境界要素法による弾性接触問題の解析^{*}
(ペナルティ法によるアプローチ)山崎光悦^{*1}, 森雅弘^{*2}Analysis of an Elastic Contact Problem by Applying the Boundary Element Method
(An Approach Using the Penalty Function Method)

Kouetsu YAMAZAKI and Masahiro MORI

A boundary element method (BEM) for elastic contact problems is developed using the penalty function method. The contact conditions of slip, stick and opening states on the contact area are included in the virtual work function and a system integral equation of boundary values is formulated without an increase of the unknown parameter by introducing the penalty coefficients.

A BEM based on this formulation is applied to typical two-dimensional contact problems such as those of a block-plate and a disk-plate. The numerical results agree well with the analytical solutions.

Key Words: Structural Analysis, Elasticity, Elastic Contact Problem, Boundary Element Method, Penalty Function Method.

1. 緒言

歯車, 軸受, はめ合構造など工学分野では複数の部材が接触することにより力を伝達あるいは支持する場合が多く, これら接触する部材間に生ずる接触応力場を解明することは極めて重要である. 任意形状を有する物体間の接触問題に対して有限要素法を用いた解析手法が, これまでにも多く研究されており^{(1)~(3)}, 中でも有用性の高いものとして矢川らが提案したペナルティ法による手法が挙げられる. これは, ペナルティ法により接触条件式を付帯条件として全体剛性方程式に組み込む手法で⁽⁴⁾ (1)自由度の増加がない(2)剛性マトリックス等の大幅な変形を要しない, (3)クーロンの摩擦条件を満足させるための繰り返しを必要としない, などの優れた特徴を持つ. しかし, ペナルティ法による手法をはじめとする有限要素法による手法では解析精度上, 接触境界面近傍で細かい要素分割が必要となるため, 分割データの作成に多くの労力を

要し, また計算機の容量, スピードの点などから, 実際に3次元物体に適用することは現実的でないことが多い.

一方, 近年飛躍的な進歩を遂げた境界要素法は, 有限要素法に比べ最終的に解くべき方程式の次元が小さく, 解析データの準備も容易である. また, 表面力を直接節点量として取り扱うことができるため, 特に接触問題を解析する場合, 接触条件式の考慮が容易となりその精度も向上する. 薦⁽⁵⁾, Anderson⁽⁶⁾らは, いくつかの基本的な弾性接触問題を境界要素法により解析し良い結果を得ている. しかし, これらはいずれも積分方程式の変形により接触条件を直接組み込む手法であるため, 繰り返しの計算過程において大幅なマトリックスの変形演算を要する. さらに最近岸本らはペナルティ法を適用した手法⁽⁷⁾を提案しているが最終的な離散化の段階で有限要素法的な定式化を行っており, 従来の方法同様効率の点で問題がある.

そこで, 本研究では境界要素法にペナルティ法を適用した効率的な接触問題の解析手法を提案する. 本手法は接触問題に対する境界要素法の有利さと, ペナルティ法を持つ有効性を兼ね備えたものとなる. 以下では重み付き残差法を通して接触条件式の組み込みにペ

^{*} 昭和63年3月18日 関西支部第63期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和62年6月8日.

^{*1} 正員, 金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野2-40-20).

^{*2} 学生員, 金沢大学大学院.

ナルティ法を用いた定式化を行い、その具体的な離散化を示す。また、本手法をいくつかの例題に適用した解析結果とその考察を示す。

2. 接触応力場の解析手法

2.1 接触条件式と判定条件式 ここでは、図1に示すような平面領域 Ω^A, Ω^B を占める2つの弾性体A, Bが、境界 Γ_c を介して接触する2次元の弾性接触問題を考える。ここで、物体AおよびBの境界を Γ^A, Γ^B とし、また、接触して平衡が保たれる前に Γ_c が物体A, Bを占めていた領域を Γ_c^A, Γ_c^B で表す。微小変形のもとでは $\Gamma_c = \Gamma_c^A = \Gamma_c^B$ となる。接触状態には、(1)口開き状態 (o: 接触していない状態)、(2)固着状態 (st: 接触しているが、すべりを生じていない状態)、(3)相対すべり状態 (sl: 接触し、かつすべりを生じている状態)の3種を考える。接触境界面上では接触条件が考慮しやすいように図2に示すような局所直交座標系 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ をとる。以下では局所座標系での変数を上付き $\sim$ で表すものとする。

