非比例繰返し硬化を考慮した
粘塑性構成式モデルの定式化*田中英一^{*1}, 奥地弘章^{*2}Constitutive Modelling of Viscoplasticity Incorporating
Non-Proportional Hardening Effects

Eiichi TANAKA and Hiroaki OKUCHI

The present paper is concerned with the formulation of an elaborate constitutive model of non-proportional cyclic viscoplasticity. For this purpose, we first introduced the notions of memory surfaces for the kinematic hardening variable as well as for the isotropic hardening variable. Then by examining the cross-hardening phenomena induced by the torsional cycles after tension-compression cycles, we formulated the rational parameter describing the non-proportionality of the deformation process and the relevant evolution equations. The new model is established by incorporating these notions into the viscoplastic model proposed by Chaboche et al. Comparison of the predicted results with the corresponding experimental ones shows that the proposed model can describe the cyclic hardening behavior in various proportional and non-proportional loading conditions with constant and variable amplitudes.

Key Words: Plasticity, Viscoplasticity, Cyclic Loading, Constitutive Model, Non-proportional Loading

1. 緒 言

最近, 非比例繰返し負荷の下での著しい硬化を表現するための構成式がいくつか提案された^{(1)~(3)}. これらはいずれも内部変数を用いる最新の塑性流れ理論あるいは粘塑性流れ理論の範ちように属し, さらに次の概念の一部あるいは全部を組み込んだものである.

(1) なめらかなヒステリシスループを表現するための2曲面理論⁽⁴⁾⁽⁵⁾あるいは非線形移動硬化則⁽⁶⁾

(2) 繰返し硬化の振幅依存性を表現するための記憶面⁽⁷⁾あるいは繰返し非硬化領域⁽⁸⁾

(3) 非比例繰返し硬化を表現するための内部変数とその発展式^{(1)~(3)}.

このうち, (1)と(2)の概念は, これまでに比較的十分な検討がなされているが, 最後の非比例硬化機構に関する概念はまだ確立されておらず, いくつかの問題点を含んでいる. たとえば McDowell は⁽¹⁾, 主ひずみの最大値と最小値の差の変化率と主ひずみ速度の最大値と最小値の差の比によって, 変形過程の非比例性を定義している. しかし, この変数では, ひずみ空間の

原点での折れ曲がりを含む直線分枝非比例繰返し経路に対する変形挙動を表現できない. 一方 Benallal らは⁽³⁾, 応力速度と塑性ひずみ速度の非共軸性によって非比例性を定義しているが, 直線分枝塑性ひずみ経路の集合からなる非比例繰返し負荷に対する変形挙動を全く記述できない. 同様に, 著者の1人らが提案した構成式では⁽²⁾, わずかの繰返し塑性ひずみ経路の変更によって, 繰返し硬化の大きさが変化する場合がありますなどの難点があった.

上述の不合理性は, 変形とともに容易に値を変える変数によって非比例性を定義していることに起因する. 一般に, 非比例繰返し負荷の下での硬化は, 材料内部に形成された複雑な転位構造に起因し, この構造はわずかな量の塑性ひずみを与えることによって変化しない. 非比例性を記述する変数は, このような特徴を反映したものでなければならない.

本研究は, 非弾性構造解析プログラムに容易に組み込み, かつ上述の欠点を持たないより合理的な構成式を定式化することを目的とする. そのため, Chaboche らによる粘塑性モデル⁽⁶⁾を基本的な枠組に選び, その合理的な修正を試みる. すなわち, 交差硬化⁽⁹⁾の機構に基づいて非比例硬化を記述する内部変数と発展式を定式化し, また移動硬化変数と等方硬化変数の両者に

* 昭和63年3月14日 東海支部第37期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和62年5月25日.

*¹ 正員, 名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町).

*² 学生員, 名古屋大学大学院.

対して記憶面の概念を導入する。つづいて材料定数と材料関数の決定方法を述べ、最後に構成式の精度と妥当性を実験結果との比較によって検討する。

2. 粘塑性構成式モデルの定式化

2.1 基本的な仮定 材料は初期等方であり、変形は微小であるとする。全ひずみ速度テンソルは弾性部分と非弾性部分の和に分離でき、後者は偏差テンソルによって記述できるとする。さらにその挙動は、第2不変量によって支配されると仮定する。以下では、この場合に便利なイリュージョンの五次元ベクトル空間⁽¹⁰⁾でのベクトルとしてテンソルを表現する。

2.2 非弾性ひずみ速度を規定する関係式 すでに述べたように、本研究ではChabocheらによる粘塑性モデル⁽⁶⁾を構成式の基本的枠組に選ぶ。まず、非弾性ひずみ速度 $\dot{P}$ は次のように表される。

$$\dot{P} = \langle (\|S - X\| - Q)/k_H \rangle^n (S - X)/\|S - X\| \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで S は応力、 X と Q は移動硬化変数と等方硬化変数、 k_H と n は材料定数を表す。また変数の上の点と記号 $\|$ は時間変化率とベクトルのノルムを表し、記号 $\langle \rangle$ はマコーレ括弧であって、単化ステップ関数 $U[x]$ (ただし、 $U[0]=0$) を用いて次のように定義される。

