ランダムな加熱を受ける不均質板の熱応力解析*

菅野良弘^{*1}, 木元順一^{*2}

Thermal Stresses in a Nonhomogeneous Plate Due to Random Surface Temperature

Yoshihiro SUGANO and Junichi KIMOTO

An analytical solution is presented for a stochastic thermal stress problem in a nonhomogeneous flat plate. The flat plate has arbitrary variations in mechanical properties and is subjected to surface temperatures expressed by stochastic functions with respect to time. The analysis leads to exact expressions of the response autocorrelation functions and the response power spectral densities for temperature and stress. The deterministic thermal stress expression in a nonhomogeneous flat plate which has been reported by one of the present authors, is used in this analysis. Numerical calculations are carried out for the case in which the surface temperature is assumed to be a white noise.

Key Words: Elasticity, Random Thermal Stress, Nonhomogeneous Plate, Random Surface Heating, Analytical Solution

1. 緒 言

一般に、従来の熱応力問題は、ほとんどが決定論的に取扱われているようであるが、熱応力問題の重要な因子である物体の形状、境界条件、初期条件、内部熱発生、材料の熱的、機械的性質などは決定論的に扱うことが望ましくない場合がある。このような場合、これらの性質や条件は確率論的に評価されるべきものであり、その温度や熱応力の解析も確率論的に行われなければならない。

これまでになされた温度場や熱応力に関する確率論的研究は、あまり多くない。温度場の解析に関しては、熱伝導率が空間的にランダムな場合^{(1)~(3)}、物体が空間的または時間的にランダムな内部熱発生を有する場合⁽²⁾⁽⁴⁾、境界条件や初期条件がランダム変動する場合^{(4)~(6)}について行われている。熱応力については、境界温度が時間的にランダム変動する場合^{(7)~(9)}や、物体の形状と材料定数のランダム性を考慮した場合⁽¹⁰⁾などの解析がある。しかしながら、不均質板についての確率論的な熱応力問題の解析解は報告されていない。

著者らの一人は、先に決定論的な問題として不均質板の熱応力式を導出している⁽¹¹⁾。これは、ファイナセラミックスなどの新素材や複合材料などの、不均質材料を用いた高温強度設計、将来の宇宙往還機に必要な熱応力緩和型超耐熱材料として最近、特に注目されている傾斜機能材料⁽¹²⁾の材料設計に有効であると思われる。しかし、これらの不均質材料がランダムな境界条件を受ける場合、その熱応力は確率論的に解析されなければならない、決定論的な問題とは違った評価が必要となる。

そこで、本研究では、境界温度が時間的にランダム変動している場合の、不均質板の平面熱応力問題を解析する。ここでは、不均質板の熱応力の時間に対する変動特性を表すものとして、その熱応力の自己相関関数を、熱応力の時間変動の周波数特性を表すものとしてスペクトル密度関数を導出する。また、数値計算では、時間的にランダム変動している境界温度が白色雑音である場合を計算し、材料の不均質性が、境界温度のランダム性による熱応力の時間的変動に及ぼす影響について考察する。

2. 解 析

2・1 温度場 図1のように (x, y, z) 座標系を設

* 昭和62年12月16日 第37回応用力学連合講演会において講演、原稿受付 昭和63年3月28日。

^{*1} 正員、大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町4-804)。

^{*2} 学生員、大阪府立大学大学院。

定し、 z 軸方向に温度分布および熱伝導率 λ の不均質性を有する厚さ $2h$ の無限平板を考える。

最初、平板の温度 θ は一様に零であるとし、ある時刻から、平板の両表面が、図 1 のような、時間 t に対してランダム変動する温度 $\phi(t)$, $\psi(t)$ に加熱されるものとする。このとき、この不均質板の熱伝導方程式、初期条件式、境界条件式は次のように表される。

$$c\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \lambda(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\theta = 0, \quad t = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\theta = \phi(t), \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\theta = \psi(t), \quad z = h \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 c , γ はそれぞれ、この平板の比熱、密度であり、一定値であるとする。

任意の熱伝導率 $\lambda(z)$ について熱伝導方程式 (1) を解析的に解くのは非常に困難であるため、単調変化を広く表現しうる $\lambda(z)$ として、次のような指数関数を導入する。

$$\lambda(z) = \lambda_0 e^{-\eta(z+h)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 λ_0 , η は定数である。なお、熱伝導率が式 (5) で与えられる材料としては、傾斜機能材料⁽¹²⁾が考えられる。式 (5) を式 (1) に代入し、 $x_0 = \lambda_0 / c\gamma$ とおけば、

