応力増分依存性を考慮した弾塑性体構成方程式の一表現*

(第 1 報, Mises 形塑性ポテンシャルを伴う初期等方材)

呉 屋 守 章^{*1}, 伊 藤 耿 一^{*2}

An Expression of Elastic-Plastic Constitutive Law Incorporating A Stress Increment Dependence

(1st Report, Initial Isotropic Materials with Mises Type-Plastic Potential)

Moriaki GOYA and Koichi ITO

A constitutive law for elastic-plastic materials is presented on the assumption that deviatoric stress increments affect plastic strain increments. By the use of weighing parameters, the law is expressed as an averaging rule of the usual plastic potential law (or flow rule) and a rule that permits plastic strain increments to depend only on stress increments. The developed law permits the existence of a vertex on the yield surface. The law, however, can be written formally in the same equation as the usual flow rule: this implies that the developed law is applicable to such a solution scheme as the Finite Element Method.

Key Words: Plasticity, Constitutive Equation, Vertaxed Yield Surface, Plastic Potential, Corner Theory

1. 結 言

従来より弾塑性体の構成方程式については数多くの研究がなされており, 塑性ひずみ増分 ϵ^p が塑性ポテンシャル面に垂直に生ずるとする従来の塑性ポテンシャル論(流れ則)の立場からの研究は特に多く, 例えば古くは Mises の塑性ポテンシャルに始まり, 最近では吉田ら⁽¹⁾による異方硬化形塑性ポテンシャルの提案や高橋⁽²⁾による比例負荷試験による塑性ポテンシャル決定等の報告がある。いずれの場合も得られた実験事実をうまく表現するものであり, 塑性ポテンシャルの存在を支持する結果となっている。

一方, 伊藤⁽³⁾により塑性座屈の解析においてまた後藤⁽⁴⁾によってせん断帯形成を伴う塑性不安定解析において従来の塑性ポテンシャル論を用いることの不適切さが指摘され, ある一定の比例負荷継続の後その状態から急激に逸脱していく負荷経路を含む現象に対し従来の塑性ポテンシャル論を用いることの妥当性が問われるようになった。これらの研究においては, 降伏曲

面(負荷面)に角点の出現を許すいわゆる応力速度依存性を考慮した構成方程式がそれぞれ独自に提案され, それぞれの不安定解析に用いられた結果やはり実験事実を良く表現することが示されている。さらに, Cristoffersen-Hutchinson⁽⁵⁾によって σ の凸関数としての新しい塑性ポテンシャルの概念が提案され, これにより得られた構成方程式が板のくびれ問題に適用され一応の結果が得られている。

以上に述べられた研究の二つの大きな流れは, いずれもそれぞれの実験結果をうまく説明するものであり, 得られた塑性ポテンシャルあるいは提案された構成方程式は実際の物理現象を表現するにそれなりに適したモデルであると推察される。こうした中で, 従来の滑らかな塑性ポテンシャル論の形態を保持しつついかに応力速度依存性を導入するかの観点からの研究はわずかに後藤によって触れられているにすぎず⁽⁶⁾, 必ずしも十分とは言えない。こうした観点から研究を進めた結果, 上述の角点を考慮した既存の構成方程式とは異なる表現則が得られたのでここに報告する。以下において, 特に断わらない限り( )や( )の付されたひずみや応力はそれぞれ増分および偏差成分を示すものとする。

* 昭和 62 年 5 月 17 日 第 18 回塑性加工春季講演会において講演, 原稿受付 昭和 62 年 11 月 24 日。

^{*1} 正員, 琉球大学教育学部 (〒903 沖縄県中頭郡西原町千原 1 番地)。

^{*2} 正員, 東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻字青葉)。

2. 速度依存構成式に関する表現の導入

2.1 塑性ひずみ増分の重み付き平均 塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}^p$ に対する従来の塑性ポテンシャル論および偏差応力増分の寄与が次式のような“重み付き平均”として表せるとする。

