応力規準による構造形状の有限要素シンセシス*

中 桐 滋^{*1}, 野 口 裕 久^{*2}, 谷 周 一^{*3}Finite Element Synthesis of Structure Shapes
Due to Stress Criteria

Shigeru NAKAGIRI, Hirohisa NOGUCHI, and Syuichi TANI

A method of the finite element synthesis is formulated which is based on a new notion: that the objective design is searched in the vicinity of the baseline design, while the structural response to the objective value is approximated by the first-order Taylor series expansion of the response with respect to the design variables. A functional is comprised of the squared sum of the design variables and the equality constraint conditions representing the response approach to the objective value incorporated by the Lagrange multipliers. The design variables are determined by the minimization of the functional. The numerical examples are concerned with the contour adaptation of two-dimensional elastic structures so that the concentrated stresses around the hole in a square plate under bi-axial tension and along the roots of gear tooth under bending are lowered.

Key Words: Design Engineering, Structural Synthesis, Structure Shape, Finite Element Method, Stress Criterion

1. 緒 言

与えられた構造形状, 力学的境界条件, 幾何学的境界条件および材料定数に対する構造応答を求めることは有限要素解析等により現在ではかなり可能になっている。この構造解析に対して, 望ましい構造応答を得るための構造形状を決定することは構造のシンセシスを行うことであり, 一種の逆問題となる。これまで逆変分原理または最適化技法により種々の構造形状決定手法が提案されている^{(1)~(4)}。従来の形状決定手法はいずれも形状の反復修正を伴う。収束形状を得るまでの反復回数が多いことは, 1 回の反復に演算時間のかかる有限要素法の観点からは望ましくない。逆問題においては決定すべき形状の唯一性は保証されていないので, 多様な候補形状の中から目標形状を探索することになる。ここに従来の形状決定手法では多数の反復回数を要する一因があると考えられる。

本報においては, 目標形状を原形状のなるべく近い

ところで探索するとの概念に基づく形状決定手法を呈示する⁽⁵⁾。この概念は, 原形状と目標形状の応答の差を小さくするように設計変数を定める従来の概念とは異なるものである。すなわち, 構造応答変化の設計変数に関する一次近似で目標応答に接近することを制約条件として設計変数の自乗和の最小化により設計変数を定めようとするものである。

構造応答の内, 本報では応力を目標値に設定し, 対象構造がその応力規準を満足するように形状を決定する二次元線形弾性問題に関する有限要素解析例により定式の妥当性を検討する。

2. 感度解析を利用した設計変数の決定

有限要素法においては構造形状は輪郭線上の節点座標値により定められるので, 変更対象領域内の節点座標値に関して総数 N 個の設計変数 a_n をとる。例えば x 座標については式(1)のように変更後の座標値 x_n を変更前の座標値 $\bar{x}_n$ を用いて表す(以後上付き棒記号は原形状もしくは, 反復途中の形状に関するものであることを意味する)。

$$x_n = \bar{x}_n(1 + a_n) \quad (n=1 \sim N) \quad \dots\dots\dots (1)$$

総数 J 個の着目する応力成分 σ_j については, 変更前の応力値 $\bar{\sigma}_j$ と設計変数 a_n に関する感度, 換言すれば

* 昭和 63 年 3 月 31 日 第 65 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 62 年 10 月 28 日。

^{*1} 正員, 東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)。

^{*2} 正員, (株)三菱総合研究所 (〒100 東京都千代田区大手町 2-3-6)。

^{*3} 正員, 三菱電機(株) (〒661 尼崎市塚口本町 8-1-1)。

一次変動率, は有限要素解析により既知であるとする⁽⁶⁾。このとき, 節点座標の変更に伴う応力の変動を設計変数に関する一次 Taylor 級数展開により表示すれば, 変更後の応力について式(2)の近似式が得られる。

$$z_j = \bar{z}_j + \sum_{n=1}^N z'_{jn} \alpha_n \quad \dots\dots\dots (2)$$

応力 z_j の目標値を $\bar{z}_j$ として, この目標値には式(2)の近似式により接近する。一方, 目標形状を原形状になるべく近いところで探索するとの概念を設計変数 α_n の自乗和を最小にすることにより表し, 上記接近条件を等式制約条件として J 個の Lagrange 乗数 μ_j を用いて取り入れ, 式(3)の汎関数 π を構成する。

