熱弾性変位ポテンシャルおよび境界要素法
を利用した三次元非定常熱応力解析*落合 芳博^{*1}, 石田 良平^{*2}, 関谷 壮^{*3}Three-Dimensional Unsteady Thermal Stress Analyses
by Means of the Thermoelastic
Displacement Potential and the Boundary Element Method

Yoshihiro OCHIAI, Ryohei ISHIDA, and Tsuyoshi SEKIYA

The boundary element method (BEM) has been used in various fields because it is convenient in comparison with FEM. BEM does not need a volume integral in three-dimensional elastic problems without body forces, but generally in unsteady three-dimensional thermoelastic problems, the volume integral is necessary. Recently, a method transforming the volume integral in BEM for three-dimensional problems of unsteady thermoelasticity has been reported. However, the time integral was not carried out analytically and a numerical example was not shown in that report. This paper describes the three-dimensional problem of unsteady thermoelasticity can be easily solved without a volume integral by means of a thermoelasticity displacement potential and the boundary element method. It is also shown that the time integral can be carried out analytically and a singularity problem caused by imposing virtual heat sources on the boundary element can be easily solved. Some numerical examples are shown for investigating the accuracy of this method.

Key Words: Unsteady Thermal Stress, BEM, Thermoelastic Displacement Potential, Three-Dimensions

1. 緒 言

境界要素法は、有限要素法が解析対象とする領域を要素分割して離散化するのに対し、問題を境界積分方程式の形で記述して領域の境界のみを要素分割する解析方法であり、データの作成が非常に簡単であるため、近年、非常に発達してきた。熱弾性問題においても、境界要素解析が盛んであるが、熱ひずみを体積力のように扱うため、領域内部をセルと呼ばれる要素に分割しなければならなかった。このことは境界要素法のメリットを著しく損なうこととなっていた。これに対し、Masinda⁽¹⁾⁽²⁾は三次元非定常熱弾性問題においてもセルを用いないで解析する方法を開発したが、時間に関する積分の評価において問題があるように思われる。

本論文では、熱弾性変位ポテンシャルの概念を導入することによって、セルを全く用いないで非定常熱弾性問題を解析する定式化について述べる。具体的には、以前示した二次元非定常熱応力解析の手法⁽³⁾を三次元

問題にまで拡張したもので、境界要素解析によって得られた温度場を境界上に配置した仮想面熱源による温度場に置き直し、さらに、この温度場による熱弾性変位ポテンシャルを解析的に計算し、熱応力を求めるものである。なお、境界上に面熱源を配置することによって生ずる特異点の問題は簡単に解決され、また、基礎方程式中に現れる特異積分の発散の問題もないので通常の静弾性問題同様、熱弾性問題を容易に解析できる。

2. 基 礎 理 論

初めに、非定常温度分布を求める必要があるが、これは内部にセルを切らなくてもよい境界要素法-時間増分法併用解法により境界上の温度分布の変化を求める⁽⁴⁾。この温度分布になるように境界上には仮想面熱源を設定する。この熱源による境界上の応力分布と変位を熱弾性ポテンシャルにより求める。既知の境界条件を満足させるため境界上に外力と変位を重ね合わせる。未知の外力と変位の境界値は通常の静弾性問題用の境界要素法により求める。

2.1 温度分布 三次元非定常温度分布は、境界要素法-時間増分法により求めることができる。熱応力を計算するために、境界要素法で求められた境界温

* 昭和 62 年 11 月 28 日 関西支部第 247 回講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 1 月 23 日。

^{*1} 正員、大阪府立産業技術総合研究所 (〒550 大阪市西区江之子島 2-1-53)。

^{*2} 正員、大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町 4-804)。

^{*3} 正員、大阪電気通信大学 (〒572 寝屋川市初町 18-8)。

度分布になるように境界上に設定する仮想面熱源の強さを求める。温度を T 、時間を t 、温度伝導率を κ とおくと非定常拡散方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad \cdots (1)$$

であり、二点間の距離を r とすると、時間依存の基本解は

$$T^* = \frac{1}{(4\pi\kappa(t_F - t))^{3/2}} \exp \left[\frac{-r^2}{4\kappa(t_F - t)} \right] \quad \cdots (2)$$

となる。境界要素法により求めた温度分布になるように、境界上に $t_{f-1} < t < t_f$ のみ一様な強さの仮想持続面熱源 P_{nf} を設定する。時間分割数、要素分割数をそれぞれ F, N とすると要素 n での温度は次式により求まる。

$$T^n = \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_n} \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt d\Gamma_n P_{nf} \quad \cdots (3)$$

式(3)の時間積分を解析的に行うと

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt = \frac{1}{4\pi^{3/2}\kappa r} [\Gamma(1/2, a_{f-1}) - \Gamma(1/2, a_f)] \quad \cdots (4)$$

