横穴をもつ石こう薄肉および中実円筒の圧縮破壊における寸法効果*

今 村 仙 治^{*1}, 佐 藤 和 郎^{*2}

The Size Effects on Fractures of Plaster Thin-Walled and Solid Cylinders with a Transverse Hole under Compression

Senji IMAMURA and Yasuo SATO

This paper describes the experimental results and the theoretical analysis concerning the size effects on fractures of plaster thin-walled and solid cylinders with a transverse hole under compression. The distribution of stresses around the hole is analyzed by the effect of the surface layer. The analytical results coincide well with the experimental data and are concluded as follows. (1) There are two types of fractures, depending on the diameter of the hole, one is the fracture occurring due to the compressive stress and the other is that caused by the tensile stress. (2) The fracture stress of the thin-walled cylinder depends on only the diameter of the hole. (3) The fracture stress of the solid cylinder is influenced not only by the diameter ratio of the hole to the test cylinder, but also by the diameter of the cylinder.

Key Words: Fracture, Stress Concentration, Transverse Hole, Plaster, Surface Layer, Modified Mean Stress Theory

1. 緒 言

ある部材に応力集中を付与しこれを用いてぜい性材料の加工に応用している例もある。これは応力集中の性質を有効に利用したものであるが、一般的には応力集中を生じさせないように工夫している。機械や構造物には円孔や溝、表面欠陥などの応力集中の原因が数多く存在している。このため応力集中をもっている部材が種々の外力を受ける場合、安全に使用するためには設計に際しこれらのことを十分に配慮する必要がある。

著者らはこれまでに横穴をもつ帯板の降伏⁽¹⁾や疲れ⁽²⁾、横穴をもつ軟鋼薄肉⁽³⁾および中実円筒⁽⁴⁾の降伏に関する実験を提示した。ぜい性材料を用いた破壊の実験では大理石⁽⁵⁾⁽⁶⁾、ガラスセラミックス⁽⁷⁾や黒鉛^{(8)~(10)}などの薄肉および中実円筒を用いて各種荷重下においての実験結果を報告している。

本報は応力集中をもつ材料の破壊の研究として、横穴をもつ石こう薄肉および中実円筒の単純圧縮による

破壊の実験結果を示し、円筒の破壊応力に及ぼす横穴径ならびに外径の影響などの説明をぜい性材料の破壊条件式⁽⁹⁾、円孔をもつ無限板の理論および中心穴をもつ帯板の理論⁽¹¹⁾に表面層の考え⁽¹²⁾を導入して解析を試みた。

2. 実 験

2・1 供試材 実験材料は歯科用石こうを用いた。石こう粉末(G. S プラストーン)と水を重量比 5 : 2.8 に配合したものを約 6 箇月間大気中で乾燥し、直径約 300 mm、高さ約 300 mm の石こうを作製した。この素材より試験片の軸が素材の軸と一致するように切り出し薄肉および中実円筒に加工した。

2・1・1 薄肉円筒 円筒の外径 $2r_0$ は 20, 30, 40 mm の 3 種類であり円筒の内径 $2r_i$ と外径 $2r_0$ との比を 0.8 の中空円筒とした。円筒の高さ h_0 と外径との比は各円筒とも 1.8 である。試験円筒は円筒側面中央部に横穴をあけ穴径 $2a$ は 0~3.0 mm の範囲で種々に変化させた。横穴の加工は加工層の影響を少なくするために数本のドリルを用いて所定の穴径に仕上げた。

2・1・2 中実円筒 円筒の外径 $2r_0$ は 14, 20, 30 mm の 3 種類とし、円筒の高さと外径との比は各円筒とも 1.8 とした。試験円筒は円筒側面中央部に貫通し

* 昭和 63 年 10 月 19 日 第 66 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 5 月 25 日。

^{*1} 正員、日本大学工学部 (〒963 郡山市田村町徳定字中河原 1)。

^{*2} 永年員、日本大学工学部。

た横穴をあけ、穴径 $2a$ と外径 $2r_0$ との比 a/r_0 を $0 \sim 0.3$ の範囲内で穴径 $2a$ を種々に変化させた。横穴の加工は薄肉円筒と同様な方法で行った。石こうの引張強さは $\sigma_b = 4.12 \text{ MPa}$ である。