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{x_0} e^{\eta(z+h)} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式 (6) を解析するために次のラプラス変換とその逆変換を導入する。

$$\theta^*(z, s) = \int_0^\infty \theta(z, t) e^{-st} dt \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\theta(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \theta^*(z, s) e^{st} ds \quad \dots\dots\dots (8)$$

式 (2) を考慮し、式 (3), (4), (6) をラプラス変換

図 1 不均質板の座標系と境界温度

すれば、

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial \theta^*}{\partial z} - \frac{s}{x_0} e^{\eta(z+h)} \theta^* = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\theta^* = \Phi(s), \quad z = -h \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\theta^* = \Psi(s), \quad z = h \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、

$$\{\Phi(s), \Psi(s)\} = \int_0^\infty \{\phi(t), \psi(t)\} e^{-st} dt \quad \dots\dots\dots (12)$$

式 (9) ~ (11) を解くために、次の変数変換と関数 U^* を導入する。

$$\xi = \frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} e^{\eta(z+h)/2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$U^* = \theta^* / \xi \quad \dots\dots\dots (14)$$

式 (13), (14) を式 (9) に代入すれば、

$$\frac{d^2 U^*}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dU^*}{d\xi} - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) U^* = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

上式は、1 次の変形 Bessel 微分方程式である。式 (15) の解に境界条件式 (10), (11) を適用し、式 (13), (14) を考慮すれば、

$$\begin{aligned} \theta^*(z, s) = & e^{\eta(z+h)/2} \left[I_1 \left(\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} e^{\eta(z+h)/2} \right) \left\{ \Phi(s) K_1 \left(\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} e^{\eta h} \right) - \Psi(s) e^{-\eta h} K_1 \left(\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} \right) \right\} \right. \\ & \left. - K_1 \left(\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} e^{\eta(z+h)/2} \right) \left\{ \Phi(s) I_1 \left(\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} e^{\eta h} \right) - \Psi(s) e^{-\eta h} I_1 \left(\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} \right) \right\} \right] \\ & / \left\{ I_1 \left(\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} \right) K_1 \left(\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} e^{\eta h} \right) - I_1 \left(\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} e^{\eta h} \right) K_1 \left(\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{s}{x_0}} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで、 $I_1(\quad)$, $K_1(\quad)$ は、それぞれ 1 次の第 1 種、第 2 種変形 Bessel 関数である。式 (16) を留数定理とたたみこみの定理によってラプラス逆変換すれば、不均質板の温度 $\theta(z, t)$ は、

$$\theta(z, t) = \frac{1}{4} \pi \eta^2 x_0 e^{\eta(z+h)/2} \left\{ e^{-\eta h} \int_0^t \phi(t-q) \sum_{n=1}^{\infty} P_{\psi n}(z) e^{-(\eta/2)^2 x_0 w_n^2 q} dq - \int_0^t \phi(t-q) \sum_{n=1}^{\infty} P_{\phi n}(z) e^{-(\eta/2)^2 x_0 w_n^2 q} dq \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、

$$P_{\psi n}(z) = w_n^2 \{ J_1(w_n e^{\eta(z+h)/2}) Y_1(w_n) - Y_1(w_n e^{\eta(z+h)/2}) J_1(w_n) \} J_1(w_n) J_1(w_n e^{\eta h}) / \{ J_1^2(w_n) - J_1^2(w_n e^{\eta h}) \} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$P_{\phi n}(z) = w_n^2 \{ J_1(w_n e^{\eta(z+h)/2}) Y_1(w_n e^{\eta h}) - Y_1(w_n e^{\eta(z+h)/2}) J_1(w_n e^{\eta h}) \} J_1(w_n) J_1(w_n e^{\eta h}) / \{ J_1^2(w_n) - J_1^2(w_n e^{\eta h}) \} \quad \dots\dots\dots (19)$$

また, $J_1(\cdot)$, $Y_1(\cdot)$ は, それぞれ 1 次の第 1 種, 第 2 種 Bessel 関数, w_n は, 次の超越方程式を満足する n 番目の正根である.

$$J_1(w_n)Y_1(w_ne^{\eta h}) - Y_1(w_n)J_1(w_ne^{\eta h}) = 0 \quad (20)$$

式(17)の温度関数 θ は, 時間に対してランダム変動する温度 $\phi(t)$, $\psi(t)$ を含んでいるので, 決定論的に解析するのは不可能であり, 確率論的な評価が必要となる. そこで, この温度場を確率論的に評価するための統計量として, まず, 温度関数 θ の自己相関関数を求める. 期待値演算子を $\langle \cdot \rangle$, 任意の時間間隔を τ とすれば, 温度 θ の自己相関関数 R_θ は次のように与えられる.

$$R_\theta(z, t, t+\tau) = \langle \theta(z, t)\theta(z, t+\tau) \rangle \quad (21)$$