$$\langle x \rangle = xU[x] \quad \dots\dots\dots (2)$$

2.3 移動硬化変数に対する発展式 次に、移動硬化変数 X に対する発展式を定式化する。この式は単調単純負荷と単純繰返し負荷の下での応力-非弾性ひずみ曲線の形状や、非対称振幅の繰返し負荷の下での繰返し緩和挙動に大きな影響を与える。まず $\dot{X}$ を

$$\dot{X} = \dot{X}_1 + \dot{X}_2 + \dot{X}_3 \quad \dots\dots\dots (3)$$

の3項に分離し、それらを同じ形の発展式

$$\dot{X}_1 = c_{k1}(b_{k1}B\dot{P} - X_1\dot{P}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\dot{X}_2 = c_{k2}(b_{k2}B\dot{P} - X_2\dot{P}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\dot{X}_3 = c_{k3}(b_{k3}B\dot{P} - X_3\dot{P}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

によって規定する。ここで b_{k1} , b_{k2} , b_{k3} , c_{k1} , c_{k2} , c_{k3} は材料定数であり、 $\dot{P}$ は $\dot{P}$ のノルム

$$\dot{P} = \|\dot{P}\| \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。上式において $B=1$ の場合、それらはChabocheらによる式⁽⁶⁾と一致する。しかし著者らの検討結果によれば、この形の式では振幅が比較的小さい単純繰返し負荷の下での硬化挙動を記述できない。すなわち、繰返し硬化が安定化した段階での応力-非弾性ひずみ曲線はかなり広い振幅範囲にわたってほぼ一定値の等方硬化変数によって表現でき、したがってある一定振幅値の繰返し負荷過程で生じる硬化を等方硬化変

数の値の変化に帰着できない。そこでこの場合の硬化は、繰返し負荷の進行に伴って移動硬化変数の変動範囲が徐々に拡大されることによって生じると考え、それを規定するために記憶面を導入する。すなわち、この面の外部に点 P が位置するとき、変数 X の変化率は、内部に位置するときよりも小さくなる。したがって、繰返し硬化-安定化過程は、繰返し負荷に伴ってこの領域が徐々に拡大され、非弾性ひずみの変動範囲がこの領域に完全におおわれた段階で達成される。本研究では、この記憶面を非弾性ひずみ空間における超球面で近似し、その半径 H と中心 Z に対する発展式を次のように定式化した。

$$\dot{H} = h_H \langle \|P - Z\| - H \rangle \dot{P} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\dot{Z} = h_Z \dot{H} (P - Z) / \|P - Z\| \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで h_H と h_Z は材料定数である。このとき、式(4)~(6)における変数 B を、この概念を用いて次のように定式化した。

$$B = 1 - a_H \langle \|P - Z\| - H \rangle \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし a_H は材料定数である。移動硬化変数に対する発展式をこのように定式化することによって、単調単純負荷に対する応力-非弾性ひずみ曲線も、従来よりも高精度で表現することができる。

2.4 等方硬化変数に対する発展式 非比例繰返し負荷の下での著しい硬化や、振幅が比較的大きい場合の単純繰返し負荷の下での硬化は、等方硬化変数によって表現される。このとき、一定経路形状かつ一定振幅の繰返し負荷の下では、繰返し数の増加とともに応力の大きさはある一定値に漸近する。この場合、等方硬化変数 Q はある飽和値に一致していると考えられるが、この値は経路の形状や振幅ごとに異なる。

ところで、一般的な荷重条件に対する構成式を定式化する場合、経路形状および振幅などの具体的な繰返し経路に結びついた概念はもはや用いることはできない。したがって、これらの概念をいかに一般化するかがまず重要な問題となる。以下では最初に、経路形状の一般化である変形過程の非比例性を表す変数について議論する。

変形過程の非比例性を表す変数は最近いくつか提案された⁽¹¹⁾⁻⁽¹³⁾。しかし緒言で述べたように、それらは決して満足すべきものではない。そこでより合理的な変数を導入するため、異なった方向の比例繰返し負荷を順次与えた場合に生じる交差硬化⁽⁹⁾を考察する。図1は、薄肉円管に同一非弾性ひずみ振幅の引張り-圧縮繰返し負荷とねじり繰返し負荷を順次与えた場合の応力振幅 $\Delta S/2$ (応力の変動範囲 ΔS の1/2) と累積非弾性ひずみ s^P ($\dot{P}$ の積分値) 関係の模式図を示す。この

結果から、負荷経路変更直後に、 h_c だけの硬化を生じることがわかる。この交差硬化の特徴は次のように整理される。

(1) 交差硬化は、先行引張り-圧縮繰返し負荷にて形成された転位の内部構造に起因する。

(2) この転位構造は、引張り-圧縮負荷に対してよりも、非弾性ひずみベクトルがそれと直交するねじり負荷に対して強く抵抗する。つまり、この構造は転位の運動抵抗に関し方向性を持つ。

(3) 交差硬化は、先行繰返し負荷での累積非弾性ひずみ s^p が大きいほど大きい。しかし、 s^p がある一定値を超えると h_c はもはや変化しない。したがって、この構造には飽和段階が存在する。