2・2 実験方法 図1に実験装置を示す。図1において (T) は試験円筒、(P) はピストン、(C) はシリンダを示す。円筒 (T) は鋼球を介してピストン (P) により単純圧縮荷重 W を受ける。実験はこうかん式万能試験機 (2, 10 t) を用い、円筒の圧縮応力 σ と円周方向のひずみ ε との関係を求めた。ひずみ ε は $2a=0$ の円筒では円筒側面の中央に、 $2a \neq 0$ のものは穴縁の上下にひずみゲージ (FLE-1) をはり、デジタル静ひずみ計により測定した。

3. 実験結果

3・1 薄肉円筒 図2に外径 $2r_0 = 20 \text{ mm}$ の円筒の応力 σ とひずみ ε との関係を横穴径 $2a$ をパラメータとして示す。図2中の A 点は破壊点を示す。破壊の起こり方は横穴径により異なり2種類のものがある。

(1) $2a=0 \sim 0.6 \text{ mm}$ の円筒では破壊まで応力-ひずみ曲線はわずかに非線形となっているが、破壊点はほぼ同じ値を示している。

図1 実験装置

図2 薄肉円筒の圧縮による応力とひずみの関係

(2) $2a = 1.1 \text{ mm}$ 以上の円筒の応力-ひずみ曲線は A 点まではほぼ弾性的に挙動しているが A 点で別の曲線に移行している。また横穴径が大きくなるにつれてひずみが減少しているのは軸応力によって穴縁近傍に生ずる圧縮成分の影響によるものと思われる。横穴径が大きくなるにつれて破壊点 A は順次低下している。横穴をもつ円筒の応力は次式により求めた。

$$\sigma = \frac{W}{\pi(r_0^2 - r_1^2)} \quad (1)$$

r_1 は円筒の内半径を示す。表1に実験結果を示す。表中の σ_c は円筒の圧縮強さ、 σ_A は横穴をもつ円筒の破壊応力を示す。図3に種々の外径をもつ円筒の圧縮による破壊応力と穴径の関係を示す。縦軸は円筒の破壊応力比 σ_A/σ_c 、横軸は穴径 $2a$ を示す。円筒の破壊応力は穴径が小さいときは直線 (I) に乗っている。穴径が大きくなるにつれて破壊応力は低下し曲線 (II) に乗っている。薄肉円筒の破壊は横穴径のみに依存し円筒外径に関係しないことを示している。図3中の直線

表1 薄肉円筒の圧縮試験結果

Test pieces			Experimental results	
Outside dia. $2r_0$ (mm)	Inside dia. $2r_1$ (mm)	Dia. of hole $2a$ (mm)	Fracture stress σ_A (MPa)	σ_A/σ_c
19.93	16.08	0	24.3	1.00
19.99	15.98	0	26.4	
30.20	24.28	0	25.1	
30.19	24.26	0	25.6	
19.95	16.15	0.42	24.6	0.96
19.98	16.00	0.43	24.4	
30.19	24.35	0.43	24.9	
19.99	16.11	0.63	26.7	1.04
19.98	16.01	0.65	26.2	
30.19	24.35	0.62	25.5	
30.06	23.96	0.63	25.4	
19.97	16.12	0.83	22.9	0.90
19.98	16.00	0.84	22.8	
30.18	24.30	0.82	22.2	
30.01	23.98	0.83	22.2	
19.94	16.13	1.04	19.1	0.75
30.19	24.22	1.07	18.8	
30.02	23.96	1.05	19.0	
19.96	16.18	1.12	17.4	0.71
19.98	15.99	1.10	18.7	
19.95	16.12	1.22	17.5	0.69
19.98	15.98	1.24	17.4	
30.02	23.96	1.26	16.0	
39.95	31.83	1.23	17.0	
19.99	16.09	1.62	15.3	0.58
19.97	15.86	1.67	14.2	
30.02	23.93	1.63	14.1	
20.00	16.06	2.04	13.0	0.49
20.00	15.99	2.01	11.9	
29.99	23.94	2.03	11.9	
30.03	23.94	2.04	11.8	
19.89	16.29	2.54	11.3	0.44
20.00	15.99	2.52	11.1	
30.20	24.26	2.59	10.2	
30.04	23.99	2.56	11.8	
39.96	31.86	2.54	11.5	0.43
39.95	31.69	2.55	11.3	
20.04	16.33	3.08	11.1	0.43
19.98	15.99	3.06	10.5	
30.18	24.31	3.09	10.5	
30.03	23.97	3.05	9.5	