上式に式(17)を代入すれば, 次のようになる.

$$\begin{aligned} R_\theta(z, t, t+\tau) = & \frac{1}{16}\pi^2\eta^4\chi_0^2e^{\eta(z+h)}\left[e^{-2\eta h}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{\phi m}(z)P_{\psi n}(z)\int_0^{t+\tau}\int_0^tR_\psi(t-q, t+\tau\right. \\ & -q)e^{-(\eta/2)^2\kappa_0(w_m^2p+w_n^2q)}dpdq + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{\phi m}(z)P_{\psi n}(z)\int_0^{t+\tau}\int_0^tR_\psi(t-q, t+\tau-q) \\ & \times e^{-(\eta/2)^2\kappa_0(w_m^2p+w_n^2q)}dpdq - e^{\eta h}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{\phi m}(z)P_{\psi n}(z)\int_0^{t+\tau}\int_0^tR_{\phi\psi}(t-p, t+\tau-q) \right. \\ & \left. \times e^{-(\eta/2)^2\kappa_0(w_m^2p+w_n^2q)}dpdq + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{\phi m}(z)P_{\psi n}(z)\int_0^{t+\tau}\int_0^tR_{\psi\phi}(t-p, t+\tau-q)e^{-(\eta/2)^2\kappa_0(w_m^2p+w_n^2q)}dpdq\right\}\Big] \end{aligned} \quad (22)$$

ここで, R_ϕ , R_ψ は, それぞれ境界温度 $\phi(t)$, $\psi(t)$ の自己相関関数, $R_{\phi\phi}$, $R_{\psi\psi}$ は, $\phi(t)$, $\psi(t)$ の相互相関関数である. これら境界温度の相関関数がわかれば, 式(22)より不均質板の温度 θ の自己相関関数を求めることができる.

本研究では, 以後の解析を, 境界温度 $\phi(t)$, $\psi(t)$ が定常確率過程である場合について行くと, 式(22)より, 温度 θ の自己相関関数 R_θ は, 次式のように座標 z と時間間隔 τ の関数となる.

$$\begin{aligned} R_\theta(z, \tau) = & \frac{1}{16}\pi^2\eta^4\chi_0^2e^{\eta(z+h)}\left[e^{-2\eta h}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{\phi m}(z)P_{\psi n}(z)\int_0^\infty\int_0^\infty R_\psi(\tau+p-q)e^{-(\eta/2)^2\kappa_0(w_m^2p+w_n^2q)}dpdq \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{\phi m}(z)P_{\psi n}(z)\int_0^\infty\int_0^\infty R_\psi(\tau+p-q)e^{-(\eta/2)^2\kappa_0(w_m^2p+w_n^2q)}dpdq \\ & - e^{\eta h}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{\phi m}(z)P_{\psi n}(z)\int_0^\infty\int_0^\infty R_{\phi\psi}(\tau+p-q)e^{-(\eta/2)^2\kappa_0(w_m^2p+w_n^2q)}dpdq \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P_{\phi m}(z)P_{\psi n}(z)\int_0^\infty\int_0^\infty R_{\psi\phi}(\tau+p-q)e^{-(\eta/2)^2\kappa_0(w_m^2p+w_n^2q)}dpdq\right\}\Big] \end{aligned} \quad (23)$$

次に, 温度 θ のスペクトル密度関数 S_θ を求める. Wiener-Khintchine の関係式⁽¹³⁾より, S_θ は次式で与えられる.

$$S_\theta(z, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_\theta(z, \tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (24)$$

ここで, ω は周波数である. 式(23)を式(24)に代入すれば, S_θ を, 境界温度 $\phi(t)$, $\psi(t)$ のスペクトル密度関数, 相互スペクトル密度関数で表すことができる.

2.1 応力場 前述の温度場による不均質板の熱応力を統計的に解析する. 平板の不均質性として, ヤング率 E , 線膨張係数 α , ポアソン比 ν が座標 z の関数として表されているとき, この不均質板の熱応力式は, 著者らの一人により次のように報告されている⁽¹¹⁾.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = f(z, t) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)}\left\{-\alpha(z)\theta(z, t) + \frac{(I_{a2}z - I_{a3})I_F + (I_{a2} - I_{a1}z)I_M}{I_{a2}^2 - I_{a1}I_{a3}}\right\} \quad (25)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} I_{a1} &= \int_{-h}^h \frac{E(z)}{1-\nu(z)}dz, \quad I_{a2} = \int_{-h}^h \frac{zE(z)}{1-\nu(z)}dz, \quad I_{a3} = \int_{-h}^h \frac{z^2E(z)}{1-\nu(z)}dz \\ I_F &= \int_{-h}^h \frac{E(z)\alpha(z)\theta(z, t)}{1-\nu(z)}dz, \quad I_M = \int_{-h}^h \frac{zE(z)\alpha(z)\theta(z, t)}{1-\nu(z)}dz \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