$$\pi = \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \sum_{j=1}^J \mu_j \left(z_j - \bar{z}_j - \sum_{n=1}^N z'_{jn} \alpha_n \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(3)の α_n および μ_j に関する極値化条件式(4), (5)の結果をマトリックス表示して, 設計変数 α_n の決定方程式が式(6)と得られる。

$$\partial \pi / \partial \alpha_n = 0 \quad (n=1 \sim N) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\partial \pi / \partial \mu_j = 0 \quad (j=1 \sim J) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & -z'_{11} & \dots & -z'_{1N} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 2 & -z'_{N1} & \dots & -z'_{NN} \\ \hline & & & 0 & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{z}_1 - z_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_J - z_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

SYM.

式(2)はあくまでも応力変動の一次近似式であり, これに基づく式(6)を解いて得られる設計変数 α_n による一回の形状変更で目標形状は達成されない。式(6)より得られる α_n を用いて, 形状を順次変更し, $\bar{x}_n, \bar{z}_j, z'_{jn}$ を更新して形状変更を反復することは本定式においても必要である。この反復について, 設計変数を原形状からの変更の増分にとる定式も可能である⁽⁷⁾。その定式によれば, 原形状から最小の形状変更が得られるが, 本報では, 原形状になるべく近い形状を探索することとし, 定式の簡単な式(6)を用いる。

3. 応力変動の一次近似による推定

本報では応力規準による形状決定が主題であり, 節

点座標変化による有限要素応力解の感度を評価する必要がある。数値計算例においては三角形定ひずみ要素を用いる平面応力場問題を取扱うので, 弾性定数と要素板厚は一定であるとして平面応力場の応力・ひずみマトリックス $[D]$ を用い, $[D]$ は不変とする。式(1)で表される節点座標の変化によるひずみ・節点変位マトリックス $[B]$ の変動を, 関与する設計変数 α_n について式(7)の一次近似式で表すことは容易である。

$$[B] = [\bar{B}] + \sum_{n=1}^N [B'_n] \alpha_n \quad \dots\dots\dots (7)$$

節点座標の変化により要素面積 S も変動し, その一次近似式は式(8)と得られる。

$$S = \bar{S} + \sum_{n=1}^N S'_n \alpha_n \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで, $[B'_n], S'_n$ は $[B]$ と S の α_n に関する微分により評価されるものである。 $[D], [B], S$ を用いて要素剛性マトリックス $[k]$ の一次近似式を求めると, 肩符 T はマトリックスの転置を表すとして

$$[k] = [\bar{k}] + \sum_{n=1}^N [k'_n] \alpha_n \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$[\bar{k}] = \bar{S} [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$[k'_n] = \bar{S} ([B'_n]^T [D] [\bar{B}] + [\bar{B}]^T [D] [B'_n] + S'_n [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}]) \quad \dots\dots\dots (11)$$

と得られる。 $[k]$ の重ね合わせにより系全体の剛性マトリックス変動の一次近似式は式(12)とまとめられる。

$$[K] = [\bar{K}] + \sum_{n=1}^N [K'_n] \alpha_n \quad \dots\dots\dots (12)$$

節点変位 $\{U\}$ の変動の一次近似式を式(13)の形に仮定すると一次摂動法に基づき節点力 $\{F\}$ が不変である場合は式(14), (15)の結果が得られる⁽⁶⁾。

$$\{U\} = \{\bar{U}\} + \sum_{n=1}^N \{U'_n\} \alpha_n \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\{\bar{U}\} = [\bar{K}]^{-1} \{F\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\{U'_n\} = -[\bar{K}]^{-1} [K'_n] \{\bar{U}\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

このようにして得られた節点変位の感度 $\{U'_n\}$ の内, 注目要素に関する感度成分 $\{U'_n\}$ と節点変位成分 $\{\bar{U}\}$ を用いると応力成分 $\{\sigma\}$ の感度は式(16)と得られる。

$$\{\sigma'_n\} = [D] ([\bar{B}] \{U'_n\} + [B'_n] \{\bar{U}\}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

この結果に基づき, 任意の応力成分または相当応力の一次近似が式(2)の形で得られる。

以上では, 節点座標の変化の及ぼす影響をすべて一次近似している。また本定式では設計変数を決定するために式(6)の反復を繰返している。このとき, 一次近似に用いる感度 z'_{jn} には高精度は要求されないようにも見受けられるが, 反復収束を早めるためにはこの感度を繰返しごとに精度よく求めておくことが必要で