(4) 後続のねじり繰返し負荷において、応力振幅は処女材にそれを与えたときの飽和値に近づく。そののちにさらに引張り-圧縮繰返し負荷を与えると、交差硬化が再び観察される。すなわち、先行繰返し負荷によって形成された構造は徐々に破壊され、後続繰返し負荷に対応した新しい構造が確立される。

以上の知見から、本研究ではこの構造を非弾性ひずみベクトル空間における2階のテンソル C によって表現し、その発展式を次のように定式化する。

$$\dot{C} = c_c(u \otimes u - C)\dot{P} \quad (11)$$

ここで c_c は材料定数、記号 $\otimes$ はテンソル積であり、また u は正規化非弾性ひずみ速度ベクトルであって、次式で定義される。

$$u = \dot{P}/\dot{P} \quad (12)$$

発展式(11)の性質を理解する一助として、二、三の典型的な荷重条件の下での C の挙動を検討する。空間の基底を $n_\alpha (\alpha=1, \dots, 5)$ とし、まず $u = \pm n_1$ で表される単純繰返し負荷(図1の引張り-圧縮繰返し負荷を想定)を考える。このとき、微分方程式(11)の解は次のようになる。

$$C_{11} = 1 - \exp(-c_c s^p)$$

図1 交差硬化に対する模式図

その他の成分は恒等的に零………(13)

この式は、累積非弾性ひずみ s^p が増加するにしたがって、 $C_{11}=1$ 、その他の成分は零の状態に漸近することを示している。

次に、上述の繰返し負荷に加えて、 $u = \pm n_2$ で表される単純繰返し負荷(図1の後続のねじり繰返し負荷を想定)がさらに与えられた場合を考える。式(11)の解は、先行繰返し負荷の終了時点での累積非弾性ひずみの値を s_0^p とすれば、

$$C_{11} = [\exp(c_c s_0^p) - 1] \exp(-c_c s^p)$$

$$C_{22} = 1 - \exp[-c_c (s^p - s_0^p)]$$

その他の成分は恒等的に零………(14)

となる。したがって、経路変更後 C_{11} は零に減少するのに対し、 C_{22} は1に近づく。この結果は、先行繰返し負荷によって形成された内部構造が破壊され、後続繰返し負荷に対応した新しい内部構造が形成される図1の傾向に一致している。

最後に、非弾性ひずみ振幅が $\Delta P/2$ の円形繰返し負荷を受ける場合を考える。このとき非弾性ひずみベクトル P と正規化非弾性ひずみ速度ベクトル u は、たとえば、次のように表現できる。

$$P = (\Delta P/2)(\cos \theta n_1 + \sin \theta n_2) \quad (15)$$

$$u = (-\sin \theta n_1 + \cos \theta n_2) \quad (16)$$

ただし、 $\theta = s^p/(\Delta P/2)$ である。この場合、式(11)の解は、非定常項を無視すれば、

$$C_{11} = [D^2 \sin^2 \theta - D \sin 2\theta + 2]/(4 + D^2)$$

$$C_{22} = [D^2 \cos^2 \theta + D \sin 2\theta + 2]/(4 + D^2)$$

$$C_{12} = [D \cos 2\theta - (D^2/2) \sin 2\theta]/(4 + D^2)$$

その他の成分は恒等的に零………(17)

となる。ただし、 $D = c_c(\Delta P/2)$ である。

さて、変形過程の非比例性は、内部構造を表現する変数 C と、その瞬間での変形速度 u との関係によって定められる。ここでは、これを記述する変数 A を次のように定義する。

$$A = \{[\text{tr}(C^T C) - u \cdot C^T C u] / \text{tr}(C^T C)\}^{1/2}$$

$$(0 \leq A \leq 1) \quad (18)$$

ここで記号 tr と変数の右肩の指標 T は、テンソルの跡と転置を、また記号 $\cdot$ はベクトルの内積を表す。この変数は、式(13)で表される単純繰返し負荷や、比例繰返し負荷の場合には常に零になるように定義されている。さらに、比例繰返し負荷の下で硬化が飽和したのち、 u の方向が角 ϕ だけ異なる新しい比例繰返し負荷を受けるときには、経路変更直後に

$$A = |\sin \phi| \quad (19)$$

の値をとり、その後しだいに零に漸近するという性質を持つ。この結果は、図1に関連して述べた交差硬化

の特徴と一致する。

一方、非弾性ひずみ振幅が $\Delta P/2$ の円形繰返し負荷を受けて硬化が安定化した段階では、 A は

$$A = 1 / [2 + (cc\Delta P/2)^2]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。この関係式は、式(16)と式(17)を式(18)に代入することによってただちに得られる。材料定数 cc の具体的数値〔式(35)参照〕を用いて計算した結果によれば、これはほぼ $1/\sqrt{2}$ に等しい。式(19)からわかるように、この結果は、経路が 45° の方向変化を継続して受ける場合に対応する。

以上で経路形状の概念の一般化である変形過程の非比例性を表す変数を導いた。次に、振幅の概念の一般化を検討する。すでに緒言で述べたように、この概念の一般化は、Chaboche ら⁽⁷⁾および Ohno⁽⁸⁾によって行われており、それぞれ記憶面および繰返し非硬化領域の概念に定式化されている。特に後者は、単純繰返し負荷の下での時間非依存の塑性変形挙動を記述するのに大きな成功をおさめた。以下では、非比例繰返し負荷も対象とする粘塑性モデルに適する。等方硬化変数に対する記憶面の概念を導入する。