温度 θ のランダム性により, 平板の応力も時間に対してランダム変動するので, ここでも温度場のときと同様に統計量として応力 f の自己相関関数 R_f を求める. R_f は式(21)と同様に,

$$R_f(z, t, t+\tau) = \langle f(z, t)f(z, t+\tau) \rangle \quad (27)$$

で与えられる. この式に式(17), 式(25)を代入すれば, R_f は次式のようになる.

$$R_f(z, \tau) = \left\{ \frac{E(z)}{1-\nu(z)} \right\}^2 \left[\alpha^2(z) R_\theta(z, \tau) - \frac{\alpha(z)}{I_{a2}^2 - I_{a1} I_{a3}} [(I_{a2} z - I_{a3}) \{V_{1nm}(z, \tau) + V_{1mn}(z, \tau)\} \right. \\ \left. + (I_{a2} - I_{a1} z) \{V_{2nm}(z, \tau) + V_{2mn}(z, \tau)\}] + [(I_{a2} z - I_{a3})^2 W_{11}(\tau) + (I_{a2} - I_{a1} z)^2 W_{22}(\tau) \right. \\ \left. + (I_{a2} z - I_{a3})(I_{a2} - I_{a1} z) \{W_{21}(\tau) + W_{12}(\tau)\}] / (I_{a2}^2 - I_{a1} I_{a3})^2 \right] \dots \dots \dots (28)$$

ただし,

$$V_{ikl}(z, \tau) = \frac{1}{16} \pi^2 \eta^4 \kappa_0^2 e^{\eta(z+h)/2} \left[e^{-2\eta h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{i\phi k} \cdot P_{\phi l}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_\phi(\tau + p - q) e^{-(\eta/2)^2 \kappa_0 (w_m^2 p + w_n^2 q)} dp dq \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{i\phi k} P_{\phi l}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_\phi(\tau + p - q) e^{-(\eta/2)^2 \kappa_0 (w_m^2 p + w_n^2 q)} dp dq - e^{-\eta h} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{i\phi k} P_{\phi l}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi} \right. \right. \\ \left. \left. \times (\tau + p - q) e^{-(\eta/2)^2 \kappa_0 (w_m^2 p + w_n^2 q)} dp dq + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{i\phi k} P_{\phi l}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau + p - q) e^{-(\eta/2)^2 \kappa_0 (w_m^2 p + w_n^2 q)} dp dq \right\} \right] \\ (i=1, 2 \quad k, l=m, n) \dots \dots \dots (29)$$

$$W_{ij}(\tau) = \frac{1}{16} \pi^2 \eta^4 \kappa_0^2 \left[e^{-2\eta h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{i\phi m} I_{j\phi n} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_\phi(\tau + p - q) e^{-(\eta/2)^2 \kappa_0 (w_m^2 p + w_n^2 q)} dp dq + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{i\phi m} I_{j\phi n} \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_\phi(\tau + p - q) e^{-(\eta/2)^2 \kappa_0 (w_m^2 p + w_n^2 q)} dp dq - e^{\eta h} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{i\phi m} I_{j\phi n} \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau + p - q) e^{-(\eta/2)^2 \kappa_0 (w_m^2 p + w_n^2 q)} dp dq \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{i\phi m} I_{j\phi n} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\phi}(\tau + p - q) e^{-(\eta/2)^2 \kappa_0 (w_m^2 p + w_n^2 q)} dp dq \right\} \right] \quad (i, j=1, 2) \dots \dots \dots (30)$$

$$\{I_{1\phi n}, I_{1\psi n}\} = \int_{-h}^h e^{\eta(z+h)/2} \frac{E(z)\alpha(z)}{1-\nu(z)} \{P_{\phi n}(z) P_{\psi n}(z)\} dz \dots \dots \dots (31)$$

$$\{I_{2\phi n}, I_{2\psi n}\} = \int_{-h}^h e^{\eta(z+h)/2} \frac{zE(z)\alpha(z)}{1-\nu(z)} P_{\phi n}(z), P_{\psi n}(z) dz \dots \dots \dots (32)$$

上式より, 境界温度の相関関数 $R_\phi, R_\psi, R_{\phi\psi}, R_{\psi\phi}$ がわかれば, 応力の自己相関関数 R_f が求まることがわかる。

応力のスペクトル密度関数 S_f も式(24)と同様に, 次式に式(28)を代入することにより求めることができる。

$$S_f(z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(z, t) e^{-i\omega t} dt \dots \dots \dots (33)$$

