mu_0 \gamma_1 I_2(\gamma_1 a)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

3 領域積分方程式(16)を解くため, 次式で定義され

る新しい未知関数 $\varphi^*(\xi, p)$ を導入する。

$$A(s, p) = - \int_0^c \xi \varphi^*(\xi, p) J_2(s\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (19)$$

式(19)を式(16)に代入し、式(17)、(18)を考慮すると、次の補足の条件式に従う第1種特異積分方程式が得られる。

$$\int_0^c \xi \varphi^*(\xi, p) [R_0(r, \xi) + R_1(r, \xi, p) + R_2(r, \xi, p)] d\xi = - \frac{\tau_0 r}{c \mu_2 p} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\int_0^c \varphi^*(\xi, p) d\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここに

$$R_0(r, \xi) = \int_0^\infty s J_2(s\xi) J_1(sr) ds \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$R_1(r, \xi, p) = \int_0^\infty \{ \gamma_2(s, p) - s \} J_2(s\xi) J_1(sr) ds \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} R_2(r, \xi, p) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^2 \beta_1(r, \xi, p, s)}{\gamma_1 \gamma_2 \beta_2(p, s)} ds \\ \beta_1(r, \xi, p, s) &= \{ -\mu_0 \gamma_1 I_1(\gamma_2 a) I_2(\gamma_1 a) \\ &\quad + \gamma_2 I_1(\gamma_1 a) I_2(\gamma_2 a) \} K_1(\gamma_2 r) K_2(\gamma_2 \xi) \\ \beta_2(p, s) &= \mu_0 K_1(\gamma_2 a) I_2(\gamma_1 a) + (\gamma_2 / \gamma_1) I_1(\gamma_1 a) \\ &\quad \cdot K_2(\gamma_2 a) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

式(22)のフレドホルム核 $R_0(r, \xi)$ はコーシーおよび対数特異核を有しており、これらを分離すると

$$\xi^2 R_0(r, \xi) = \frac{r}{\pi(\xi - r)} - \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi - r)}{d} \right| + M_0(r, \xi) \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 $M_0(r, \xi)$ は特異性を持たないフレドホルム核で

$$\left. \begin{aligned} M_0(r, \xi) &= M_{01}(r, \xi) \quad (\xi < r) \\ &= M_{02}(r, \xi) \quad (\xi > r) \\ M_{01}(r, \xi) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{r^2}{\xi + r} - 2 \right) E(\xi/r) \\ &\quad + \frac{r \{ (r/\xi) E(\xi/r) - 1 \}}{\pi(\xi - r)} + \frac{4K(\xi/r)}{\pi} \\ &\quad + \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi - r)}{d} \right| \\ M_{02}(r, \xi) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{r}{\xi + r} - 2 \frac{\xi}{r} \right) E(r/\xi) \\ &\quad + \frac{r \{ E(r/\xi) - 1 \}}{\pi(\xi - r)} + \frac{2(\xi/r) K(r/\xi)}{\pi} \\ &\quad + \frac{3}{2\pi} \log \left| \frac{2(\xi - r)}{d} \right| \\ d &= c - b \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

上式中、 $K(\quad)$ 、 $E(\quad)$ はそれぞれ第1種、第2種完全だ円積分である。

次に数値的評価を容易にするため積分核 $R_1(r, \xi)$ 、 $R_2(r, \xi)$ を評価する。まず、複素積分法⁽⁷⁾を用いて、積分核 $R_1(r, \xi)$ を書き換えると

$$\left. \begin{aligned} R_1(r, \xi, p) &= R_{11}(r, \xi, p) \quad (\xi < r) \\ &= R_{12}(r, \xi, p) \quad (\xi > r) \\ R_{11}(r, \xi, p) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [s - \{s^2 - (p/c_{22})^2\}^{1/2}] \\ &\quad \times I_2(s\xi) K_1(rs) ds \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^{p/c_{22}} s I_2(s\xi) K_1(sr) ds \\ R_{12}(r, \xi, p) &= - \frac{2}{\pi} \int_{p/c_{22}}^\infty [s - \{s^2 - (p/c_{22})^2\}^{1/2}] \\ &\quad \times K_2(s\xi) I_1(rs) ds \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \int_0^{p/c_{22}} s K_2(s\xi) I_1(rs) ds + I_{1e} \\ I_{1e} &= (p/c_{22}) r / \xi^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