$$\dot{\epsilon}^p = |\dot{\epsilon}^p| (K_F n + K_D l) \quad (1)$$

ここに、

$|\dot{\epsilon}^p|$: 塑性ひずみ増分の大きさを意味し、 $|\dot{\epsilon}^p|^2 \equiv (\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p)$ と定義する。他のテンソルについても同様とする。

n : 塑性ポテンシャル面に垂直な外向きテンソルで単位の大きさを持ち、偏差応力テンソルの向きに一致する。

l : 偏差応力増分の向きに等しい向きのテンソルで単位の大きさを持つ。

K_F, K_D : スカラー量で重み係数

図1に各増分量の幾何学的関係が概略的にII-平面上で描かれている。また、ここまで特に降伏曲面上に角点の存在を前提としていないが後出の式(3)の条件とDruckerの仮説を加味すると角点の出現することになるので図中の降伏曲面にはそのように示してある⁽⁷⁾。

さて、 K_F, K_D については式(1)の両辺の大きさが等しいこと、また $\dot{\epsilon}^p$ の向きはテンソル n の向きから $\dot{\sigma}'$ によっていくぶん $\dot{\sigma}'$ の向きのほうへ変わる、つまり換言すれば $\dot{\epsilon}^p$ の向きは常に n と $\dot{\sigma}'$ の間に位置するものと仮定するとそれぞれ次の条件式を得る。

$$K_F^2 + K_D^2 + 2K_F K_D \cos \theta_{n\dot{\sigma}'} = 1 \quad (2)$$

$$K_F \geq 0, K_D \geq 0 \quad (3)$$

ここで、 $\theta_{n\dot{\sigma}'}$ は次式で定義され、

$$\cos \theta_{n\dot{\sigma}'} \equiv n : \dot{\sigma}' / |n| |\dot{\sigma}'| \quad (4)$$

n と $\dot{\sigma}'$ の成す角度を示す、その他の角度についても同様に定めるものとする。以後の記述の簡略のため θ

$n\dot{\sigma}'$ を α と書き変えまた次の変数を導入しておく。

$$\dot{\epsilon}_F^p \equiv K_F |\dot{\epsilon}^p| n, \dot{\epsilon}_D^p \equiv K_D |\dot{\epsilon}^p| l \quad (5)$$

式(1)より得られ、後の議論の展開において用いられる関係を以下にあげる。

例えば、式(1)に $\dot{\sigma}'$ を内積した結果より、

$$\dot{W}_F / \dot{W}^p = K_F / \cos \theta_{n\dot{\sigma}'}$$

$$\dot{W}_D / \dot{W}^p = K_D \cos \alpha / \cos \theta_{n\dot{\sigma}'} \quad (6)$$

ここに、

$$\dot{W}^p \equiv \dot{\sigma}' : \dot{\epsilon}^p$$

$$\dot{W}_F \equiv \dot{\sigma}' : \dot{\epsilon}_F^p$$

$$\dot{W}_D \equiv \dot{\sigma}' : \dot{\epsilon}_D^p$$

式(1)に n を内積した結果より、

$$\cos \theta_{n\dot{\sigma}'} = K_D \cos \alpha + K_F \quad (7)$$

また、式(2)と式(7)より次式を得る。

$$K_F = \sin(\alpha - \theta_{n\dot{\sigma}'}) / \sin \alpha$$

$$K_D = \sin \theta_{n\dot{\sigma}'} / \sin \alpha \quad (8)$$

さらに、 $\theta_{n\dot{\sigma}'}(\alpha)$ と α の間に次の仮定をする。

(i) $\theta_{n\dot{\sigma}'}(\alpha)$ は α について単調増加であり、常に $0 \leq \alpha - \theta_{n\dot{\sigma}'} \leq \pi/2$ で、また $\alpha = 0$ のとき $\theta_{n\dot{\sigma}'} = 0$, $\alpha = \alpha_{\max}$ のとき $\theta_{n\dot{\sigma}'} = \alpha_{\max} - \pi/2$ となる。