荷重が負荷されない状態における両物体間の距離を $\tilde{d}_0$ とし、摩擦係数を μ とすると、各接触状態における接触条件式は、力の平衡条件、変位の連続条件、およびクーロンの摩擦条件によりそれぞれ表1のように

図1 接触する2物体

図2 接触境界面上での局所座標系

表される。表1中、式①, ②は接触面に力が作用していないことを、式④および式⑤は接触していることを、式③はすべりが生じていないこと、式⑥はクーロンの摩擦条件をそれぞれ表している。ただし、式⑤の複号はすべり方向に依存する。さて、接触問題では当然接触状態が未知であるため、解析計算を行う際にはそれらをあらかじめ仮定しておく必要がある。そして、その結果が仮定した状態と矛盾していないかを判定し、もし矛盾があれば仮定を修正し再び計算を行う。このとき必要となる判定条件式をまとめると、表2(a), (b)のようになる。(a)は接触しているか、いないかの判定条件式を、また (b)は接触している場合さらにすべりが生じているか、いないかの判定条件式をそれぞれ表している。

2.2 境界積分方程式 接触する2物体A, Bについての線形弾性問題の支配微分方程式および境界条件は、次式で与えられる。

$$\sigma_{jk, j} + b_k^f = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$u_k^f = \bar{u}_k^f \quad ; \Gamma_u \text{上} \quad \dots \quad (2)$$

$$p_k^f = \bar{p}_k^f \quad ; \Gamma_p \text{上} \quad \dots \quad (3)$$

ここに、 β は物体A, Bを表し、また σ_{jk}^f, b_k^f は物体に作用する応力および物体力を、 u_k, p_k は変位および表面力を表す。式(2)は変位が規定される境界 Γ_u 上での基本境界条件を、式(3)は表面力が規定される境界 Γ_p 上での自然境界条件をそれぞれ表す。また $\bar{u}_k$,

表1 接触条件式

Opening	$\bar{p}_x = 0 \quad \dots \quad \textcircled{1}, \quad \bar{p}_y = 0 \quad \dots \quad \textcircled{2}$
Sticking	$\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B = 0 \quad \dots \quad \textcircled{3}, \quad \tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B - \tilde{d}_0 = 0 \quad \dots \quad \textcircled{4}$
Slipping	$\bar{p}_x = \pm \mu \bar{p}_y \quad \dots \quad \textcircled{5}, \quad \tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B - \tilde{d}_0 = 0 \quad \dots \quad \textcircled{6}$

表2 判定条件式

(a)

Judgement Assumption	Opening	Sticking Slipping
Opening	$\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B - \tilde{d}_0 > 0$	$\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B - \tilde{d}_0 \leq 0$
Sticking Slipping	$\bar{p}_y < 0$	$\bar{p}_y \geq 0$

(b)

Judgement Assumption	Sticking	Slipping
Sticking	$ \bar{p}_x \leq \mu \bar{p}_y $	$ \bar{p}_x > \mu \bar{p}_y $
Slipping	$\bar{p}_x (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) > 0$	$\bar{p}_x (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) \leq 0$

$\bar{p}_k$ は境界上での規定値を表す。一般に弾性問題は、式(2)、(3)で与えられる境界条件のもとで支配微分方程式(1)を満足する解を求めるものであり、これは式(1)を Euler-Lagrange の方程式とする汎関数の停留解を求めることと同等である。この汎関数を π とすると

$$\delta\pi^\beta = \int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}^\beta + b_k^\beta) \delta u_k^\beta d\Omega - \int_{\Gamma_p} (p_k^\beta - \bar{p}_k^\beta) \delta u_k^\beta d\Gamma = 0 \quad \dots \quad (4)$$

となる。ここで、 δ は変分を表す。式(4)は仮想仕事の原理を表し、通常有限要素法では基礎式として用いられる。

さて、いま図1に示すように異なる2つの物体A、Bが接触する場合を考える。接触境界面では、各状態に応じて表1の接触条件式①～⑥を満足しなければならない。そこで、ラグランジュ未定乗数 p_k^* を導入し、これらの接触条件式を付帯条件式として組み込んだ2物体についての新しい汎関数 Π を考える。

$$\begin{aligned} \Pi = & \pi^A + \pi^B \\ & + \int_{\Gamma_{st}} \bar{p}_x^* (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) d\Gamma + \int_{\Gamma_{sl}} \bar{p}_x (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{st} + \Gamma_{sl}} \bar{p}_y^* (\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B + \bar{d}_0) d\Gamma \quad \dots \quad (5) \end{aligned}$$