(I), 曲線(II)と $\delta=0.25$ mm については以下に述べる。

3・2 中実円筒 図4に円筒の外径 $2r_0=20$ mm の場合の応力 σ とひずみ ε との関係を、横穴径 $2a$ をパラメータとして示す。図4においてA点は円筒の破壊点である。破壊の起こり方は穴径により異なり、次の2種類のものがあることを示している。

(1) $2a=0\sim 0.4$ mm の円筒では破壊点Aまでわずかに非線形となっている。破壊応力はほぼ同じ値を示している。

(2) $2a=1.2$ mm 以上ではA点まで応力-ひずみ曲線は弾性的に挙動しているがA点以後は別の曲線に移行している。また穴径が増すにつれて破壊点は順次低下している。横穴をもつ円筒の応力 σ は次式から求めた。

$$\sigma = \frac{W}{\pi r_0^2 - 4ar_0} \quad \dots\dots\dots (2)$$

横穴をもっている円筒がA点で破壊していることを知るために次の実験を行った。横穴をもつ円筒にA点以上の荷重を加えその後荷重を除去した。図5に示したようにこの円筒を横穴に垂直な縦断面で切断し黒

インキをしみ込ませて横穴近傍の破壊の様子を観察した。図5の黒い線はインキがすきまに浸透しここで破壊が起こっていることを示している。穴縁から軸方向に破壊が進展しており、このためA点以後円筒内部では破壊による応力の再配分が起こりひずみゲージがこれを感じてひずみが増えたものと思われる。また破壊は横穴を通る縦断面で起こっており、引張応力によって誘起されたことを示している。

表2に外径20 mmの円筒についての実験結果を示す。図6に横穴径 $2a$ と外径 $2r_0$ との比 a/r_0 と破壊応力比 σ_A/σ_c との関係をまとめて示す。円筒の破壊応力は穴径が小さいときは直線(I)に乗っている。穴径が大きくなるにつれて破壊応力は低下し曲線(II)に乗っている。また、 a/r_0 の比が同じであっても外径が大きいものほど破壊応力は低下しており寸法効果が見られる。図6中の直線(I), 曲線(II), $2r_0=\infty$ と $\delta=0.25$ mm については以下に述べる。

表2 中実円筒の圧縮試験結果

Test pieces			Experimental results	
Dia. of cylinder $2r_0$ (mm)	Dia. of hole $2a$ (mm)	a/r_0	Fracture stress σ_A (MPa)	σ_A/σ_c
20.01	0	0	24.6	1.00
20.04	0	0	25.5	
20.03	0.39	0.02	24.9	
20.02	0.41	0.02	25.6	1.01
20.01	0.82	0.04	25.0	
20.02	0.80	0.04	24.3	
19.99	1.01	0.05	20.0	0.98
20.01	1.03	0.05	21.6	
20.01	1.23	0.06	18.6	
20.01	1.22	0.06	17.6	0.83
20.02	1.61	0.08	16.3	
20.03	1.63	0.08	16.7	
20.01	2.03	0.10	14.5	0.72
20.00	2.01	0.10	13.3	
19.97	2.45	0.12	13.4	
19.99	2.46	0.12	13.3	0.66
19.96	2.84	0.14	11.5	
20.02	2.81	0.14	11.6	
19.85	3.24	0.16	11.2	0.55
20.01	3.21	0.16	10.6	
19.94	4.03	0.20	9.7	
20.03	4.03	0.20	9.8	0.53
19.90	4.41	0.22	9.7	
20.03	4.43	0.22	10.1	
19.95	4.81	0.24	9.8	0.46
19.98	4.84	0.24	10.5	
19.90	5.31	0.27	10.5	
20.00	5.32	0.27	9.9	0.43
20.00	6.04	0.30	9.5	
19.98	6.08	0.30	9.2

図3 薄肉円筒の σ_A/σ_c と $2a$ の関係

図4 中実円筒の圧縮による応力とひずみの関係

円筒の軸方向

$2a = 2.8$ mm

図5 破断前に穴縁に生じたクラック

4. 考 察

完全ぜい性材料についての圧縮による破壊条件を佐藤の破壊条件式で示せば

$$\begin{cases} \bar{\tau} = \tau_c & \dots\dots\dots (3) \\ \tau_s = 1.5\tau_c & \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