2.2 偏差応力増分依存成分 $\dot{\epsilon}_D^p$ いま、 l は偏差応力増分の向きに一致するので $l = \dot{\sigma}' / |\dot{\sigma}'|$ となり、これを式(5)に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_D^p &= K_D |\dot{\epsilon}^p| \dot{\sigma}' / |\dot{\sigma}'| \\ &= (3/2) K_D \dot{\sigma}' \bar{\epsilon}^p / \bar{\sigma} \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{\epsilon}^p$ は従来の相当塑性ひずみ増分で、 $\bar{\sigma}$ はMises形の関数に $\dot{\sigma}'$ を代入して得られたものであり、Mises形相当応力の増分 $\dot{\bar{\sigma}}$ とは異なるが、両者の間には次の関係が成立する。

$$\bar{\sigma} \cos \alpha = \dot{\bar{\sigma}} \quad (10)$$

さて、伊藤が用いた無次元パラメータ $\mu(\alpha)^{(9)}$ を導入して $\bar{\sigma}$ と $\bar{\epsilon}^p$ の間に次の関係を仮定しよう。

$$\bar{\sigma} = H' \bar{\epsilon}^p / \mu(\alpha) \quad (11)$$

ここで、 $H'(>0)$ は比例負荷における加工硬化係数に相当し、 $\mu(\alpha)$ は振れ角 α に対する塑性ひずみ増分の大きさを定める関数であるが、Mises形関数を塑性ポテンシャルとする従来の流れ則の場合は $\cos(\alpha)$ に一致する。より厳密に言えば $\mu(\alpha)$ の関数形そのものが $\dot{\sigma}'$ の向きによって変わることもあり得ると思われるが、ここでは単に $\mu(\alpha)$ に対し次の条件を課しておく。

$0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ において

(ii) $\mu(\alpha)$ は α について単調減少であり、

$$\alpha = 0 \text{ のとき } \mu = 1$$

$$\alpha = \alpha_{\max} \text{ のとき } \mu = 0 \quad (12)$$

結局、(11)を式(9)に代入して次式を得る。

図1 II-平面上における塑性ポテンシャル面、降伏曲面および各テンソルの関係

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} K_D \frac{\mu}{H'} \dot{\sigma}' \quad \dots\dots\dots (13)$$

2.3 塑性ポテンシャル依存成分 ϵ^p 従来の流れ則と同様に次式を仮定する.

$$\epsilon^p = g' h \dot{g} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$= g' h F' \dot{W}^p \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに,

g : 塑性ポテンシャル関数で, $g = F(\int dW^p)$,

$$F' \equiv dF/dW^p$$

g' : $(\partial g / \partial \sigma_{ij})$, 本報においては Mises 形ポテンシャルが前提なので $(3/2) \sigma' / \bar{\sigma}$ に等しい

h : スカラー量

式(15)の両辺に σ を内積すると,

$$\sigma: \dot{\epsilon}^p = \bar{\sigma} h F' \dot{W}^p \quad \dots\dots\dots (16)$$

を得る. 式(16)の左辺に式(6)を代入した後, h について解くと次式を得る.

$$h = \frac{K_F}{\bar{\sigma} F' \cos \theta_n \epsilon^p} \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(17)を式(15)に代入した後, 式(10), (11)を考慮すると結局次の関係を得る.

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{K_F 3 \sigma' \mu \dot{\sigma}}{2 \bar{\sigma} \cos \alpha H'} \quad \dots\dots\dots (18)$$

2.4 応力ひずみ関係の表現の導入 従来からの仮定と同じように, ひずみ増分 $\dot{\epsilon}$ が弾性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}^e$ と塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}^p$ の和から成るとすると次式が成立する.

$$\dot{\epsilon}' = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad \dots\dots\dots (19)$$

弾性成分については Hooke の法則の成立を仮定し, 塑性成分については式(1), (5), (13), (18)の関係を考慮すると次式を得る.

$$\dot{\epsilon}' = \frac{\dot{\sigma}'}{2G^*} + \frac{K_F 3 \sigma' \mu \dot{\sigma}}{2 \bar{\sigma} \cos \alpha H'} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで,

$$G^* = GH' / (H' + 3GK_D \mu) \quad \dots\dots\dots (21)$$

G : 横弾性係数

式(20)の両辺に σ' を内積し次式を得る.