ただし、 Γ_{st} は固着領域、 Γ_{sl} はすべり領域を表し、また

$$\bar{p}_x = \pm \mu \bar{p}_y \quad \dots \quad (6)$$

である。式(5)中、 π_A 、 π_B は物体A、Bの汎関数を表し、またラグランジュ未定乗数 $\bar{p}_x^*$ 、 $\bar{p}_y^*$ の物理的意味は、それぞれの接触力 $\bar{p}_x$ 、 $\bar{p}_y$ に等しい。この汎関数に変分操作を行い $\delta\Pi=0$ とすると

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \delta\pi^A + \delta\pi^B \\ & + \int_{\Gamma_{st}} \bar{p}_x^* (\delta\tilde{u}_x^A - \delta\tilde{u}_x^B) d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} \delta\bar{p}_x^* (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{sl}} \bar{p}_x (\delta\tilde{u}_x^A - \delta\tilde{u}_x^B) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{st} + \Gamma_{sl}} \bar{p}_y^* (\delta\tilde{u}_y^A - \delta\tilde{u}_y^B) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{st} + \Gamma_{sl}} \delta\bar{p}_y^* (\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B + \bar{d}_0) d\Gamma = 0 \quad \dots \quad (7) \end{aligned}$$

すなわち、式(7)が線形弾性体の接触問題に対する仮想仕事の原理に相当する。一方見方を変えると上式は重み関数が δu_k の重み付き残差の式と解釈することもできる。この場合、重み関数は求めるべき関数と同種の関数であり、基本境界条件式(2)を恒等的に満足するものでなければならない。いま、境界要素法に適用するため重み関数 δu_k の代わりに式(1)に対応した基

本解 u_k^* を用いる。このとき、 u_k^* は基本境界条件を満足しないため重み付き残差の式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}^\beta + b_k^\beta) u_k^* d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_p} (p_k^\beta - \bar{p}_k^\beta) u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} p_k^* (u_k^\beta - \bar{u}_k^\beta) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{st}} \bar{p}_x^* (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) d\Gamma - \int_{\Gamma_{st}} \delta\bar{p}_x^* (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{sl}} \bar{p}_x (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{st} + \Gamma_{sl}} \bar{p}_y^* (\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{st} + \Gamma_{sl}} \delta\bar{p}_y^* (\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B + \bar{d}_0) d\Gamma \quad \dots \quad (8) \end{aligned}$$

ここに、 β に関する項は物体A、Bについての和をとるものとする。また、 p_k^* は u_k^* に対応する応力 σ_{kj}^* および境界外向き法線 n_j^β により

$$p_k^* = \sigma_{jk}^* n_j^\beta \quad \dots \quad (9)$$

で与えられる。式(8)を積分定理により境界上の積分方程式に変換すると、

$$\begin{aligned} c^i u_i + & \int_{\Gamma_p} p_k^* u_k^\beta d\Gamma = \int_{\Gamma_p} u_k^* p_k^\beta d\Gamma + \int_{\Omega} u_k^* b_k^\beta d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_{st}} \bar{p}_x^* (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} \delta\bar{p}_x^* (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{sl}} \bar{p}_x (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{st} + \Gamma_{sl}} \bar{p}_y^* (\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{st} + \Gamma_{sl}} \delta\bar{p}_y^* (\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B + \bar{d}_0) d\Gamma \quad \dots \quad (10) \end{aligned}$$

となる。ただし、 u_i^l は i 点における l 方向の変位を表し、 c^i は滑らかな境界上で $c^i=1/2$ とする。

2.3 ペナルティ法による定式化 一般に、ペナルティ法はある拘束条件を持つ関数の停留化問題に用いられ、従来、数理計画法などの分野で多く用いられてきた。これは拘束条件を近似的に緩和した形で関数に組み込む手法であるが、ペナルティ係数が無限大となる極限では拘束条件が完全に満足されラグランジュ未定乗数法と直接的な関係を持つ⁽⁴⁾。すなわち、ペナルティ係数が無限大であるときラグランジュ乗数は拘束条件式にペナルティ係数を乗じたものと等価となる。このときの関係を用いると固着領域におけるラグランジュ未定乗数 $\bar{p}_x^*$ 、 $\bar{p}_y^*$ は、それぞれ、

$$\bar{p}_x^* = \alpha (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) \quad \dots \quad (11)$$

$$\bar{p}_y^* = \alpha (\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B + \bar{d}_0) \quad \dots \quad (12)$$