さらに、式(24)の $R_2(r, \xi, p)$ を書き換えると

$$\left. \begin{aligned} R_2(r, \xi, p) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{s^2 \beta_1(r, \xi, p, s)}{\gamma_1 \gamma_2 \beta_2(p, s)} \right. \\ &\quad \left. - A_0(r, \xi, s, p) \right] ds \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_0(r, \xi, s, p) ds \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_0(r, \xi, s, p) &= \frac{1 - \mu_0}{2(1 + \mu_0)} a_1 e^{-(r + \xi - 2a)s} \\ &\quad + \frac{1 - \mu_0}{2s(1 + \mu_0)} a_2 \{ e^{-(r + \xi - 2a)s} - e^{-\delta_0 s} \} \\ \int_0^\infty A_0(r, \xi, s, p) ds &= \frac{1 - \mu_0}{2(1 + \mu_0)} \frac{a_1}{r + \xi - 2a} \\ &\quad + \frac{1 - \mu_0}{2(1 + \mu_0)} a_2 \ln \left(\frac{\delta_0}{r + \xi - 2a} \right) \\ a_1 &= 1/(\xi r)^{1/2} \\ a_2 &= a_1 \left\{ -\frac{9}{4a} + \frac{3}{8r} + \frac{15}{8\xi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(1 - \mu_0)}{2(1 + \mu_0)a} \frac{(r + \xi - 2a)(p/c_{22})^2}{2} \right\} \\ \delta_0 &= 2c \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで、計算の便宜上次の変数および関数変換を行う。

$$\left. \begin{aligned} r_0 = r/d &= \frac{1}{2} \zeta + \frac{1}{2} (b_0 + c_0) \\ \xi_0 = \xi/d &= \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2} (b_0 + c_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\Phi^*(\tau, P) = \varphi^*(\xi, p) \frac{c_0 \mu_0 p}{\tau_0 \xi_0} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= a/d, \quad b_0 = b/d, \quad c_0 = c/d \\ P &= pd/c_{22} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

結局、補足の条件式に従う第1種特異積分方程式(20)、

(21)は

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\tau - \xi} - \frac{3}{4\tau_0} \log|\tau - \xi| + L(\xi, \tau, P) \right\} \Phi^*(\tau, P) d\tau = -1 \quad (33)$$

$$\int_{-1}^1 \Phi^*(\tau, P) d\tau = 0 \quad (34)$$

式(33)において、 $L(\xi, \tau, P)$ は積分核であり、付録1に示す。

補足の条件式(34)を満たす第1種特異積分方程式(33)を解くため、解 $\Phi^*(\tau, P)$ を第1種チェビシェフ多項式で展開すると

$$\Phi^*(\tau, P) = \frac{1}{(1-\tau^2)^{1/2}} \left[A_0^*(P) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^*(P) T_n(\tau) \right] \quad (35)$$

式(34)より

$$A_0^*(P) = 0 \quad (36)$$

また、式(33)より次の無限連立一次方程式が得られる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\delta_{kn} + \alpha_{kn} + \beta_{kn}(P)] A_n^*(P) = -\delta_{1k} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (37)$$

ここに、 δ_{kn} はクロネッカーのデルタである。 α_{kn}, β_{kn} は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{kn} &= \frac{1}{2n\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau_0} T_n(\xi) U_{k-1}(\xi) (1-\xi^2)^{1/2} d\xi \\ \beta_{kn}(P) &= \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \left[U_{k-1}(\xi) (1-\xi^2)^{1/2} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\tau)}{(1-\tau^2)^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. \times L(\xi, \tau, P) d\tau \right] d\xi \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ここに、 $U_{k-1}(\)$ は第1種チェビシェフ多項式である。式(38)の α_{kn}, β_{kn} はガウス・チェビシェフの積分公式⁽⁸⁾より容易に求めることができる。