まず、この記憶面は、非弾性ひずみ空間における中心 Y 、半径 R の超球面として定義される。非弾性ひずみ点 P はこの面の内部および外部のいずれにも位置することができるが、外部にあるときは記憶面を拡大するように、内部にあるときには縮小するように作用する。一方、記憶面の中心は、点 P が記憶面の外部に位置するときだけ点 P の方向に移動するように規定される。このように記憶面の性質を定めれば、たとえば非弾性ひずみ制御の一定振幅の単純繰返し負荷を与えた場合、 R の大きさは初期値零から徐々に発達して、やがて非弾性ひずみの変動範囲の大きさを反映したある値に漸近する。このとき、記憶面の中心は、振幅が対称か非対称かにはかわりなく、非弾性ひずみの変動範囲の中心に位置する。

この記憶面の半径 R は、その挙動が安定化した段階において、明らかに非弾性ひずみ振幅の大きさを反映するから、この節の始めに述べた等方硬化変数の飽和値を規定する変数として、振幅値のかわりに用いることができる。以上のことを考慮して、本研究では R と Y に対する発展式を次のように定式化した。

$$\dot{R} = r_H (\|P - Y\| - R) \dot{P} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\dot{Y} = r_Y <\dot{P}> (P - Y) / \|P - Y\| \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで r_H と r_Y は材料定数である。これらの式によれば、非弾性ひずみ制御の比例繰返し負荷の安定段階では、 R は振幅値の $1/2$ に、円形繰返し負荷の場合には

振幅値に一致する。なお、 R の大きさは、繰返し非硬化領域の大きさと異なり回復可能であるが、これは非比例繰返し負荷の下での繰返し硬化の顕著な回復も表現できるようにしたためである。

以上で定式化した変数 A と R を用いれば、等方硬化変数 Q に対する発展式を容易に定めることができる。すなわち、繰返し負荷の実験から得られる応力振幅-累積非弾性ひずみ曲線は、考える瞬間での硬化量と最終的な飽和値とのかたよりが大きいほど急激に変化していることを考慮すると、たとえば次のように定式化することができる。

$$\dot{Q} = (dQ_A/dR) \dot{R} + d_Q (Q_A - Q) \dot{P} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで d_Q は材料定数であり、 Q_A は繰返し硬化の飽和値である。上式右辺第2項は、Chaboche らによって従来から用いられてきた形⁽⁹⁾であり、振幅依存性を考えないで、 Q_A を与えられた振幅に対する飽和値に最初から選ぶことができる場合にはこの項だけで十分な合理性を持つ。しかし、 Q_A が R の関数になるときには、すでに述べたように、 R は与えられた振幅値に対応する値にすぐにはならないため、繰返し負荷の初期段階において、 Q_A は最終的な飽和値よりも著しく小さくなる。したがってこの項だけでは、実験の硬化曲線の初期段階での急激な変化を再現できない。右辺第1項は、 R の変化と Q の変化を直接関連させて、初期段階での硬化の遅延を改善したものである。

最後に、繰返し硬化の飽和値 Q_A を定式化する。この変数は、一般的にいえば、変数 A と R の関数である。しかし著者らの実験結果^{(11)~(13)}によれば、小さな硬化の先行繰返し負荷は大きな硬化の後続繰返し負荷の飽和値に影響を与えず、一方その逆の順序で繰返し負荷が与えられる場合には、後続繰返し負荷の飽和値は明らかに先行繰返し負荷の影響を受けるが、それを無視する誤差はそれほど顕著なものではない。したがって、本研究では、簡単のため、 A および R の Q_A に対する履歴依存性を無視し、さらに Q_A を比例負荷に対する飽和値 $Q_P(R)$ と非比例負荷に対する飽和値 $Q_N(R)$ の線形結合として、次のように表現できるものと仮定した。

$$Q_A = A [Q_N - Q_P] + Q_P \quad \dots\dots\dots (24)$$

以上で本構成式のすべての基礎式を定式化した。この構成式は次の手順によって計算できる。まず、考える瞬間において応力、非弾性ひずみならびに各内部変数の値は既知とする。このとき、非弾性ひずみと各内部変数に対する時間変化率は、式(1)、(7)、(12)、(10)、(4)、(5)、(6)、(3)、(8)、(9)、(11)、(18)、(21)、(22)、(24)、(23)を順に計算することによ

って求められる。これから、境界値問題を解くことによって全ひずみ速度が与えられれば、非弾性ひずみ速度を差引くことによって弾性ひずみ速度が、それから応力速度が計算できる。他方応力速度が与えられれば、それから弾性ひずみ速度が計算でき、それを非弾性ひずみ速度に加えれば全ひずみ速度が計算できる。