$$\sigma': \dot{\epsilon}' = \left(\frac{1}{3G^*} + \frac{K_F \mu}{H' \cos \alpha} \right) \bar{\sigma} \dot{\sigma} \quad \dots\dots\dots (22)$$

図2 降伏曲面, 塑性ポテンシャル面および $\alpha_{\max}$ の関係

これを, $\dot{\sigma}$ について解き式(20)に代入し, 式(7)の関係を考慮して整理すると応力増分の向きに依存する応力ひずみ関係として次の表現を得ることができる. すなわち, $(n: \dot{\epsilon}') / (\sqrt{3/2} \bar{\epsilon}) > \cos \alpha_{\max}$ に対して塑性負荷となり

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}' &= \frac{\dot{\sigma}'}{2G^*} + \frac{(\sigma: \dot{\epsilon}') \dot{\sigma}'}{S^*} \\ \dot{\epsilon}^v &= \dot{p} / K \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

また, $(n: \dot{\epsilon}') / (\sqrt{3/2} \bar{\epsilon}) \leq \cos \alpha_{\max}$ に対して除荷となり

$$\dot{\epsilon}' = \dot{\sigma}' / (2G), \quad \dot{\epsilon}^v = \dot{p} / K$$

ここに,

$\dot{\epsilon}^v$: 体積ひずみ増分

$\dot{p}$: 静水圧応力増分

K : 体積弾性率

$$S^* = 2 \bar{\sigma}^2 \{ H' \cos \alpha / (3G) + \mu \cos \theta_n \epsilon^p \} / (3K_F \mu) \quad \dots\dots\dots (24)$$

また, 式(23)の逆表示は次のようになる.

$$\dot{\sigma}' = 2G^* \{ \dot{\epsilon}' - (\sigma': \dot{\epsilon}') \sigma' / S^* \} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\dot{p} = K \dot{\epsilon}^v$$

数値解析においては, 構成方程式は式(23)の形よりも逆表示式(25)の形で用いられることが多くその表示式の唯一性, すなわち任意に与えられた $\dot{\epsilon}$ に対して $\dot{\sigma}$ が唯一に定まるかどうかということは応用上重要な問題である. その唯一性を条件(i), (ii)下で示すことが可能であるが, その詳細については後の付録を参照されたい.

また, $\alpha_{\max}$ をどう決定するかについては, Christoffersen らによって示唆されているように図2を参考にし, 次式より決定できる.

$$\sin \alpha_{\max} = \bar{\sigma}_{\text{pot}} / \bar{\sigma} \quad \dots\dots\dots (26)$$

3. 既存の角点則との関係

有限要素法等による変形解析に用いられる既存の角点則として, J_2 -変形論の増分則, Christofferson-Hutchinson 則, 後藤則があり, 塑性負荷に対してそれぞれ次式となる.

< J_2 -変形論の増分則>

$$\dot{\epsilon}^p = (3/2) \{ E_s^{-1} \dot{\sigma}' + (H'^{-1} - E_s^{-1}) \sigma' \dot{\sigma} / \bar{\sigma} \} \quad \dots\dots\dots (27)$$

E_s : 比例負荷の相当応力-相当塑性ひずみ曲線のセカント係数

<Christoffersen-Hutchinson 則>

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &= (3/2) f(\theta) \{ [1 - K(\theta) \cot \theta] E_s^{-1} \dot{\sigma}' \\ &\quad + [1 - k(\theta) \cot \theta] (H'^{-1} - E_s^{-1}) + k(\theta) \\ &\quad \times (H'^{-1} - E_s^{-1}) / (\sin \theta \cos \theta) \} \sigma' \dot{\sigma} / \bar{\sigma} \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここで,