本報の解は $\mu_0=0$ すなわち円柱状空か表面が応力自由の場合の解および $\mu_0=\infty$ すなわち剛体に完全接合の場合の解を含んでおり、これらの場合の $R_2(r, \xi, p)$ を付録2に示す。

4. 動的応力拡大係数

ラプラス逆変換定理を用いて応力の特異項を求めると

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_2 &\sim \frac{K_{3b}(T)}{(2\rho_b)^{1/2}} \cos(\theta_b/2) \\ &\quad - \frac{K_{3c}(T)}{(2\rho_c)^{1/2}} \sin(\theta_c/2) \\ (\tau_{z\theta})_2 &\sim \frac{K_{3b}(T)}{(2\rho_b)^{1/2}} \sin(\theta_b/2) \\ &\quad + \frac{K_{3c}(T)}{(2\rho_c)^{1/2}} \cos(\theta_c/2) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ここに、 $(\rho_b, \theta_b), (\rho_c, \theta_c)$ は次式で定義される極座標である。

$$\left. \begin{aligned} \rho_b &= \{(r-b)^2 + z^2\}^{1/2}, \quad \theta_b = \tan^{-1} \left(\frac{z}{r-b} \right) \\ \rho_c &= \{(r-c)^2 + z^2\}^{1/2}, \quad \theta_c = \tan^{-1} \left(\frac{z}{r-c} \right) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

また、 $K_{3b}(T), K_{3c}(T)$ は動的応力拡大係数であり、

$$\left. \begin{aligned} K_{3b}(T) &= \tau_0 d^{1/2} (c_0/2)^{1/2} b_0 \frac{1}{2\pi i} \\ &\quad \times \int_{Br} \frac{1}{P} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n^*(P) e^{PT} dP \\ K_{3c}(T) &= -\tau_0 d^{1/2} (c_0/2)^{1/2} \frac{1}{2\pi i} \\ &\quad \times \int_{Br} \frac{1}{P} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n^*(P) e^{PT} dP \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

上式中、 $T = c_{22}t/d$ は無次元時間である。

5. 数値結果および考察

無次元連立一次方程式(37)を数値解析し、複合材中の円環状き裂の動的応力拡大係数の時間的挙動を解明する。ここではき裂の内外径比 $b/c=0.5$ 、質量密度比 $\rho_0 = \rho_1/\rho_2=1.0$ とした。動的応力拡大係数は、長さ d の縁き裂を有する半無限体の縦せん断変形問題の静的解によって無次元化し、 $\bar{K}_{3b} = K_{3b}/\tau_0 d^{1/2}$ 、 $\bar{K}_{3c} = K_{3c}/\tau_0 d^{1/2}$ とした。

図2、3は横弾性係数比 $\mu_0=0$ すなわち円柱状空か表面が応力自由の場合の内径縁および外径縁における動的応力拡大係数の経時挙動に及ぼす $e_0=e/d$ の影響

図2 円柱状空かまわりに円環状き裂を有する弾性体の内径縁動的応力拡大係数 $\bar{K}_{3b}$ の経時挙動

を示したものである。 $e=b-a$ は界面径とき裂内径の差である。 e_0 が減少するに従い、すなわち円柱状空か面のき裂への接近に伴い動的応力拡大係数 $\bar{K}_{3b}$ の最大値は増大し、最大値に達するまでの時間は長くなる。慣性効果および e_0 の影響すなわち形状効果は内径縁において顕著であり、 e_0 が小さいとき大きな慣性効果を示す。図4、5は $\mu_0=\infty$ すなわち円柱状剛体に完全接合された場合の同様な結果である。 e_0 が増大するに従いすなわち界面がき裂から離れるにつれて、動的応力拡大係数 $\bar{K}_{3b}$ の最大値は増大し、最大値に達するまでの時間は長くなり、 $e_0=1.0$ の無限体の解に漸近する。慣性効果および形状効果は内径縁において顕著