ある。本報では記述しないが、形状変更により外力のかかり方が変化する場合には、この外力変動の影響も評価に入れておかねばならない。

4. 数値計算例

4.1 テーパー付平板の形状変更 図1に示す長手方向に引張りを受けるテーパー付平板（上下対称性を利用した1/2モデル）の長手方向応力を初期形状における最小値に揃える問題により本定式の可能性を検討する。この問題の一つの解は、板幅を最大値に一定に揃えたものであることは直感的にわかる。設計変数は斜辺上の10個の節点 y 座標とし、上側10個の要素の長手方向応力を初期形状における最小値2 MPaに一致させるとして10個の制約条件を用いる。式(6)の反復計算による応力分布と形状の一定値への収束も同図内に示す。本計算では3回の反復により目標形状が得られている。使用要素は一定ひずみ要素で、しかも要素が横断面を貫通しているので、一定応力の条件は前記制約条件で満たされている。このことから、設計変数と制約条件の選択が適切であれば、本定式はかなり大きい形状変更も少数の反復で可能となるものであることがわかる。しかし、例えば右半分5個の要素にのみ前記制約条件を課すのみでは、反復後解は収束するが、得られた形状は斜辺に折れ曲りを有する。これは板長手方向に応力一定の条件が課されていないためである。

図1 テーパー付平板の一定板幅平板への変更

4.2 有孔正方形板の孔形状 図2(a)に示す中央に円孔のある正方形板（図形対称性を利用した1/4モデル）が x, y 軸方向に1:2の一樣引張を受けるとき、孔周縁の相当応力を一定とする孔形状を求める。図3に原形状の円孔周縁の相当応力分布を示し、この応力分布を3 MPa一定にする問題を設定する。設計変数は周縁上の9個の節点 x, y 座標とする。4.1節で得られた知見に基づき、制約条件は周縁上に一辺を有する8個の要素全ての相当応力について課する。この問題では有限要素解の精度を保持するため、周縁上の節点座標のみならず、内部の節点座標も変化させねばならない。本例では、簡単に内部節点の移動量は右上隅点から周縁節点と内部節点までの距離に比例するように周縁節点の移動量に関して定めた。本例では、初期応力分布から一定応力分布へと目標を一段に設定すると、図2(d)に示すような有限要素のつぶれを生じ、反復修正を続行できなくなる。そこで図3に一点鎖線で示す応力分布の中間目標を設定すると各反復時の節点移動量が小さくなり、つぶれを生ずることなく長短径比2のだ円が得られる⁽⁴⁾。図2(b)は3回の反復で中間応力目標値に達したときの、図2(c)は14回の反復で得られた孔形状を示す。図4は孔の長径および短径の収束状況を示す。同図中の数値は目標応力値を規準にとった応力の誤差を%表示したものである。すなわち、3回反復で中間目標値に達したときの応力誤差は0.06%、その後最終目標値に向かうとき反復7回で応力誤差は0.54%であるが長短径比は十分には収束しておらず、反復12回で収束し、14回での応力誤差は0.04%と極めて精度が良い。この図より応力を目標値にとると、応力の目標値への収束のほうが節点位置の目標値への収束より早いことがわかる。

4.3 インボリュート平歯車の歯形形状 図5に示す鋼製インボリュート平歯車の応力低減を目的として歯形の形状変更をする問題を提起する⁽⁸⁾。図の矢印は2 kNの加力点、加力方向を示し、歯表面A~B、C~Dに沿う要素の相当応力（単位はMPa、以下同じ）を図中に付記する。加力状態は図の中心線に関して非

図2 応力低減による円孔からだ円孔への変更

有限要素のつぶれ

対称であるが、歯車の機能上歯形は中心線に関して対称でなければならない。そこで、図6に示す表面E~Fに沿う8個の要素の相当応力を図中に示す値に、同図に黒丸印で示す節点座標を設計変数にとり、かつ、中心線に関する歯形対称性を保って、低減する問題を想定する。本例においては7回の反復で応力は目標値に収束している。応力低減量はさほど大きくないので、4・2節で述べた中間目標を設定しなくても速い収束が得られている。図7左側に初期形状における相当応力の等高線を、右側に変更収束後の形状における等高線を示す。歯元における応力状態が歯形変更により大きく緩和されていることがわかる。4・2節の例より要素のつぶれも生じ得ることが判明したので本例では輪郭上の節点座標の変更に伴い、図8左図に示す網目を境界適合 (boundary fitting) 法により構成し、この網目結節点に有限要素の内部節点を移動した。7回の反復で収束した形状を図8右図に示す。初期形状と視覚的には大差が認められないが、同図に黒点で示す節点の移動量が最大であり、ほぼ水平に3.49 mmであった。類似の歯形変更を取扱っている例⁽⁸⁾では8回の反復でも収束しているとは言い難い。本報で述べた定式では収束までの所要反復数はおおむね10回未満であり、