と表せる。ここに、 α はペナルティ係数である。一方、すべり領域での接触力は $\bar{p}_x = \bar{p}_x^*$ 、 $\bar{p}_y = \bar{p}_y^*$ を考慮すれば式(6)、(12)より

$$\tilde{p}_x = \pm \mu \alpha (\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B + \tilde{\alpha}_0) \cdots \cdots (13)$$

となる。これにより、本来接触境界面では表面力（接触力）および変位共に未知であったものが、すべて変位のみを未知量として取り扱うことができる。また、 α は変分を受けない独立量であるから、

$$\delta \tilde{p}_x^* = \delta \tilde{p}_y^* = 0 \cdots \cdots (14)$$

となる。以上の関係式を式 (10) に適用すると、

$$\begin{aligned} c^i u_i + \int_{\Gamma} p_k^* u_k^{\beta} d\Gamma &= \int_{\Gamma} u_k^* p_k^{\beta} d\Gamma + \int_{\Omega} u_k^* b_k^{\beta} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_{st}} \alpha (\tilde{u}_x^A - \tilde{u}_x^B) (\tilde{u}_x^* - \tilde{u}_x^B) d\Gamma \\ &\pm \int_{\Gamma_{sl}} \mu \alpha (\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B + \tilde{\alpha}_0) (\tilde{u}_x^* - \tilde{u}_x^B) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{st} + \Gamma_{sl}} \alpha (\tilde{u}_y^A - \tilde{u}_y^B + \tilde{\alpha}_0) (\tilde{u}_y^* - \tilde{u}_y^B) d\Gamma \cdots (15) \end{aligned}$$

となる。式 (15) がペナルティ法による弾性接触問題の境界積分方程式となる。

2. 4 境界要素への離散化 簡単のため物体力の項を省略し、式 (15) をマトリックス表示すると、

$$\begin{aligned} [c] \{u\}^{\beta} + \int_{\Gamma} [H] \{u\}^{\beta} d\Gamma &= \int_{\Gamma} [G] \{p\}^{\beta} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_c} [\tilde{C}] (\{\tilde{u}\}^A - \{\tilde{u}\}^B + \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\alpha}_0 \end{Bmatrix}) d\Gamma \\ (\Gamma_c = \Gamma_o + \Gamma_{st} + \Gamma_{sl}) \cdots \cdots (16) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $\{u\}$ 、 $\{p\}$ は考える節点での変位および表面力ベクトルで

$$\{u\}^{\beta} = \begin{Bmatrix} u_x^{\beta} \\ u_y^{\beta} \end{Bmatrix}, \quad \{p\}^{\beta} = \begin{Bmatrix} p_x^{\beta} \\ p_y^{\beta} \end{Bmatrix} \cdots (17)$$

である。 $[H]$ 、 $[G]$ は Navier 方程式の基本解⁽⁸⁾で、

$$[H] = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \cdots (20)$$

となる。また、それぞれの局所座標での成分は全体座標系 (x, y) から局所座標系 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ への方向余弦マトリックス $[L]$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} \{\tilde{p}\} &= [L] \{p\}, & \{\tilde{u}\} &= [L] \{u\} \\ [\tilde{H}] &= [L] [H] [L]^T, & [\tilde{G}] &= [L] [G] [L]^T \end{aligned} \right\} (21)$$

と表される。接触境界上の積分で必要となる $[\tilde{C}]$ は各状態に応じて次のように与えられる。

$$[\tilde{C}] = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & \Gamma_o \text{ 上} \\ \alpha \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}; & \Gamma_{st} \text{ 上} \\ \alpha \begin{bmatrix} 0 & \pm \mu u_{11}^* + u_{12}^* \\ 0 & \pm \mu u_{21}^* + u_{22}^* \end{bmatrix}; & \Gamma_{sl} \text{ 上} \end{cases} \quad (22)$$