3. 材料定数と材料関数の決定方法

本構成式に含まれる材料定数は、 $k_H, n, b_{k1}, b_{k2}, b_{k3}, c_{k1}, c_{k2}, c_{k3}, h_H, h_Z, a_H, C_C, r_H, r_Y, d_Q$ の15個であり、材料関数は $Q_N(R)$ と $Q_P(R)$ の2個である。これらは、単調単純負荷、単純繰返し負荷、円形繰返し負荷の実験結果から定められる。以下では、そのために必要な基礎式を示すとともに、それらを用いた具体的な決定方法を述べる。なお、単軸の場合の各ベクトル変数を、それぞれ対応する細字の変数で表す。また Q を除く各変数の初期値はいずれも零とする。

まず、材料定数 k_H と n を定めるため、次のことに注目する。すなわち、式(1)を除けば、この構成式の各式は応力を含まず、また時間に関して一次の同次関数である。したがって、応力を除く各変数の値は非弾性ひずみの履歴によって一義的に定まり、非弾性ひずみ速度には依存しない。このことは、式(1)を単調単純負荷に対して書き換えた式

$$S = X + Q + k_H \dot{P}^{(1/n)} \quad \dots\dots\dots (25)$$

において、応力に対する非弾性ひずみ速度の影響は、右辺第3項(粘性応力)の値の差から生じることを意味する。これから、数種類の非弾性ひずみ速度の下での単調単純負荷応力-非弾性ひずみ曲線において、同一非弾性ひずみ値に対する応力の値を比較すれば、 k_H と n を定めることができる。

次に、定数 h_H, h_Z の決定方法を考える。これらの定数は、対称な非弾性ひずみ振幅の単純繰返し負荷の下での繰返し硬化速度と、非対称な非弾性ひずみ振幅の単純繰返し負荷の下での繰返し緩和速度に関連している。式(8)と式(9)から明らかなように、これらの微分方程式は非弾性ひずみの履歴が与えられれば、他の関係式とは独立に計算できる。したがって、 h_H と h_Z を適当に仮定して上述の二つの荷重条件に対して計算機シミュレーションを行い、 H と Z がほぼ一定値に達するまでの累積非弾性ひずみ値が、対応する実験結果の硬化速度と緩和速度に合う条件から h_H と h_Z を決定できる。その際、単調単純負荷に対する H と Z の解は

$$H = \frac{P}{1+h_Z} - \frac{1}{h_H(1+h_Z)^2}$$

$$\times [1 - \exp\{-h_H(1+h_Z)P\}] \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$Z = h_Z H \quad \dots\dots\dots (27)$$

であるから、指数関数の項がほぼ減衰する非弾性ひずみ値と、実験結果における線形硬化開始時での非弾性ひずみ値を対応させれば、 $h_H(1+h_Z)$ のおよその値を見積もることができる。なお、この段階において、 B はほぼ次の一定値をとる。

$$B = 1 - a_H / [h_H(1+h_Z)] \quad \dots\dots\dots (28)$$

次に、定数 $b_{k1}, b_{k2}, b_{k3}, c_{k1}, c_{k2}, c_{k3}$ を定める方法を考える。最初に、一定非弾性ひずみ速度の条件下で得られた単調単純負荷応力-非弾性ひずみ曲線(式(25)参照)を検討する。前述したように、単純負荷の下での等方硬化変数の変化は大きくなく、したがってこの場合の挙動は移動硬化変数 X によって支配される。この曲線を、非弾性ひずみが小さい段階での非線形硬化部分と、大きい段階でのほぼ線形硬化に近い部分に分けて考え、前者を変数 X_1 と X_2 によって、後者を変数 X_3 によって表現する。このとき線形硬化部分では変数 X_1 と X_2 はほぼ一定値に漸近しており、さらに、 X_3 に対する式(6)は、線形硬化

$$\dot{X}_3 = c_{k3} b_{k3} \{1 - a_H / [h_H(1+h_Z)]\} \dot{P} \quad \dots\dots\dots (29)$$

に近い挙動を表現することに注意すれば、直線のこう配から積 $c_{k3} b_{k3} \{1 - a_H / [h_H(1+h_Z)]\}$ の概略値を見積もることができる。

一方、定数 $b_{k1}, b_{k2}, c_{k1}, c_{k2}$ の値は、一定非弾性ひずみ振幅完全両振り単純繰返し負荷の下で、繰返し硬化が安定した段階の応力-非弾性ひずみ曲線から定められる。この場合、移動硬化変数に対する記憶面の大きさ H はその振幅値 $\Delta P/2$ に一致し、したがって $B=1$ となる。この条件を考慮して微分方程式(3)~(6)を非弾性ひずみが増加する場合と減少する場合に対して解き、応力-非弾性ひずみ曲線の原点に関する対称条件と両者の解が非弾性ひずみの上限と下限で一致する条件を課せば、変数 X に対する解析解を導くことができる。この解と単純負荷状態での式(1)を用いれば、次の応力-非弾性ひずみ関係式を得る。

$$\begin{aligned} S^+ &= \sum_{i=1}^3 \left[b_{ki} \left\{ 1 - \frac{\exp(-c_{ki}P)}{\cosh(c_{ki}\Delta P/2)} \right\} \right] \\ &\quad + Q + k_H \dot{P}^{(1/n)} \\ S^- &= - \sum_{i=1}^3 \left[b_{ki} \left\{ 1 - \frac{\exp(c_{ki}P)}{\cosh(c_{ki}\Delta P/2)} \right\} \right] \\ &\quad - Q - k_H \dot{P}^{(1/n)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここで S^+ と S^- は、それぞれ非弾性ひずみが増加する場合と減少する場合の応力を表す。上式は、移動硬化の項(総和記号の中の項)と、等方硬化の項(繰返し