であり、 e_0 の減少すなわち界面のき裂への接近に伴い大きな慣性効果を示す。

次に複合材物質特性の影響について検討する。図6、7はそれぞれ $\bar{K}_{3b}$ 、 $\bar{K}_{3c}$ の経時挙動に及ぼす横弾性係数比 μ_0 の影響を示したものである。 $\mu_0=1.0$ は無限体の解を表す。慣性効果により、 $\bar{K}_{3b}$ は約40%増大し、また $\bar{K}_{3c}$ は約20%増大する。一般に μ_0 が減少するにつれて動的応力拡大係数 $\bar{K}_{3b}$ の最大値は増大し、最大値に達するまでの時間は長くなる。動的応力拡大係数に及ぼす円柱状弾性介在物の影響は内径縁で特に顕著であり、 $\bar{K}_{3b} > \bar{K}_{3c}$ である。

終わりに臨み、終始懇切なるご指導を賜りました東

図3 円柱状空かまわりに円環状き裂を有する弾性体の外径縁動的応力拡大係数 $\bar{K}_{3c}$ の経時挙動

図5 円柱状剛体まわりに円環状き裂を有する弾性体の外径縁動的応力拡大係数 $\bar{K}_{3c}$ の経時挙動

図4 円柱状剛体まわりに円環状き裂を有する弾性体の内径縁動的応力拡大係数 $\bar{K}_{3b}$ の経時挙動

図6 円柱状弾性介在物まわりに円環状き裂を有する複合材の内径縁動的応力拡大係数 $\bar{K}_{3b}$ の経時挙動

北大学 渥美 光名誉教授に厚く感謝の意を表します。また、本研究の一部は昭和61年度文部省科学研究費の助成によるものであることを記し、謝意を表します。

付 録 1

第1種特異積分方程式(33)の積分核 $L(\zeta, \tau, P)$ は

$$L(\zeta, \tau, P) = \frac{1}{2r_0} [R_{0y}(r_0, \xi_0) + \xi_0^2 R_{1y}(r_0, \xi_0, P) + \xi_0^2 R_{2y}(r_0, \xi_0, P)] \quad (42)$$

上式中、関数 $R_{0y}(r_0, \xi_0)$, $R_{1y}(r_0, \xi_0, P)$, $R_{2y}(r_0, \xi_0, P)$ は

$$\left. \begin{aligned} R_{0y}(r_0, \xi_0) &= R_{0a}(r_0, \xi_0) \quad (\xi_0 < r_0) \\ &= R_{0b}(r_0, \xi_0) \quad (\xi_0 > r_0) \\ R_{0a}(r_0, \xi_0) &= \left\{ \frac{r_0^2}{(\xi_0 + r_0)\xi_0} - 2 \right\} E(\xi_0/r_0) \\ &\quad + \frac{r_0 \{ (r_0/\xi_0) E(\xi_0/r_0) - 1 \}}{\xi_0 - r_0} + 4K(\xi_0/r_0) \\ &\quad + \frac{3}{2} \log |2(\xi_0 - r_0)| \\ R_{0b}(r_0, \xi_0) &= \left(\frac{r_0}{\xi_0 - r_0} - 2 \frac{\xi_0}{r_0} \right) E(r_0/\xi_0) \\ &\quad + \frac{r_0 \{ E(r_0/\xi_0) - 1 \}}{\xi_0 - r_0} + 2(\xi_0/r_0) K(r_0/\xi_0) \\ &\quad + \frac{3}{2} \log |2(\xi_0 - r_0)| \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