$$f(\theta) = \{ \cos (.5\pi\theta/\theta_{\max}) \}^2$$

$$k(\theta) = .5\pi/\theta_{\max} \tan(.5\pi\theta/\theta_{\max})$$

$$\tan \theta = \sqrt{a} \tan \alpha, a = H'/E_s$$

〈後藤則〉

$$\dot{\epsilon}^p = p(\alpha) \{ H_0^{-1} \dot{\sigma}' + (h_0^{-1} - H_0^{-1}) \sigma' \bar{\sigma} / \bar{\sigma} \} / 2 \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで,

$$p(\alpha) = a + b \cos \alpha$$

$$\cos \alpha_{\max} = -a/b$$

$$a = h_0/H_0, b = 1 - a,$$

$$h_0 = H'/3, H_0 = h_0[1 + 1/\cos(\pi - \alpha_{\max})]$$

本報でより明確となった角点則の基本的パラメータとしての $\mu(\alpha)$, $\theta_{n\dot{\epsilon}^p}(\alpha)$ を上述の既存角点則の場合について具体的に記述すると次のようになる。

〈 J_2 -変形論の増分則〉

$$\mu(\alpha) = \cos \alpha / \cos \theta_{n\dot{\epsilon}^p} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\theta_{n\dot{\epsilon}^p} = \cos^{-1} [\{ 1 + (H'/E_s)^2 (\tan \alpha)^2 \}^{-1/2}]$$

〈Christofferson-Hutchinson 則〉

$$\begin{aligned} \mu(\alpha) = f(\theta) [\{ 1 - k(\theta) \cot \theta \}^2 \{ (H'/E_s)^2 \\ + (1 - H'/E_s)(1 + H'/E_s)(\cos \alpha)^2 \} \\ + 4k(\theta)(\cos \alpha)^2 [1 - k(\theta) \cot(2\theta) \} \\ / \sin(2\theta)]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{n\dot{\epsilon}^p} = \cos^{-1} [f(\theta) (1 + k(\theta) \tan \theta) \\ \times (\cos \alpha) / \mu(\alpha)] \end{aligned}$$

〈後藤則〉

$$\begin{aligned} \mu(\alpha) = \{ (\cos \alpha_{\max} - \cos \alpha) \sin \alpha \} / \{ (\cos \alpha_{\max} - 1) \\ \times \{ \sin(\alpha - \theta_{n\dot{\epsilon}^p}) + \sin \theta_{n\dot{\epsilon}^p} \} \} \quad \dots\dots\dots (32) \\ \theta_{n\dot{\epsilon}^p} = \cos^{-1} [\{ -\cos \alpha_{\max} \cos \alpha + 1 \} \\ / \{ (\cos \alpha_{\max})^2 + 1 - 2 \cos \alpha \cos \alpha_{\max} \}^{1/2}] \end{aligned}$$

これらの関係を $\alpha_{\max} = 120$ 度, $H' = .98$ GPa, $E_s = 2.94$ GPa の場合について図3に示してある。

J_2 -変形論は、この例では約45度付近までは合理的なことがわかるが、この関係は $\alpha_{\max}$ に依存しないの

図3 既存角点則における $\mu(\alpha)$, $\theta_{n\dot{\epsilon}^p}$

で角点が形成されてない場合は比例負荷に対してのみ正しいことになる。他の二つの角点則は若干の相違はあるがよく似た傾向を示しており妥当な結果と言えよう。しかしながら、Christofferson-Hutchinson 則には角点形成との物理的関連が明確でないセカント係数 E_s が含まれているので応用性の面から不都合なことも予想される。例えば、伊藤は現象論的考察により平面応力に限定はされるが図中の関係をえており⁽³⁾、これにはセカント係数は含まれていない。したがって、こうした考察あるいは結晶学的数値計算により得られた結果を取り込む場合は問題となろう。

4. μ , $\theta_{n\dot{\epsilon}^p}$ に初等関数を

割り当てる例題

μ , $\theta_{n\dot{\epsilon}^p}$ を用いた表現の有性用がいくつかの例題を通して示された。本報においては、K. B. W. モデルを用いた伊藤による計算結果⁽³⁾ の特徴を比較的良好に近似し、かつ簡単な次のような関数形が選択された。

$$\mu_0 \equiv \cos(.5\pi\alpha/\alpha_{\max})$$

$$\bar{\theta}_{n\dot{\epsilon}^p} \equiv (\alpha_{\max} - .5\pi)\alpha/\alpha_{\max}$$