硬化の安定段階では一定値), ならびに粘性応力の項 (一定非弾性ひずみ速度の実験では一定値) からなっている。したがって, あとの二つの項は応力-非弾性ひずみ関係における曲線部分の形状には影響を与えない。これから, 移動硬化に関する定数は, この曲線部分を, 式(30)の移動硬化に関する項によって表現できる条件から定められる。この際, b_{k3} と c_{k3} を含む項の影響は大きくないから, とりあえず零と仮定すれば, 比較的容易に b_{k1} , b_{k2} , c_{k1} , c_{k2} の概略値を定めることができる。

さて, この場合の応力振幅 $\Delta S/2$ (ΔS : 応力範囲) は, $P = \Delta P/2$ での S^+ となる。したがって, Q は式(30)から次のように表現できる。

$$Q = \Delta S/2 - k_H \dot{P}^{(1/n)} - \sum_{i=1}^3 \left[b_{ki} \left\{ 1 - \frac{\exp(-c_{ki} \Delta P/2)}{\cosh(c_{ki} \Delta P/2)} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (31)$$

前述したように, 等方硬化変数に対する記憶面の半径 R は, この場合振幅 $\Delta P/2$ の $1/2$ となる。それゆえ実験結果から $\Delta S/2 - \Delta P/2$ 関係が得られれば, 材料関数 $Q_P(R)$ は式(31)から得た Q の値の関数近似によって容易に定められる。なお, 後述の 316 ステンレス鋼⁽¹¹⁾⁻⁽¹³⁾に対して $Q_P(R)$ を求めたところ, それは R の値にかかわらず一定値となった。

さて単純負荷の場合, 変数 A の値は零であり, また等方硬化変数の値はほぼ一定値である。このとき, 定数 c_c , d_q , r_H , r_Y と関数 $Q_N(R)$ の値にかかわらず, 定数 b_{k3} , c_{k3} , a_H を式(29)による拘束条件を満足するように仮定することによって, 単調単純負荷の場合の計算を行うことができる。この際, b_{k3} の値は b_{k1} , b_{k2} の値に比べて大きく, 一方 c_{k3} の値は c_{k1} , c_{k2} の値に比べて小さいこと⁽⁶⁾, さらに b_{k3} と c_{k3} の値は, 非対称単純繰返し負荷に対する繰返し緩和挙動にも適合する必要があることに注意する。以上で定めた定数を用いて上述の手順を繰返し, 実験結果に合うように調節すれば, 単純負荷条件に関する定数と関数を最終的に定めることができる。

次に, 定数 r_H と r_Y を定める方法を考える。これらの定数は, 非比例繰返し負荷の下での等方硬化の速度に大きな影響を与える。一方, 式(8)と式(9)の場合と同様に, 式(21)と式(22)は他の関係式とは独立に計算できる。したがって, r_H と r_Y を適当に仮定して計算機シミュレーションを行い, R と Y が安定化するまでの累積非弾性ひずみ値が, 円形繰返し負荷の実験結果に対する硬化速度に合う条件から, r_H と r_Y を決定できる。

材料関数 $Q_N(R)$ は, 円形繰返し負荷に対する飽和

段階での応力振幅 $\Delta S/2$ と非弾性ひずみ振幅 $\Delta P/2$ との関係から定められる。この関係は, まず移動硬化変数に対する微分方程式(3)~(6)の定常解を求め, それを式(1)から得られる関係

$$\|S - X\| = Q_c + k_H P^{(1/n)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

に代入すれば求められる。すなわち

$$(\Delta S/2)^2 = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{b_{ki} c_{ki} \Delta P/2}{1 + (c_{ki} \Delta P/2)^2} \right]^2 + [Q_c(\Delta P/2) + k_H \dot{P}^{(1/n)} + \sum_{i=1}^3 \frac{b_{ki} (c_{ki} \Delta P/2)^2}{1 + (c_{ki} \Delta P/2)^2}]^2 \quad \dots\dots\dots (33)$$

となる。ここで等方硬化変数の値を $Q_c(\Delta P/2)$ とおいた。円形繰返し負荷の飽和段階では $R = \Delta P/2$ であり, また $A = 1/\sqrt{2}$ であって,

$$Q_N(R) = \sqrt{2} [Q_c(R) - Q_P(R)] + Q_P(R) \quad \dots\dots\dots (34)$$

の関係があることに注意すれば, $Q_N(R)$ は実験から得られる $\Delta S/2 - \Delta P/2$ 関係から容易に求められる。一方, 材料定数 c_c は, 式(13)からわかるように, 単純繰返し負荷の下での内部構造の形成速度と関連している。したがって, この構造が安定化するまでの累積非弾性ひずみ量と, 繰返し硬化が安定化するまでのそれが一致すると考えれば, 式(13)から簡単に c_c を定められる。なお, c_c を変化させて前述の交差硬化現象を計算したところ, この仮定はほぼ妥当であることがわかった。