3. 数 値 計 算

数値計算の一例として, $z=-h$ での平板の境界温度 $\phi(t)$ が決定論的に零で与えられ, $z=h$ での境界温度 $\phi(t)$ が白色雑音で与えられたときを計算する。このとき, 境界温度の相関関数 $R_\phi, R_{\phi\psi}, R_{\psi\phi}$ は, とともに零となり, R_f は次のようにおくことができる⁽¹³⁾。

$$R_\phi(\tau) = \theta_s^2 \delta(\tau) \dots \dots \dots (34)$$

ここで, $\delta(\cdot)$ は Dirac の Delta 関数, θ_s は定数である。また, 機械的特性の不均質性として, 次式のように, 線膨張係数 α , ポアソン比 ν は一定値とし, ヤング率 E を指数関数で与える⁽¹²⁾。

$$\alpha(z) = \alpha_0 \text{ (一定)}, \quad \nu(z) = \nu_0 \text{ (一定)}, \quad E(z) = E_0 e^{-E_1(z+h)} \dots \dots \dots (35)$$

さらに次式の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta} &= \eta h, \quad \bar{E}_1 = E_1 h, \quad \zeta = z/h, \quad \bar{t} = \kappa_0 t/h^2, \quad \bar{\tau} = \kappa_0 \tau/h^2, \quad \bar{\omega} = h^2 \omega/\kappa_0, \quad \bar{\theta} = \theta/\theta_s, \quad \bar{f} = f/\{E_0 \alpha_0 \theta_s/(1-\nu_0)\} \\ R_{\bar{\theta}} &= \langle \bar{\theta}(\zeta, \bar{t}) \bar{\theta}(\zeta, \bar{t} + \bar{\tau}) \rangle, \quad R_{\bar{f}} = \langle \bar{f}(\zeta, \bar{t}) \bar{f}(\zeta, \bar{t} + \bar{\tau}) \rangle \\ S_{\bar{\theta}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\bar{\theta}}(\zeta, \bar{\tau}) e^{-i\bar{\omega} \bar{\tau}} d\bar{\tau}, \quad S_{\bar{f}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\bar{f}}(\zeta, \bar{\tau}) e^{-i\bar{\omega} \bar{\tau}} d\bar{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

以上の境界条件, 不均質性を考慮した平板の無次元温度 $\bar{\theta}$ の自己相関関数 $R_{\bar{\theta}}$ は, 式(23)より

$$R_{\bar{\theta}}(\zeta, \bar{\tau}) = \frac{1}{4} \pi^2 \bar{\eta}^2 e^{\bar{\eta}(\zeta-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_{\phi m}(\zeta)} \overline{P_{\psi n}(\zeta)} \frac{e^{-(\bar{\eta}/2)^2 \omega_n^2 |\bar{\tau}|}}{w_m^2 + w_n^2} \dots \dots \dots (37)$$

ここで,

$$\overline{P_{\psi n}(\zeta)} = w_n^2 [J_1(w_n e^{\bar{\eta}(\zeta+1)/2}) Y_1(w_n) - Y_1(w_n e^{\bar{\eta}(\zeta+1)/2}) J_1(w_n)] J_1(w_n) J_1(w_n e^{\bar{\eta}}) / \{J_1^2(w_n) - J_1^2(w_n e^{\bar{\eta}})\} \dots \dots \dots (38)$$

$$w_j = w_m \quad (\bar{\tau} < 0), \quad w_j = w_n \quad (\bar{\tau} > 0) \dots \dots \dots (39)$$

無次元温度 $\bar{\theta}$ のスペクトル密度関数 $S_{\bar{\theta}}$ は、式(24)より、

$$S_{\bar{\theta}}(\zeta, \bar{\omega}) = \frac{1}{32} \pi \bar{\eta}^4 e^{\bar{\eta}(\zeta-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_{\phi m}(\zeta) \bar{P}_{\phi n}(\zeta) \frac{\{w_m w_n (\bar{\eta}/2)^2 + \bar{\omega}^2\}}{\{(\bar{\eta} w_m/2)^4 + \bar{\omega}^2\} \{(\bar{\eta} w_n/2)^4 + \bar{\omega}^2\}} \quad (40)$$