さらに、図3中に示されるいくつかの既存則に近い関数形として次のものを選択した。

$$\mu_1 \equiv \mu_0^{9/5}$$

$$\bar{\theta}_{n\dot{\epsilon}^p} \equiv (\alpha_{\max} - .5\pi)(\alpha/\alpha_{\max})^2$$

$$\bar{\theta}_{n\dot{\epsilon}^p} \equiv (\alpha_{\max} - .5\pi)(2 - \alpha/\alpha_{\max})\alpha/\alpha_{\max}$$

4.1 瞬間有効せん断係数への影響 Hutchinson

は、多結晶モデルを用いて単軸引張負荷の後にせん断力が加わる変形を解析し、変形抵抗の目安として瞬間有効せん断係数なる量を導入した⁽⁸⁾。本報中でこれに相当するのが、 G^* であり、上記の簡単な関数形の組合せを特性とする構成関係が G^* に及ぼす影響を図4に示す。応力増分の振れ角 α が小さい範囲においては $\theta_{n\dot{\epsilon}^p}$ の関数形が μ よりも影響し、 α が大きい範囲

図4 $\mu(\alpha)$, $\theta_{n\dot{\epsilon}^p}$ の種々の組合せによる瞬間有効せん断係数の比較

ではその逆であることがわかる。

4.2 剛塑性薄肉円管の塑性不安定⁽⁹⁾ 図5に示すように円管に内圧 p , 軸引張力 P およびトルク T が同時に作用しているとし, 現在の半径を r また壁厚を t とする。不安定発生までは変形は一様であるとする。仮想的無限小外乱として無限小くびれが生じたとし, 仮想変動に δ を付して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \delta\tau_{\theta z} &= \tau\delta\varepsilon_z \\ \delta\sigma_z &= \sigma_z\delta\varepsilon_z + \sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta \\ \delta\sigma_\theta &= \sigma_\theta(2\delta\varepsilon_\theta + \varepsilon\delta\varepsilon_z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &\equiv pr/t \\ \sigma_z &\equiv p/(2\pi rt) + rp/(2t) \\ \tau_{\theta z} &\equiv T/(2\pi rt) = \tau \end{aligned}$$

Swift の安定判別条件は旧来の塑性ポテンシャル則に対して $\delta\bar{\sigma} \geq \Delta\bar{\sigma}$ とされているが, 角点則に対するより一般的な条件として次式を仮定する。

$$\delta\bar{\sigma} \geq \Delta\bar{\sigma} \dots\dots\dots (34)$$

ここで, $\delta\bar{\sigma}$ は上の仮想変動応力偏差成分の大きさに対応する量で, $\Delta\bar{\sigma}$ は材料の硬化特性によるものである。また, $\delta\bar{\sigma}$ は $\delta\bar{\sigma}$ の n 方向への写影成分であり, $\Delta\bar{\sigma}$ についても同様である。さて, 式(33)に式(10), (11)を代入すると次式を得る。

$$\delta\bar{\sigma}\mu(\alpha)/\cos\alpha \geq H'\delta\varepsilon \dots\dots\dots (35)$$

一般に $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ に対して $\mu(\alpha)/\cos\alpha \geq 1$ だから拡張された条件式(35)は従来の条件よりも達成されやすいことになる。実際, 条件式(35)に仮想変動応力を代入して計算すると次式を得る。

$$H'/\bar{\sigma} \leq [\sqrt{3}\mu(3\lambda_1^2 + 3\lambda_1 + 1)A^2 - A + 1 + 3B^2]^{1/2} / [2(A^2 - A + 1 + 3B^2)^{1/2}(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1 + .25\lambda_2^2)^{1/2}]$$

また, 剛塑性材を前提とするので塑性成分だけを考えればよく, $\cos\theta_{n\dot{\varepsilon}^p} = \sigma' : \dot{\varepsilon}' / |\sigma'| |\dot{\varepsilon}'|$ より次式を得る。