となる。 τ_c は材料の単純圧縮による破壊点におけるせん断応力、せん断応力 τ の関係を圧縮応力 σ_c を用いて示せば次のようになる。

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \sigma_c & \dots\dots\dots (5) \\ \sigma_s = 1.5\sigma_c & \dots\dots\dots (6) \end{cases}$$

$\bar{\sigma}$ は破断面全体に働く圧縮応力 σ の荷重に対する効き方を考慮した付重平均値、 σ_c は単純圧縮による材料の破壊点における応力、 σ_s は σ の最大応力を示す。また、せん断応力 τ_c と圧縮応力 σ_c との関係は

$$\sigma_c = 2\tau_c$$

である。条件式(5)は平均応力説と呼ばれており、このときの破壊は応力分布が均等なときを含めて、比較的緩やかなときに起こる。条件式(6)は式(5)の適用限界を示し、これによる破壊は応力分布が比較的急なときに起こる。

4.1 薄肉円筒の破壊 図3において横穴径が比較的小さいときの破壊は直線(I)に乗り、平均応力説で起こったことを示している。横穴径が大きくなると横穴の影響を受けてきて破壊は曲線(II)に乗り、平均応力説の適用限界によって起こっていることを示している。円筒径に比べて横穴径が小さい薄肉円筒の横穴近傍における応力分布は、円孔をもつ無限板のそれに近似できる。本実験結果は弾性理論が示すようにでておらず、以下に述べる方法で解析を行った。

中西は中心穴をもつ帯板の穴近傍における応力分布について表面層の考えを提示している。図7に表面層を考慮した穴近傍の応力分布を示す。図7において

図6 中実円筒の σ_A/σ_c と a/r_0 の関係と寸法効果の限界

矢印は圧縮方向を示す。 σ は弾性理論による応力分布である。表面層を考慮したときの応力分布 σ' を示せば

$$\sigma' = \sigma \left\{ 1 - \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。ここで δ は表面層の厚さで材料固有なものである。 y は材料の表面からの深さで $0 \leq y \leq \delta$ である。弾性理論では穴縁における最大応力は σ_s で示されているが、表面層の考えを用いれば最大応力は σ_i をとる。このことより式(6)は

$$\sigma_i = 1.5\sigma_c \dots\dots\dots (8)$$

となる。また、ぜい性材料の引張りによる破壊の条件を示すと

$$\sigma_i = 1.5\sigma_b \dots\dots\dots (9)$$

σ_b は材料の引張強さである。

横穴の中心を通る円筒の縦断面上の応力分布を表面層の考えを考慮して求めると次式のように表すことができる。

$$\frac{\sigma'}{\sigma_A} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{n^2} - 3 \frac{a^4}{n^4} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 σ_A は円筒の破壊応力、 a は横穴の半径、 n は横穴中心からの距離。円筒の破壊応力比 σ_A/σ_c は次式のように表すことができる。

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_c} = \frac{\sigma_A}{\sigma_i} \frac{\sigma_i}{\sigma_b} \frac{\sigma_b}{\sigma_c} \dots\dots\dots (11)$$

$\sigma_i/\sigma_A (= \alpha)$ は圧縮による表面層を考慮したときの弾性応力集中係数を示す。式(9)より

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_c} = \frac{1.5}{\alpha} \frac{\sigma_b}{\sigma_c} \dots\dots\dots (12)$$

となり、図3中の曲線(II)は $\sigma_c = 25.4$ MPa、 $\sigma_b = 4.12$ MPaおよび表面層の厚さ $\delta = 0.25$ mmとして式(12)より求めた計算値であり、実験値と良い一致を示している。

4.2 中実円筒の破壊 図6において横穴径が比較的小さいときの円筒の破壊は横穴の影響を受けず、その破壊応力は直線(I)に乗り平均応力説で起こったことを示す。次に曲線(II)による破壊の説明を行う。