離散化のための境界要素には、2 次の 3 節点アイソパラメトリック要素を用い、積分は Gauss の数値積分により式 (16) を評価する。以上のマトリックス計算を境界上の各節点について行うことにより境界上の変位が求まる。その結果を式 (11)、(12) および (13) に代入したものが接触力となる。

3. 数値解析例

以上述べた定式化に従った接触問題解析用プログラムを作成し、いくつかの例題に適用した。以下に、その結果と考察を示す。なお、これらの解析においてはすべてペナルティ係数 $\alpha = 10^7$ を用い、計算は倍精度で行った。

3. 1 弾性ブロックの押し付け まず、接触領域が既知である場合の例として、図 3 に示すような平面弾性ブロックの押し付け問題を解析した。物体 A、B とともにヤング率 $E = 21000 \text{ kgf/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、物体 A の上端面に $f_y = 1.0 \text{ kgf/mm}^2$ の等分布荷重を負荷した。また、解析は完全すべり接触 ($\mu = 0$) および完全固着接触 ($\mu = \infty$) の 2 つの場合について行った。解析モデルは、全節点数を 77、全要素数を 35 とし、接触面には 21 対の接触節点を設けた。図 4 はそれぞれの場合の接触面に生ずる y 方向接触力分布と大久保の理論解⁽⁹⁾を示したものである。大久保の解は接触面のせん断力が 0 ($\mu = 0$) である仮定のもとに求められた解であるが、これは接触面にせん断力が作用する場合でもほぼ同じ値をとることが明らかにされており⁽¹⁰⁾、本解析はいずれも良好な結果を示している。また、図 5 は完全固着解析での x 方向接触力分布を示したものである。

3. 2 弾性円板の押し付け 次に、接触領域が未知である場合の例として図 6 に示すような、弾性平板に弾性円板を押し付ける問題を解析した。解析は両物体の材料特性が同じ場合 (Case 1) と違う場合 (Case 2) について、それぞれ $\mu = 0.0$ (完全すべり) および $\mu = 0.3$ としたものを行った。表 3 に各場合での

図3 弾性ブロックの押し付けモデル

図4 弾性ブロックの押し付けによるy方向接触力分布

図5 弾性ブロックの押し付けによるx方向接触力分布

材料特性および負荷条件を示す。解析モデルは、全節点数を 87、全要素数を 42 とし接触が予想される境界には 25 対の接触節点を設けた。

Case1の解析では、 $\mu=0$ のとき接触面全域が相対すべりとなる結果に、また、 $\mu=0.3$ のとき全域固着となる結果に収束した。そのときの $\bar{y}$ 方向接触力分布を、Hertzの理論解⁽¹¹⁾ ($\mu=0$) と共に図7に示す。横軸および縦軸は、それぞれHertzの解による接触領域の大きさ b_0 、最大接触圧 p_0 で無次元化されている。同図より本解析結果は、各 μ の場合ともHertzの解と良く一致している。 $\mu=0.3$ の解析では、全域固着接触となるため、 μ による影響が接触力分布に現れなかったものと考えられる。図8は、 $\mu=0.3$ のときの $\bar{x}$ 方向接触力分布を示したものである。分布は接触中心から離れるほど高い値を示している。

Case2の解析では、 $\mu=0$ のとき全域相対すべりとなる解に、 $\mu=0.3$ のとき接触中心付近で固着、接触端側では相対すべりとなる解にそれぞれ収束した。そのときの $\bar{y}$ 方向接触力分布をHertzの解と共に図9に示す。この場合、両物体のヤング率が大きく異なるため $\mu=0.3$ のときにも相対すべりを生ずる。しかし、完全な

表3 弾性円板の押し付けモデルの材料特性と負荷条件

		Young's Modulus (GPa)	Poisson's Ratio	Line Force ($\times 10^3$ N/m)
Case 1	Body A	3.2705	0.378	142.49
	Body B	3.2705	0.378	
Case 2	Body A	3.2705	0.378	280.57
	Body B	205.94	0.300

図6 弾性円板の押し付けモデル

図7 弾性円板の押し付けによる $\bar{y}$ 方向接触力分布 (Case 1)

図9 弾性円板の押し付けによる $\bar{y}$ 方向接触力分布 (Case 2)

図8 弾性円板の押し付けによる $\bar{x}$ 方向接触力分布 (Case 1)

図10 弾性円板の押し付けによる $\bar{x}$ 方向接触力分布 (Case 2)