図7 円柱状弾性介在物まわりに円環状き裂を有する複合材の外縁線動的応力拡大係数 $\bar{K}_{3c}$ の経時挙動

$$\left. \begin{aligned} R_{1y}(r_0, \xi_0, P) &= R_{1a}(r_0, \xi_0, P) \quad (\xi_0 < r_0) \\ &= R_{1b}(r_0, \xi_0, P) \quad (\xi_0 > r_0) \\ R_{1a}(r_0, \xi_0, P) &= 2P^2 \left[\int_0^1 a I_2(Pa\xi_0) K_1(Par_0) da \right. \\ &\quad \left. + \int_1^\infty \{ \alpha - (\alpha^2 - 1)^{1/2} \} I_2(Pa\xi_0) K_1(Par_0) da \right] \\ R_{1b}(r_0, \xi_0, P) &= -2P^2 \left[\int_0^1 a K_2(Pa\xi_0) I_1(Par_0) da \right. \\ &\quad \left. + \int_1^\infty \{ \alpha - (\alpha^2 - 1)^{1/2} \} K_2(Pa\xi_0) I_1(Par_0) da \right] \\ &\quad + \frac{\pi P r_0}{\xi_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{2y}(r_0, \xi_0, P) &= 2 \int_0^\infty \left[\frac{\alpha^2 \beta_b(P, \alpha)}{r_a \gamma_b \beta_a(P, \alpha)} - A_y(r_0, \xi_0, \alpha, P) \right] d\alpha \\ &\quad + \frac{1 - \mu_0}{1 + \mu_0} \left\{ \frac{a_1}{r_0 + \xi_0 - 2a_0} + a_2 \ln \left(\frac{2c_0}{r_0 + \xi_0 - 2a_0} \right) \right\} \\ \gamma_a(\alpha, P) &= \{ \alpha^2 + (c_{22}/c_{21})^2 P^2 \}^{1/2} \\ \gamma_b(\alpha, P) &= (\alpha^2 + P^2)^{1/2} \\ \beta_a(\alpha, P) &= \{ -\mu_0 \gamma_a I_1(\gamma_b a_0) I_2(\gamma_a a_0) \\ &\quad + \gamma_b I_1(\gamma_a a_0) I_2(\gamma_b a_0) \} K_1(\gamma_b r_0) K_2(\gamma_b \xi_0) \\ \beta_b(\alpha, P) &= \mu_0 K_1(\gamma_b a_0) I_2(\gamma_a a_0) \\ &\quad + (\gamma_b/\gamma_a) I_1(\gamma_a a_0) K_0(\gamma_b a_0) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} A_y(r_0, \xi_0, \alpha, P) &= \frac{1 - \mu_0}{2(1 + \mu_0)} a_{10} e^{-(r_0 + \xi_0 - 2a_0)\alpha} \\ &\quad + \frac{1 - \mu_0}{2\alpha(1 + \mu_0)} a_{20} \{ e^{-(r_0 + \xi_0 - 2a_0)\alpha} - e^{-2c_0\alpha} \} \\ a_{10} &= 1/(\xi_0 r_0)^{1/2} \\ a_{20} &= a_{10} \left\{ -\frac{9}{4a_0} + \frac{3}{8r_0} + \frac{15}{8\xi_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(1 - \mu_0)}{2(1 + \mu_0)a_0} - \frac{(r_0 + \xi_0 - 2a_0)P^2}{2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

付 録 2

$\mu_0 = 0$ の場合の $R_2(r, \xi, p)$ は

$$R_2(r, \xi, p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^2 I_2(\gamma_2 a) K_2(\gamma_2 \xi) K_2(\gamma_2 r)}{\gamma_2 K_2(\gamma_2 a)} ds \quad (47)$$

$\mu_0 = \infty$ の場合の $R_2(r, \xi, p)$ は

$$R_2(r, \xi, p) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^2 I_2(\gamma_2 a) K_2(\gamma_2 \xi) K_1(\gamma_2 r)}{\gamma_2 K_1(\gamma_2 a)} ds \quad (48)$$

文 献

- (1) Sih, G. C. and Skudra, A. M., ed., *Failure Mechanics of Composite*, (1985), 127, North-Holland.
- (2) Nozaki, H., Shindo, Y. and Atsumi, A., *Eng. Fract. Mech.*, **23** (1986), 943.
- (3) Nozaki, H., Shindo, Y., and Atsumi, A., *Int. J. Solids Struct.*, **22** (1986), 1137.
- (4) Ueda, S., Shindo, Y. and Atsumi, A., *Eng. Fract. Mech.*, **19** (1984), 1095.
- (5) 姫宮・進藤, 機論, **50-450**, A (昭 59), 158.
- (6) Papoulis, A., *Q. Appl. Math.*, **14** (1957), 405.
- (7) Shindo, Y., *Int. J. Solids Struct.*, **17** (1981), 1103.
- (8) Erdogan, F., *SIAM J. Appl. Math.*, **17** (1969), 1041.
-