最後に, 定数 d_q の値は, d_q の値を仮定して円形繰返し負荷に対する計算機シミュレーションを行い, それから得られる応力振幅と累積非弾性ひずみの関係が実験結果と合う条件から定められる。

4. 構成式モデルの実験的検討

構成式モデルの精度と妥当性を検討するため, 既報の実験結果⁽¹¹⁾⁽¹²⁾と, 計算機シミュレーション結果の比較を行った。実験は, 316 ステンレス鋼薄肉円管試験片に, 軸力とトルクの組合せ負荷を与え, 非弾性ひずみを制御して行ったものである。3章の手順によって定めた材料定数と材料関数を次に示す。

$$\begin{aligned} k_H &= 92 \text{ MPa}, n = 8, \\ b_{k1} &= 130 \text{ MPa}, c_{k1} = 1800, \\ b_{k2} &= 140 \text{ MPa}, c_{k2} = 200, \\ b_{k3} &= 430 \text{ MPa}, c_{k3} = 8, \\ h_H &= 20, h_Z = 15, a_H = 90, \\ r_H &= 6, r_Y = 50, \\ c_c &= 23, d_q = 5 \\ Q_P(R) &= 75 \text{ MPa}, \\ Q_N(R) &= 240[1 - \exp(-800R)] \end{aligned}$$

$$+39\,600R+139\text{ MPa} \cdots \cdots (35)$$

図2は、単調単純ねじり負荷の応力-非弾性ひずみ曲線に対する比較の結果を示す。実線で示した理論結果は、実験点とよく一致している。

図3は、非弾性ひずみ振幅 $\Delta P/2$ が0.2%の完全両振りねじり繰返し負荷の応力-非弾性ひずみ曲線に対する計算結果と実験結果を示す。理論は、実験結果をよく再現していることがわかる。

さて、繰返し硬化の非弾性ひずみ経路形状依存性をどの程度表現できるかを検討するため、図4(a)～(f)に示す各種の繰返し経路に対して計算を行った。なお、図中の ϵ^p と γ^p は薄肉円管に生じる軸方向とねじりの非弾性ひずみである。図5は、各ひずみ経路 ($\Delta P/2=0.2\%$) に対する応力振幅と累積非弾性ひずみの関係を示している。十字経路において、理論は実験よりも若干大きな応力振幅を見積もる傾向があるが、その他の経路に関しては硬化過程ならびに飽和値のいずれについても、両者の一致は良好である。

繰返し硬化の振幅依存性の表現精度を見るため、図4(a)と図4(f)のねじり経路と円形経路を選び、振幅 $\Delta P/2=0.1, 0.2, 0.4\%$ に対して計算を行った。その結果を図6に示す。図6からわかるように、理論と実

験の一致は良好である。

最後に、振幅履歴依存性の記述精度を評価するため、ねじり、十字、円形経路について、 $\Delta P/2$ が0.1→0.4→0.1%と変動する場合の計算を行った。図7は、応力振幅と累積非弾性ひずみの関係を示す。振幅が増加する場合は、十字経路に対する予測値がやや大きいことを除けば両者の一致は良好であるが、振幅が減少する場合は、いずれの経路に対しても、理論の応力振幅の減少速度が実験結果に比べてはやすぎる傾向が認められる。これは、等方硬化変数に対する発展式(23)が

図4 繰返し非弾性ひずみ経路

図2 単調単純ねじり応力-非弾性ひずみ曲線

図5 繰返し硬化の経路形状依存性

図3 単純繰返しねじり応力-非弾性ひずみ曲線

図6 繰返し硬化の振幅依存性

図 7 繰返し硬化の振幅履歴依存性

等方硬化の履歴依存性を考慮していないことに起因する。

5. 結 言

本研究では、非比例繰返し負荷を考慮した新しい粘塑性構成式モデルを提案した。そのため、Chabocheらのモデルを基本的な枠組に選び、非比例硬化を記述する合理的な内部変数とその発展式を定式化するとともに、記憶面の概念を導入することによって移動硬化変数と等方硬化変数に対する発展式を修正した。つづいてその構成式に含まれる材料定数と材料関数の決定方法について議論し、最後に二、三の代表的な荷重条件に対して計算機シミュレーションを行って、実験結果と比較した。

その結果、本研究で対象とした現象が極めて複雑であるにもかかわらず、この構成式は種々の荷重条件に

対してほぼ妥当な予測値を与えることがわかった。

本研究を遂行するに際し、貴重なご検討を賜った名古屋大学工学部の村上澄男教授に感謝する。また、名古屋大学大型計算機センターを利用させていただいたことに對し謝意を表す。最後に、この研究は、昭和61年度文部省科学研究費補助金、一般研究(A) [No. 62420024] と一般研究(C) [No. 61550078] による研究の一部であることを記し、ご援助いただいたことに對して感謝の意を表す。また、この研究テーマに関し、著者の一人が財団法人豊田理化学研究所の研究嘱託として研究費を支給されたことを付記して謝意を表す。