すべり状態とは異なるため、Hertzの解に比べ接触領域は減少し、最大接触圧は増加している。図10はそのときの $\bar{x}$ 方向接触力分布を示したものである。固着領域では図8と同様な傾向を示しており、また相対すべり領域では $\bar{y}$ 方向と同様な分布となっている。

4. 結 言

本研究では、接触する物体間に生ずる接触応力場を正確かつ効率的に求めることを目的として、境界要素法にペナルティ法を適用した数値解析法を提案した。以下に得られた結果を要約する。

(1) ペナルティ法により接触条件式を組み込んだ積分方程式を誘導し、境界要素法への定式化を行った。

(2) いくつかの例題を解析し、その結果と理論解との比較により本手法の妥当性、有効性を確認した。

文 献

- (1) 蔦・山地，機誌，75-651 (昭 47)，348.
- (2) 岡本，機論，43-374 (昭 52)，3716.

- (3) 山田・江沢，機講論，790-3 (昭 54)，51.
- (4) 矢川・ほか2名，機論，46-411 (昭 55)，1220.
- (5) 蔦・山地，機論，46-412 (昭 55)，1421.
- (6) Anderson, T. et al., New Developments in Boundary Element Methods, (Brebbia, C.A. ed), (1980), 247.
- (7) 岸本・ほか3名，第1回境界要素法シンポジウム講演論文集，(昭 59)，61.
- (8) 例えば，田中・田中，境界要素法—基礎と応用，(昭 57)，70，丸善.
- (9) 大久保，機論，18-65 (昭 27)，58.
- (10) H. Okubo: Z. angew. Math. Mech., Bd. 20 (1940)，271.
- (11) 例えば，強度設計データブック，(昭 37)，1079，裳華房.

討 論

〔質問〕 岸本 喜久雄〔東京工業大学〕

ペナルティ法を直接、境界要素法の定式化に組み込まれたことに対し敬意を表す。以下の点についてご教示願いたい。

(1) 式(8)において、接触領域は Γ_p あるいは Γ_u のどちらかに含まれると考えるのか。もし、そうだとすると、接触領域における条件を、式(8)の2行めと3行め以下とで二重に考えていることにならないか。また、式(8)の2行めの二つの積分項を除いた式から出発しても、式(10)が得られると思うが、いかがか。

(2) 接触条件を満足する解を得るためには繰返し計算を行う必要があると思われるが、第3章の解析例では、それぞれ何回の繰返し計算で収束解が得られたのか。

〔回答〕 (1) 本来接触領域は、変位および表面力がともに未知なる境界であることから、変位が規定される境界 Γ_u および表面力が規定される境界 Γ_p のいずれにも含まれないと考えるか、あるいは接触領域 Γ_c は境界 Γ_p に含まれるがこの場合 $\bar{p}=0$ であると考え。したがって、接触に関する条件処理はすべて式(8)の3行め以後で行っており、それらが重なる部分はない。

通常の線形弾性問題に対する積分方程式すなわち式(10)の1行めは、Bettiの相反定理によって式(8)の1行めのみから直接誘導することも可能である。一方、

付表 1 繰返し計算回数

	Coefficient of Friction	Number of Calculation
Case 1	$\mu = 0.0$	4
	$\mu = 0.3$	3
Case 2	$\mu = 0.0$	4
	$\mu = 0.3$	7

重み付き残差法による定式化では一般的には境界条件に関する項すなわち式(8)の2行めが必要となるが、線形弾性問題の場合両者は全く同じ結果を与える。しかし、本論文では境界条件が非線形となる接触問題を対象としており、式(8)3行め以後の積分項についても考慮しなければならない。したがって、ここでは境界条件に関する一般性を重視し、式(8)2行めを含めた重み付き残差法による定式化を行った。

(2) 3・1節の例題では、初期仮定を各場合とも全域を固着領域と仮定して解析を行った。まず $\mu=\infty$ の解析では、1回めの計算によって全域が固着領域となる解に収束した。 $\mu=0$ の解析では、1回めの計算で全域が相対すべり領域と判定され2回めの計算で解に収束した。

3・2節の例題では、初期仮定を各場合とも接触中心点のみを固着、それ以外の領域を口開き領域と仮定して解析を行った。それぞれの場合での繰返し計算回数を付表1に示す。いずれの場合も解の収束状況は極めて良好であった。