無次元応力 $\bar{f}$ の自己相関関数 $R_{\bar{f}}$ は、式(28)～(32)より、

$$\begin{aligned} R_{\bar{f}}(\zeta, \bar{\tau}) = & e^{-2\bar{E}_1(\zeta+1)} \{R_{\theta}(\zeta, \bar{\tau}) - [(\zeta \bar{I}_{a2} - \bar{I}_{a3})\{\bar{V}_{1nm}(\zeta, \bar{\tau}) + \bar{V}_{1mn}(\zeta, \bar{\tau})\} + (\bar{I}_{a2} - \bar{I}_{a1}\zeta) \\ & \times \{\bar{V}_{2nm}(\zeta, \bar{\tau}) + \bar{V}_{2mn}(\zeta, \bar{\tau})\}] / (\bar{I}_{a2}^2 - \bar{I}_{a1}\bar{I}_{a3}) + [(\bar{I}_{a2}\zeta - \bar{I}_{a3})^2 \bar{W}_{11}(\bar{\tau}) + (\bar{I}_{a2} - \bar{I}_{a1}\zeta)^2 \bar{W}_{22}(\bar{\tau}) \\ & + (\bar{I}_{a2}\zeta - \bar{I}_{a3})(\bar{I}_{a2} - \bar{I}_{a1}\zeta)\{\bar{W}_{21}(\bar{\tau}) + \bar{W}_{12}(\bar{\tau})\}] / (\bar{I}_{a2}^2 - \bar{I}_{a1}\bar{I}_{a3})^2] \dots \dots \dots (41) \end{aligned}$$

ここで、

$$\bar{V}_{ikl}(\zeta, \bar{\tau}) = \frac{1}{4} \pi^2 \bar{\eta}^2 e^{\bar{\eta}(\zeta-3)/2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{I}_{i\phi m} \bar{P}_{\phi l}(\zeta) \frac{e^{-(\bar{\eta}/2)^2 w_n^2} \bar{\tau}}{w_m^2 + w_n^2} \quad (i, j=1, 2; k, l=m, n) \quad (42)$$

$$\bar{W}_{ij}(\bar{\tau}) = \frac{1}{4} \pi^2 \bar{\eta}^2 e^{-2\bar{\eta}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{I}_{i\phi m} \bar{I}_{j\phi n} \frac{e^{-(\bar{\eta}/2)^2 w_n^2} \bar{\tau}}{w_m^2 + w_n^2} \quad (i, j=1, 2) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{a1} = & \frac{1}{\bar{E}_1} (1 - e^{-2\bar{E}_1}), \quad \bar{I}_{a2} = \frac{1}{\bar{E}_1} \left\{ \frac{1}{\bar{E}_1} - 1 - e^{-2\bar{E}_1} \left(\frac{1}{\bar{E}_1} + 1 \right) \right\} \\ \bar{I}_{a3} = & \frac{1}{\bar{E}_1} \left\{ -e^{-2\bar{E}_1} \left(1 + \frac{2}{\bar{E}_1} + \frac{2}{\bar{E}_1^2} \right) + 1 - \frac{2}{\bar{E}_1} + \frac{2}{\bar{E}_1^2} \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{1\phi n} = & e^{(\bar{\eta}/2 - \bar{E}_1) w_n^2} \left\{ Y_1(w_n) \int_{-1}^1 e^{(\bar{\eta}/2 - \bar{E}_1) \bar{s}} J_1(w_n e^{\bar{\eta}(\bar{s}+1)/2}) d\bar{s} - J_1(w_n) \int_{-1}^1 e^{(\bar{\eta}/2 - \bar{E}_1) \bar{s}} Y_1(w_n e^{\bar{\eta}(\bar{s}+1)/2}) d\bar{s} \right\} \\ & \times J_1(w_n) J_1(w_n e^{\bar{\eta}}) / \{J_1^2(w_n) - J_1^2(w_n e^{\bar{\eta}})\} \dots \dots \dots (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2\phi n} = & e^{(\bar{\eta}/2 - \bar{E}_1) w_n^2} \left\{ Y_1(w_n) \int_{-1}^1 \bar{s} e^{(\bar{\eta}/2 - \bar{E}_1) \bar{s}} J_1(w_n e^{\bar{\eta}(\bar{s}+1)/2}) d\bar{s} \right. \\ & \left. - J_1(w_n) \int_{-1}^1 \bar{s} e^{(\bar{\eta}/2 - \bar{E}_1) \bar{s}} Y_1(w_n e^{\bar{\eta}(\bar{s}+1)/2}) d\bar{s} \right\} \\ & \times J_1(w_n) J_1(w_n e^{\bar{\eta}}) / \{J_1^2(w_n) - J_1^2(w_n e^{\bar{\eta}})\} \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