図5 p, P, T の作用する円管

$$\cos\theta_{n\dot{\varepsilon}^p} = \pm [\sqrt{3}(A\lambda_1 + 1 + B\lambda_2)] / [2(A^2 - A + 1 + 3B^2)^{1/2}(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1 + .25\lambda_2^2)^{1/2}]$$

ここで,

$$\begin{aligned} A &\equiv \sigma_\theta/\sigma_z, B \equiv \tau/\sigma_z \\ \lambda_1 &\equiv \delta\varepsilon_\theta/\delta\varepsilon_z, \lambda_2 \equiv \delta\gamma/\delta\varepsilon_z \end{aligned}$$

拡張された条件より得られた結果を図6に示すが, わずかながら角点則の場合は曲線が上に移動する。

5. ま と め

角点則に対して得られた本報の表現は形式的には従来の塑性ポテンシャル論と全く同様であり, したがって流れ則に基づいて既に開発されてきた有限要素法等の数値解析プログラムに容易に取り入れることができると思われる。しかしながら, 式(25)は形式的には応力増分とひずみ増分との比例関係のように表されているが, G^*, S^* に α が含まれているので実際には非線形関係であることに注意が必要である。条件(i), (ii)を満足する $\mu(\alpha), \theta_{n\dot{\varepsilon}^p}(\alpha)$ であればよいので, 例えば今後盛んになると予想される多結晶体理論に基づく数値計算や精密な実験等でこれらに関する情報が得られるならばこの表現を容易に利用できよう。

付録 逆表示の唯一性について

【証明】 式(22)より次式を得る。

$$\sigma' : \dot{\varepsilon}' = \left(\frac{\cos\alpha}{3G^*} + K_F \frac{\mu}{H'} \right) \bar{\sigma} \bar{\dot{\varepsilon}} \dots\dots\dots (36)$$

これより, $n = \sigma' / |\sigma'|$ において次式を得る。

$$\frac{n : \dot{\varepsilon}'}{\bar{\dot{\varepsilon}}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{6}G^*} + K_F \frac{\sqrt{3}\mu}{\sqrt{2}H'} \dots\dots\dots (37)$$

ここで, 式(5), (7), (11)を式(37)に代入すると次式を得る。

$$\frac{n : \dot{\varepsilon}'}{\bar{\dot{\varepsilon}}^p} = \frac{H' \cos\alpha}{\sqrt{6}G\mu} + \frac{\sqrt{3} \cos\theta_{n\dot{\varepsilon}^p}}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots (38)$$

図6 塑性不安定に対する角点則の影響

ところで、式(19)同志の内積をとった結果に式(11)の
関係や弾性成分について Hooke の法則が仮定されて
いることを考慮すると次の関係を得る。

$$\bar{\epsilon} = \{9G^2\mu^2 + H'^2 + 6G\mu H' \times \cos(\alpha - \theta_{n\epsilon'})\}^{1/2} \bar{\epsilon}' / (3G\mu) \dots \dots \dots (39)$$

これを式(38)に代入し、唯一性を議論するための基礎
式として次の関係を得る。

$$\frac{n: \dot{\epsilon}'}{\sqrt{3/2} \bar{\epsilon}} = \frac{H' \cos \alpha}{\{9G^2\mu^2 + H'^2\}^{1/2}} \times \frac{+3G\mu \cos \theta_{n\epsilon'}}{+6G\mu H' \cos(\alpha - \theta_{n\epsilon'})} \dots \dots \dots (40)$$