文 献

- (1) McDowell, D. L., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 52-2 (1985), 298.
- (2) 田中・ほか2名, 機論, 52-480, A (昭61), 2054.
- (3) Benallal, A. and Marquis, D., *Proc. 2nd Int. Conf. Constitut. Laws Eng. Mater.*, Tucson, Arizona, U. S. A., (1987), 505.
- (4) Krieg, R. D., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 42-3 (1975), 641.
- (5) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 43-4 (1976), 645.
- (6) Chaboche, J. L. and Rousselier, G., *Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol.*, 105-2 (1983), 153.
- (7) Chaboche, J. L., ほか2名, *Transactions 5th International Conference Structure Mech. Reactor Technology*, L, (1979), L 11/3, North-Holland.
- (8) Ohno, N., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 49-4 (1982), 721.
- (9) Krempl, E. and Lu, H., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, 106-4 (1984), 376.
- (10) 例えば, Tanaka, E., *Acta Mechanica*, 52-1/2 (1984), 63.
- (11) 田中・ほか2名, 機論, 51-468, A (昭60), 1941.
- (12) 田中・ほか2名, 機論, 51-469, A (昭60), 2162.
- (13) 田中・ほか3名, 機論, 52-479, A (昭61), 1716.

討 論

〔質問〕 鈴木章彦

〔石川島播磨重工業(株)技術研究所〕

非比例繰返し硬化に適用できる精密な粘塑性構成式モデルを開発したことに敬意を表す。以下の点についてご教示願えればありがたい。

- (1) 一般的にいえば、式(23)の第1項にも材料によって定まる係数が必要ではないか。
- (2) 流動応力のひずみ速度依存性は、非弾性ひずみ速度の $1/n$ 乗で表されている。一方、単調負荷応力-ひずみ曲線の形状を表すのに X_1, X_2, X_3 の3項を用いている。これと比較し、ひずみ速度依存性の表現が簡単すぎ、応答表現の精度上バランスを欠くのではな

いか。

- (3) 繰返し軟化材の表現は可能か。
- (4) クリープ変形の記述は可能か。

〔回答〕 啓発的なご討論に深く感謝する。ご質問の点については、以下のように考えている。

(1) 式(23)の第1項では、 R の増加あるいは減少による等方硬化変数 Q への寄与は瞬間的である。言い換えれば、 Q の値はただちに目標値 Q_A に到達することを表現しているから、材料定数は必要ないものと考えられる。

(2) ご指摘のとおり、ひずみ速度依存性を正確に表現するには、単純な $1/n$ 乗則では不十分である。し

かし、本構成式は主に繰返し硬化挙動を表現する目的で定式化しており、ひずみ速度依存性の一つの近似的表現としてこの式を採用した。時間依存変形、例えばクリープ変形などを精密に表現する必要がある場合には、より適切な定式化が必要と思われる。

(3) 等方硬化変数の飽和値 Q_P と Q_N を繰返し軟化材の実験結果に基づいて決定すれば、繰返し軟化挙動も表現できるものと考えられる。

(4) 本構成式は、いわゆる統一形の構成式であり、式(1)において一定応力を規定することによって、クリープひずみを算出することができる。ただし、回答(2)で述べたとおり、広範囲の時間依存変形を正確に記述するには、さらに検討の必要がある。

〔質問〕 吉田 総 仁 (広島大学工学部)

複雑な非比例繰返し負荷での硬化を表現する構成式モデルの定式化の成功に敬意を表す。とりわけ C , A を通じての非比例性の定量化については興味深く拝見した。

(1) 非比例繰返し硬化挙動は主として等方硬化変数 Q を通じて表現されていると思われるが、2・3節で提案された移動硬化定数 X に関する新しい提案なしには繰返しに伴う遷移挙動(徐々に硬化が進行する挙動)の表現は難しいのか。

(2) 図7においてCruciform(B)では硬化の予測が大きめになっている。これは材料定数の決定に円形経路の結果を用いたためとも思われるが、改善の余地はあるのか。

(3) 貴論文で用いられた SUS 316 は単軸繰返し

硬化があまり顕著ではないが、例えば SUS 304 のような硬化の大きい材料に対してもこの構成式の一般化になんら支障はないのか。

〔回答〕 ゆき届いたご討論をいただき、感謝する。ご質問については以下のようにお答えする。

(1) 移動硬化変数に対する記憶面の導入は、比例繰返し負荷のもとでの硬化挙動を表現するためのもので、非比例繰返し硬化挙動を表現する場合には必ずしも必要ではない。

(2) 十字経路のもとでの繰返し硬化を大きく見積もる原因としては次のことが考えられる。すなわち、十字経路のような非比例繰返し負荷のもとでの硬化挙動は主に等方硬化変数 Q によって表現されるが、その目標値 Q_A は式(4)によって決定される。したがって、非比例性のパラメータ A の表現〔式(8)〕が、 Q_A の値に大きな影響を与える。本論文では式(9)に見られるように、90°の経路変更のときに A が最大になると仮定して式(8)を定式化しており、このため十字経路の繰返し硬化をかなり大きく見積もることになっている。このような傾向を改善する一つの方法としては、実験結果に基づいてこの変数 A の定式化をさらに精密化することが考えられる。

(3) 本構成式では単軸繰返し硬化を主に移動硬化変数 X で表現している。したがって、単軸繰返し硬化が大きな材料の場合、このほかに等方硬化変数 Q の発達を支配する Q_P の値を適当に決定すれば、本構成式はそのまま適用できると考えられる。