次に無次元応力 $\bar{f}$ のスペクトル密度関数 $S_{\bar{f}}$ は、式(33)より、

$$\begin{aligned} S_{\bar{f}}(\zeta, \bar{\omega}) = & e^{-2\bar{E}_1(\zeta+1)} [S_{\bar{\theta}}(\zeta, \bar{\omega}) - \{(\zeta \bar{I}_{a2} - \bar{I}_{a1})\bar{F}_1(\zeta, \bar{\omega}) + (\bar{I}_{a2} - \zeta \bar{I}_{a1})\bar{F}_2(\zeta, \bar{\omega})\} / (\bar{I}_{a2}^2 - \bar{I}_{a1}\bar{I}_{a3}) \\ & + \{(\zeta \bar{I}_{a2} - \bar{I}_{a3})^2 \bar{G}_{11}(\bar{\omega}) + (\bar{I}_{a2} - \zeta \bar{I}_{a1})^2 \bar{G}_{22}(\bar{\omega}) + (\zeta \bar{I}_{a2} - \bar{I}_{a3})(\bar{I}_{a2} - \zeta \bar{I}_{a1})\bar{H}(\bar{\omega})\} / (\bar{I}_{a2} - \bar{I}_{a1}\bar{I}_{a3})^2] \dots \dots \dots (47) \end{aligned}$$

ここで、

$$\bar{F}_i(\zeta, \bar{\omega}) = \frac{1}{8} \pi \bar{\eta}^2 e^{\bar{\eta}(\zeta-3)/2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \bar{I}_{i\phi m} \bar{P}_{\phi n}(\zeta) + \bar{I}_{i\phi n} \bar{P}_{\phi m}(\zeta) \} \left\{ \frac{w_m^2}{(\bar{\eta}/2)^4 w_m^2 + \bar{\omega}^2} + \frac{w_n^2}{(\bar{\eta}/2)^4 w_n^2 + \bar{\omega}^2} \right\} / (w_m^2 + w_n^2) \quad (i=1, 2) \dots \dots \dots (48)$$

$$\bar{G}_{ij}(\bar{\omega}) = \frac{1}{4} \pi \bar{\eta}^2 e^{\bar{\eta}(\zeta-3)/2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{I}_{i\phi m} \bar{I}_{j\phi n} \left\{ \frac{w_m^2}{(\bar{\eta}/2)^4 w_m^2 + \bar{\omega}^2} + \frac{w_n^2}{(\bar{\eta}/2)^4 w_n^2 + \bar{\omega}^2} \right\} / (w_m^2 + w_n^2) \quad (i, j=1, 2) \dots \dots \dots (49)$$

$$\bar{H}(\bar{\omega}) = \frac{1}{4} \pi \bar{\eta}^2 e^{-2\bar{\eta}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \bar{I}_{1\phi m} \cdot \bar{I}_{2\phi n} + \bar{I}_{2\phi m} \cdot \bar{I}_{1\phi n} \} \left\{ \frac{w_m^2}{(\bar{\eta}/2)^2 w_m^2 + \bar{\omega}^2} + \frac{w_n^2}{(\bar{\eta}/2)^2 w_n^2 + \bar{\omega}^2} \right\} / (w_m^2 + w_n^2) \dots \dots \dots (50)$$

図 2 熱伝導率の不均質性が温度の二乗平均に及ぼす影響

以上の式より、次の数値計算諸元を用いて計算を行う。

$$-1.0 \leq \zeta \leq 1.0, \quad \bar{\tau} = 0$$

$$\bar{\eta} = -1.0, -0.5, 0, 0.5, 1.0$$

$$\bar{E}_1 = -1.0, -0.5, 0, 0.5, 1.0$$

まず、図 2 は、不均質板の板厚方向における温度変動の二乗平均値が、平板の熱伝導率の不均質性によって、どのような影響を受けるかを示したものである。温度の二乗平均値は、温度の相関関数、式(37)において $\bar{\tau}=0$ を代入することにより得られる。この図で、加熱方向への熱伝導率の増加 ($\bar{\eta} < 0$ のとき) が大きく

図 3 熱伝導率の不均質性が応力の二乗平均に及ぼす影響 ($\bar{E}_1=0$)

図 5 熱伝導率の不均質性が応力の二乗平均に及ぼす影響 ($\bar{E}_1=0.5$)

図 4 ヤング率の不均質性が応力の二乗平均に及ぼす影響 ($\bar{\eta}=0$)

図 6 熱伝導率の不均質性が応力の二乗平均に及ぼす影響 ($\bar{E}_1=-0.5$)

なるほど、板の内部への境界温度の伝導がよくなり、均質板 ($\bar{\eta}=0$ のとき) と比較して温度変動の領域が広がっているのがわかる。この図で示されている均質板 ($\bar{\eta}=0$) のときの曲線は、天田⁽⁹⁾が解析した均質平板における温度の二乗平均の曲線と同じ場合であるが、一致していない。ただ両方の理論式は一致しており、数値計算の際、式(37)中の無限二重級数の収束の度合が、両者の計算値が一致していないことの原因だと思われる。本研究では、天田の値からさらに収束した値を算出した。