図7 穴近傍の応力分布

(a) 穴径が小さいとき (b) 穴径が大きいとき

図 8 穴径による応力分布の変化

横穴径が大きくなるにつれて円筒の破壊応力は低下しておりこのときの破壊は平均応力説の適用限界で起こったことを示す。この説明を行うためには円筒の破壊点における応力分布を知る必要がある。しかしまだ横穴をもつ中実円筒の応力分布については明らかにされていない。そこで、横穴をもつ円筒の破壊点における応力分布を知るために、横穴をもつアクリル中実円筒の引張試験を行った。この破面を観察した結果横穴をもつ中実円筒の引張りによる最大応力は、横穴の中心を通る横断面の中央部に発生することが確認された⁽⁴⁾。横穴をもつ円筒が圧縮を受けたときの最大応力をとる位置は引張りにおけるものと同様である。このことにより横穴をもつ円筒を中心穴をもつ帯板(穴径 $2a$, 板幅 $2r_0$)におきかえて解析を行った。

円筒の圧縮による破壊応力が σ_A であるとき円筒の破壊応力比 σ_A/σ_c は薄肉円筒の場合と同様に表すことができる。

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_c} = \frac{1.5}{\alpha} \frac{\sigma_b}{\sigma_c} \dots\dots\dots (13)$$

ここで $\alpha (= \sigma_i/\sigma_A)$ は圧縮による弾性応力集中係数で表面層を考慮した Howland の解により求めた。図 6 中の曲線(II)は $\sigma_b = 4.12$ MPa, 表面層の厚さ $\delta = 0.25$ mm として式(13)より求めた計算値である。

4.3 寸法効果 図 8 に圧縮を受けた円筒の横穴を通る縦断面における穴近傍の応力分布を示す。図 8 (a), (b) は横穴径 $2a$ と外径 $2r_0$ の比 a/r_0 は等しい。 σ_s は最大応力, σ_i は表面層を考慮したときの最大応力, δ は表面層の厚さをそれぞれ示す。応力 σ_i は穴径が大きいもののほうが高い値を示しており、このことから外径の大きい円筒のほうが小さい円筒よりも破

壊応力は低下することとなる。以上のことより横穴をもつ中実円筒の寸法効果が説明できる。

また、図 3 に示した薄肉円筒の破壊において穴径が小さいほど破壊応力は上昇するが斜線で示した上限がある。この上限は条件式(5)によって与えられる。図 6 における中実円筒の破壊応力は穴径と外径により異なり、穴径と外径が小さくなればなるほど破壊応力は上昇しこのときの上限も条件式(5)により与えられ図 6 中の直線(I)の斜線で示される。外径が非常大きくなると表面層の影響はなくなり σ_i は σ_s となり式(13)により下限($2r_0 = \infty$ で示した斜線部分)が与えられる。

5. 結 論

本報では横穴をもつ石こう薄肉および中実円筒の圧縮による破壊の実験結果を示した。横穴をもつ円筒の破壊についての説明を佐藤の破壊条件、円孔をもつ無限板の理論と中心穴をもつ帯板の理論に中西の表面層の考えを導入して行った。本研究により得られた主なことは

- (1) 薄肉円筒と中実円筒の破壊応力は横穴径により異なり、平均応力説とその適用限界で起こる 2 種類のものがある。
- (2) 薄肉円筒の破壊応力は横穴径のみに依存する。
- (3) 中実円筒の破壊応力は a/r_0 の比のみならず、円筒外径にも依存し寸法効果がある。また、薄肉円筒の破壊応力には上限、中実円筒では上、下の限界を示した。
- (4) 本実験で用いた石こうの表面層の厚さは $\delta = 0.25$ mm であり従来のものと等しい。

文 献

- (1) 今村・佐藤, 機論, 52-477, A (昭 61), 1440.
- (2) 佐藤・荒井, 機論, 34-267(昭 43), 1871.
- (3) 佐藤・ほか 3 名, 機論, 43-373(昭 52), 3209.
- (4) 今村・佐藤, 機論, 53-489, A (昭 62), 911.
- (5) 佐藤・柳, 機論, 41-346(昭 50), 1658.
- (6) 佐藤・桜井, 機論, 43-374(昭 52), 3702.
- (7) 佐々木・ほか 3 名, 機論, 44-388(昭 53), 4024.
- (8) 佐藤・ほか 2 名, 機論, 46-406, A (昭 55), 557.
- (9) 佐藤・ほか 2 名, 機論, 46-406, A (昭 55), 564.
- (10) 今村・佐藤, 設計製図, 23-151(昭 63), 94.
- (11) Howland, R. C. J., *Philos. Trans. R. Soc., A*, 299 (1930), 49.
- (12) 中西・ほか 4 名, 機論, 19-87(昭 28), 14.