図3 孔周縁の応力分布

図4 孔の長径および短径の収束状況

図5 平歯車の初期形状と相当応力分布

図6 歯形変更の相当応力目標値と座標変更節点

図7 初期形状と収束形状の相当応力分布

図8 境界適合による内部節点配置と最終形状

定式の簡単さと相まって、シンセシスの手法として十分利用できると思われる。

本計算は、応力規準による形状変更が本定式で可能か否かをまず検討したものである。したがって、変更後の形状が歯車として歯形形状に要求される条件を満たしているか否かの詳細な検討は本論文中には行っていない。歯形形状に要求される諸条件を加えた事例研究は今後の検討課題である。

5. 結 論

本研究で得られた成果と知見は以下のようにまとめられる。

(1) 設計変数に関する構造応答の変化の一次近似式により原形状を目標形状に接近させる条件を制約条

件とし、この制約条件付きの設計変数二乗和の最小化問題として、設計変数の決定方程式を Lagrange 乗数法により定式化した。

(2) 本定式を弾性平面応力場において応力を低減する問題、すなわち、テーパ付平板の板幅、正方形板の中央孔形状、インボリュート平歯車の歯形変更に応用し、おおむね10回未満の反復で収束形状の得られることを示した。

(3) 定ひずみ有限要素を用いている場合、変更量が大きいと要素のつぶれを生ずることがあり、このときでも目標を2段に設定し、1段での変更量を小さくすれば収束形状が得られる。

文 献

- (1) 尾田・山崎, 機論 (第一部), 43-368 (昭52), 1182.
- (2) 薦・山地, 機論 (第一部), 44-386 (昭53), 3333.
- (3) 村川・明神・徳増・麻生, 機論, 49-439, A (昭53), 396.
- (4) 多田・瀬口・小西, 機論, 52-478, A (昭62), 1608.
- (5) 中桐・鈴木, 機論, 53-496, C (昭62), 2439.
- (6) 中桐・久田, 確率有限要素法入門, (昭60), 31, 培風館.
- (7) 中桐・谷・東野, 有孔CFRP積層平板の確率有限要素解析, 日本学術会議第一回構造物の安全性および信頼性に関する国内シンポジウム, (昭62-12).
- (8) Andrews, J. D. and Hearn, E. J., An Automatic Design Optimization Procedure to Minimize Fillet Bending Stresses in Involute Spur Gear, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24-5 (1987), 975.

討 論

〔質問〕 本 江 明 [(株)東芝総合研究所]

貴論文の特徴は、原形状と目標形状の応答の差が小さくなるように設計変数を定める従来概念と異なるものとある。本論文の例題等を用いて、具体的に従来概念を用いた手法との相異点 (反復修正計算回数など) を示していただければ幸いである。

〔回答〕 目標応答値に対する応答偏差を最小とするとの概念に基づく多くの既往論文において収束形状が得られるまでに要する反復回数が10回以上とみなし得ると考えたのが本研究で提案した設計変更最小の概念を着想した発端である。したがって、本研究では設計変更最小の概念による定式でどの程度の反復を要するかを検討するのが目的であり、ベンチマーク問題

として他の定式との厳密な比較を目的としていない。

逆変分原理による形状決定法^(付1)では、簡単な片持ばりの例題について少なくとも100回程度の反復を要している。また円孔からだ円孔への変更問題では引用文献中に収束回数の記述がなされていないので、回数の比較はできない。歯形変更問題については8回までの収束状況が示されているが、収束が単調ではなく、8回でも収束が得られていないと見受けられる。以上の知見をご参考に供する。

(付1) 瀬口・多田, 逆変分原理による構造物の形状決定問題 (有限要素法にする取扱い), 機論, 44-381 (昭53), 1469-1475.