となる⁽⁴⁾。ただし、 $a_f = r^2 / \{4\kappa(t_F - t_f)\}$ 、 Γ はガンマ関数である。境界温度条件を満たすように熱源 P_{nf} の強さを求める。

2.2 熱弾性変位ポテンシャル 熱弾性変位ポテンシャルを Φ とすれば、三次元問題の場合 Φ は次式によって支配される⁽⁵⁾。

$$\nabla^2 \Phi = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha T \quad \cdots (5)$$

ここで、 ν はポアソン比、 α は線膨張係数である。式(5)の一般解は

$$\Phi = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha x \int T dt + \Phi_0 + t\Phi_1 \quad \cdots (6)$$

で与えられる⁽⁵⁾。式(6)に式(3)、(4)を代入し、変数変換 $u = r^2 / \{4\kappa(t_F - t_f)\}$ を行い、部分積分法を繰返し実行すると

$$\Phi = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)4\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_n} P_{nf} \{ \phi_A(n, f-1) - \phi_A(n, f) \} d\Gamma_n + \Phi_0 + t\Phi_1 \quad \cdots (7)$$

$$\phi_A(n, f) = \frac{(t_F - t_f)}{r} [\Gamma(1/2, a_f) + 2a_f \Gamma(1/2, a_f) - 2a_f^{1/2} \exp(-a_f)] \quad \cdots (8)$$

が得られ、初期温度を零、および熱源作用点 $r=0$ において半径方向変位が零になる条件 $[\partial\Phi/\partial r]_{r=0}=0$ により Φ_0, Φ_1 を求めると

$$\Phi = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)4\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_n} P_{nf} \{ \phi(n, f-1) - \phi(n, f) \} d\Gamma_n \quad \cdots (9)$$

$$\phi(n, f) = \frac{(t_F - t_f)}{r} [\Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2) + 2a_f \Gamma(1/2, a_f) - 2a_f^{1/2} \exp(-a_f)] \quad \cdots (10)$$

となる。熱弾性変位ポテンシャルによる変位および応力は、 δ_{ij} をクロネッカのデルタとすると

$$u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad \cdots (11)$$

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \nabla^2 \Phi \delta_{ij} \right) \quad \cdots (12)$$

で与えられる。ただし、 G は横弾性係数である。式(9)、(10)を式(11)、(12)の Φ の微分式に代入し、特異点処理が容易になるように変形すると

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)4\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_n} P_{nf} \{ A(n, f-1) - A(n, f) \} d\Gamma_n \quad \cdots (13)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)4\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^N \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_n} P_{nf} \times \{ B(n, f-1) - B(n, f) \} d\Gamma_n \quad \cdots (14)$$

ただし、 $A(n, f), B(n, f)$ はそれぞれ

$$A(n, f) = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{t_F - t_f}{r^2} \left[-\{ \Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2) + 2a_f^{1/2} + 2a_f \{ \Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2) \} + 2a_f^{1/2} \{ 1 - \exp(-a_f) \} \} \right] \quad \cdots (15)$$

$$B(n, f) = \frac{t_F - t_f}{r^3} \left[-\left(\delta_{ij} - 3 \frac{\partial r \partial r}{\partial x_i \partial x_j} \right) \{ \Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2) + 2a_f^{1/2} \} + 2a_f \left(\delta_{ij} - 3 \frac{\partial r \partial r}{\partial x_i \partial x_j} \right) \{ \Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2) \} + 2a_f^{1/2} \left(\delta_{ij} - 3 \frac{\partial r \partial r}{\partial x_i \partial x_j} \right) \{ 1 - \exp(-a_f) \} \right] \quad (16)$$

である。変位および応力成分は、境界条件を満たしていないので、他の変位および応力成分を重ね合わせて、条件を満足させる必要がある。

2.3 境界条件を満たすための解の重ね合わせ

変位が規定されている境界を Γ_1 、外力が規定されている部分を Γ_2 とする。熱弾性ポテンシャルによって求めた境界上の応力を、境界表面法線方向余弦を用いて次式により等価な外力に書き変える。

$$p'_i = \sigma_{ij} n_j \quad \cdots (17)$$

与えられた本問題の境界条件を

$$u_i = u'_i \quad (\Gamma_1 \text{ 上})$$

$$p_i = p'_i \quad (\Gamma_2 \text{ 上})$$

とすると、次の境界条件を満たす補解を重ね合わせる必要がある。

$$u_i^* = u'_i - u_i \quad (\Gamma_1 \text{ 上}) \quad \cdots (18)$$

$$p_i^* = p'_i - p_i \quad (\Gamma_2 \text{ 上}) \quad \cdots (19)$$

未知の変位 u_i^* および p_i^* は、式(18)、(19)の条件で通常の静弾性境界要素法により求める。実際の未知の変

位 u_i' および外力 p_i' は次式により求まる。

$$u_i' = u_i' + u_i^* \quad (\Gamma_2 \text{ 上}) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$p_i' = p_i' + p_i^* \quad (\Gamma_1 \text{ 上}) \quad \dots\dots\dots (21)$$