さて、ここで簡略のため左辺を $\cos \theta_{n\epsilon'}$ とおき、右辺
を $F(\alpha)$ とおいて式(40)の持つ意味を考えてみる。ま
ず、条件(i), (ii)より次の結果を得る。

$$\alpha = 0 \text{ のとき } F(0) = 1$$

$$\therefore \theta_{n\epsilon'} = 0$$

$$\alpha = \alpha_{\max} \text{ のとき } F(\alpha_{\max}) = \cos \alpha_{\max}$$

$$\therefore \theta_{n\epsilon'} = \alpha_{\max}$$

すなわち、塑性変形の継続しうる偏差ひずみ増分 $\dot{\epsilon}'$
の方向の範囲は対応する偏差応力増分 $\dot{\sigma}'$ のとりうる
範囲と一致するのである。したがって与えられた任意
の $\dot{\epsilon}'$ に対して、 $(n: \dot{\epsilon}') / (\sqrt{3/2} \bar{\epsilon}) \leq \cos \alpha_{\max}$ のときは
除荷と判定でき、Hooke の法則が成立しその逆表示
は明らかに唯一である。よって、問題は $(n: \dot{\epsilon}') /$
 $(\sqrt{3/2} \bar{\epsilon}) > \cos \alpha_{\max}$ となる範囲の塑性負荷に限って考
察すればよい。さて、 $dF/d\alpha$ を求めた結果を整理する
と次のようになる。

$$\begin{aligned} dF/d\alpha = & [-H' \{H'^2 \sin \alpha + 3GH'\mu \sin \theta_{n\epsilon'} \\ & + 3G\mu(3G\mu \sin \theta_{n\epsilon'} \\ & + H' \sin \alpha) \cos(\alpha - \theta_{n\epsilon'})\} \\ & + 3GH' (d\mu/d\alpha) \{\sin(\alpha - \theta_{n\epsilon'}) (H' \sin \alpha \\ & + 3G\mu \sin \theta_{n\epsilon'})\} - 3G\mu (d\theta_{n\epsilon'}/d\alpha)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \{9G^2\mu^2 \sin \theta_{n\epsilon'} + 3G\mu H' \sin \alpha + H' \\ & \times (H' \sin \alpha + 3G\mu \sin \theta_{n\epsilon'}) \cos(\alpha - \theta_{n\epsilon'})\} \\ & / \{9G^2\mu^2 + H'^2 + 6G\mu H' \cos(\alpha - \theta_{n\epsilon'})\}^{3/2} \\ & \dots \dots \dots (41) \end{aligned}$$

式(41)は(i)~(ii)の条件下では常に負となることが
容易にわかり、すなわち $F(\alpha)$ は α について単調減少
関数となる。いま、式(40)の左辺が任意の $\dot{\epsilon}'$ に対して

$$1 \geq (n: \dot{\epsilon}') / (\sqrt{3/2} \bar{\epsilon}) > \cos \alpha_{\max}$$

となること、および $F(\alpha)$ が同範囲の値をとること
から、式(40)を α についての方程式と考えるとき、式
(40)は任意の $\dot{\epsilon}'$ に対して唯一の α を与えることは明
白となる。

したがって、条件(i), (ii)を満足するような
 $\mu(\alpha)$, $\theta_{n\epsilon'}(\alpha)$ が与えられているとすれば、 α が唯一と
なるので、式(8)より K_F , K_D が唯一となり、さらに
式(21)および式(24)より G^* , S^* が唯一に定まること
になり、結局式(25)によって唯一の応力増分が定まる
ことになる。剛塑性材に対しては、式(40)において G
 $\rightarrow \infty$ とすると $F(\alpha) = \cos \theta_{n\epsilon'}$ となり条件(ii)より単
調減少性が明らかなので唯一性が保証される。

文 献

- (1) 吉田・ほか4名, 機論, 43-368 (昭52), 1231.
- (2) 高橋・ほか2名, 機論, 49-443, A (昭57), 876.
- (3) 伊藤・竹山, 塑性と加工, 23-256 (昭57), 252.
- (4) 後藤, 機論, 47-424, A (昭56), 1389.
- (5) Christoffersen, J. and Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 27-516 (1979), 465.
- (6) 後藤, 機論, 48-428, A (昭57), 493.
- (7) 呉屋, 琉球大学教育学部紀要, 30, Part 2, (昭62), 157.
- (8) Hutchinson, J. W., *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 319 (1970), 247.
- (9) 後藤, 塑性学, (昭60), 110, コロナ社.