図 3 は、ヤング率を均質 ($\bar{E}=0$) としたとき、熱伝導率の不均質性が応力変動の二乗平均に及ぼす影響を示したものである。応力の二乗平均は、応力の相関関数、式(40)に $\tau=0$ を代入することにより得られる。ランダム加熱を受けている板の表面 ($\xi=1.0$) から板の内部に行くに従って、応力変動は小さくなっていくが、板の曲げの影響のため、 $\xi=-0.4$ 付近から応力変動が再び増加している。加熱方向に熱伝導率の減少 ($\bar{\eta}>0$ のとき) を大きくすると、板表面の温度変動が内部に伝わりにくくなるため、それにともなう平板内部の応力変動が、抑えられているのがわかる。著者の一人

によって、前に報告された不均質板の決定論的な熱応力解析⁽¹¹⁾によれば、 $\bar{\eta}$ が大きくなれば (加熱方向に熱伝導率の減少を大きくすれば) 熱応力も大きくなったが、本研究の確率論的な解析では、 $\bar{\eta}$ が大きくなれば応力の変動領域が小さくなるのがわかる。

図 4 は、熱伝導率を均質 ($\bar{\eta}=0$) にしたとき、ヤング率の不均質性が応力の二乗平均に及ぼす影響を示している。加熱表面の方向へヤング率が減少するとき ($\bar{E}_1>0$)、 $\xi=1.0$ 付近における平板内部の剛性が小さくなるため、均質板 ($\bar{E}_1=0$) に比べて内部の応力変動が、顕著に抑えられているのがわかる。

図 5 は、ヤング率が加熱方向へ減少するとき ($\bar{E}=0.5$ のとき)、熱伝導率の不均質性が平板の応力変動に及ぼす影響を示している。図 3 と比較すれば、 $\bar{\eta}<0$ の場合でも $\bar{E}_1>0$ であれば、平板内部の応力変動を大きく抑えうることがわかる。

図 6 は、ヤング率が加熱方向へ増加するとき ($\bar{E}_1=-0.5$ のとき)、熱伝導率の不均質性が平板の応力変動に及ぼす影響を示している。このとき、 $\xi=1.0$ 付近の平板内部の剛性が大きくなるために、 $\bar{\eta}>0$ であっても応力変動はあまり抑えられていない。

4. 結 言

(1) 境界温度が時間に対してランダム変動しているときの、不均質板の温度、熱応力の統計量を解析的に導出した。また、数値計算の一例として、境界温度が白色雑音で与えられる場合を計算し、熱伝導率とヤング率の不均質性が、温度と熱応力の統計量に及ぼす影響を示した。

(2) ステップ関数的な境界温度が与えられた場合の不均質板の決定論的な解析では、熱伝導率が加熱表面の方向へ向かって大きく減少すれば熱応力の絶対値は大きくなり、このような不均質板は、均質板に比べて強度的に不利であったが、白色雑音を境界温度とした本研究の解析では、熱応力の変動領域が均質板の場合と比較して、著しく小さくなり、熱疲労に関して均質板より有利である。

(3) 熱伝導率が加熱表面の方向へ増加すれば熱応力の変動領域が大きくなるが、同時にヤング率が同じ

方向に減少すれば、この変動領域を小さく抑えることができる。

文 献

- (1) Keller, J. B., ほか 2 名, *Communication on Pure Appl. Math.*, **32** (1978), 583.
- (2) Chen, Y. M., ほか 1 名, *J. Math. Phys.*, **46** (1967), 188.
- (3) Ahmadi, G., *J. Appl. Mech., Brief Notes*, **45** (1978), 933.
- (4) Samuels, J. C., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **9** (1966), 301.
- (5) Hung, H. M., *J. Heat Transfer*, **91** (1969), 129.
- (6) Ahmadi, G., *J. Heat Transfer*, **96** (1974), 444.
- (7) Zeman, J. L., *Acta Mech.*, **1** (1965), 194.
- (8) Heller, R. A. and Thangjiitham, S. Hetnarski, R. B. 編, "Thermal Stresses II," (1987), 209, Elsevier.
- (9) 天田, 材料, **31-342** (昭 57), 251.
- (10) Barrett, P. R., *J. Nuclear Eng. Des.*, **35** (1975), 41.
- (11) Sugano, Y., *Ing. Arch.*, **57** (1987), 147.
- (12) Kaae, J. L. and Gulden, T. D., *J. Am. Ceram. Soc.*, **54** (1971), 605.
- (13) Price, W. G. and Bishop, R. E. D., 田口・ほか 3 名, 確率過程工学, (昭 55), 77, 155, 共立出版.