内点の変位と応力も、熱弾性ポテンシャルによる値と静弾性境界要素法による補解値を重ね合わせればよい。

2.4 特異点 式(3), (11), (12)の境界に関する面積分は4点ガウス積分により行える。ただし、熱源と考えている要素が観測点と一致する場合、特異点の問題が生じるので、解析的に面積分を行う。すなわち、要素は一定要素とし、半径 R の面熱源を考える。

$$\int \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dA = 0$$

$$\int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} r dr d\theta$$

図1 形状および軸平面上での要素分割
(円周方向に29分割)

(a) Time=0.2 s

(b) Time=1.0 s

図2 熱応力の厳密解との比較

$\beta^2 = 1/\{4\kappa(t_F - t_f)\}$ とすると、面積積分中に現れる特異点に関する積分は次式のようにになる。

$$\int_0^R \frac{1}{r^3} [\Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2) + 2a_f^{1/2}] r dr$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{R^{2n}}{(2n+1)2nn!} \beta^{2n+1} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\int_0^R \frac{1}{r^3} a_f \{\Gamma(1/2, a_f) - \Gamma(1/2)\} r dr$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{R^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)n!} \beta^{2n+3} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\int_0^R \frac{1}{r^3} a_f^{1/2} \{1 - \exp(-a_f)\} r dr$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{R^{2n} \beta^{2n+1}}{2nn!} \quad \dots\dots\dots (24)$$

以上のように境界上の面積分における特異性は弱く、簡単に処理することができる。

3. 解 析 例

本解法による解の精度を確かめるために、図1に示すように両端を上下方向に拘束した内半径10 mm、外半径20 mmの円筒を初期温度0°Cから内側表面を100°Cまで突然加熱した場合の熱応力を求めた。外側表面温度は0°C、上下端面は断熱状態として計算した。要素分割は図1に示すように軸平面上で20分割、円周方向に29分割とした。図2(a), (b)に時間 $t=0.2, 1.0$ sにおける熱応力分布を示す。条件は、温度伝導率 $7 \text{ mm}^2/\text{s}$ 、ヤング率 210 GPa 、ポアソン比 0.3 、線膨張率 $11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ とし、時間分割数は4、要素は一定要素を用いた。図2の実線は厳密解であり、精度よく解が求められることがわかる。

次に円筒の内外表面の熱伝達率を有限とした場合を考える。熱伝達率を有限とした場合の境界温度分布は境界要素法により求まるので、面熱源の強さは式(3)により求まる。図3は円筒の内表面が100°Cに加熱さ

図3 円周方向熱応力の時間的变化

図4 短円筒の上下端が加熱された場合

れた場合に対する円周方向熱応力の時間に関する変化である。この場合、内外表面の相対熱伝達率を 0.1 mm^{-1} とし、他の条件は図2の場合と同じとした。図中の実線は厳密解であり、時間に対する変化も厳密解とよく一致する。

計算例として解析解が求め難い、短円筒の端面が加熱された場合の熱応力を求めた。図4に示すように、内外側面が断熱された長さ 20 mm の短円筒が初期温度 0°C から両端面を突然 100°C に加熱された場合について計算した。短円筒は全周拘束されていないものとし、他の条件は図2の場合と同じとした。図5にそれぞれの高さに対する時間 $t=5 \text{ s}$ における円周方向の熱応力分布を示す。

4. 結 論

仮想面熱源および熱弾性変位ポテンシャルの概念を導入することにより、三次元非定常熱応力問題を内部領域にセルを切ることなく解析する手法を示した。従来の非定常熱応力解析における境界要素法ではセルを用いていたので、境界要素法の利点が損なわれてい

図5 上下端を加熱された短円筒の円周方向熱応力

た。しかし、本解法により、非定常熱弾性問題が通常の静弾性問題と同様に容易に解析できることが明らかになった。

文 献

- (1) Masinda, J., "Application of the Boundary Element Method to 3D Problems of Non-Stationary Thermoelasticity", *Engineering Analysis*, 1 (1984), 66-69.
- (2) Masinda, J. (Brebbia, C. and Maier, G. 編), "Application of BEM to Three-dimensional Problems of Non-Stationary Thermoelastic", in *Boundary Elements Proc. 7th Int. Conf., Como, Italy*, Springer-Verlag, Berlin, 1 (1985).
- (3) 落合・関谷, 境界要素法講義集, 3 (昭61), 213-218.
- (4) Brebbia, C. A., *Boundary Element Techniques-Theory and Applications in engineering*, Springer-Verlag, (1984), 141-164.
- (5) 竹内, 熱応力, (昭46), 44-45, 日新出版.