移動転位による複合弾性体の動的界面応力*
(刃状転位による定常界面応力)渡辺 計彦*¹, 渡辺 一実*², 平野 芳太郎*²Dynamic Interfacial Stress in Bonded Two-Dissimilar
Elastic Solids to a Moving Dislocation
(Steady-State Response to an Edge Dislocation)

Kazuhiko WATANABE, Kazumi WATANABE, and Yoshitaro HIRANO

This paper considers the steady-state response of the interfacial contact stress in a bonded two-dissimilar elastic half-spaces to a moving edge dislocation. Two contact conditions, "welded" and "lubricated", are treated and the contact stresses are obtained in a simple closed form. Numerical computations show the effect of the Stonely wave on the contact stress.

Key Words: Dynamic Stress, Edge Dislocation, Laminates, Contact Stress, Steady-State, Composites

1. 緒 言

本報では刃状転位による動的界面応力の解析を行う。刃状転位は面内変形(平面ひずみ)として解析され、界面にはストンリー波⁽¹⁾の生じる可能性がある。このストンリー波存在領域近傍での界面応力の挙動は複合材料の界面はく離問題と関連して興味深いものと思われる。

本報では、二種の弾性体が平面境界で接合された複合弾性体を対象として、界面近傍を移動する刃状転位によって生じた界面応力の解析を行う。界面の接合条件として

- (1) 完全接合 (Welded contact)
- (2) 接触接合 (Lubricated contact)

の二種類を考える。

2. 問題の設定

図1のように二種の半無限弾性体から成る複合弾性体を考え、接合界面を x 軸とする座標系 (x, y) をと

る。刃状転位は界面から距離 h の材質 I 中に存在し、 x 軸と平行に幅 $2a$ をもって移動しているものとする。なお、本問の転位モデルは実際の現象から設定したものではないが、ストンリー波を生じさせる起源としての役割を持たせた。

刃状転位を水平変位 u_x の食い違いとすれば、転位面上での水平変位の跳躍量は

$$[u_x] = U_0 H(a - |ct - x|); y = h \quad \dots\dots\dots (1)$$

として与えられるものとする。ここに、 U_0 は転位量であり、 c は転位の移動速度である。

解析の便宜上、材質 I の領域を転位面上でさらに分割し、三つの領域としたのち各領域中の変位・応力に

図 1 複合弾性体と座標系

* 昭和 63 年 8 月 24 日 第 951 回講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 9 月 4 日。

*¹ 正員、三菱自動車工業(株) (〒444 岡崎市橋目町字中新切 1)。

*² 正員、山形大学工学部 (〒992 米沢市城南 4-3-16)。

は肩添字を、物性値には下添字を付して区別する。すなわち、

領域 I - $a(0 < y < h)$;

$$u_i^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}, \lambda_1, \mu_1, \rho_1, C_{d1}, C_{s1}$$

領域 I - $b(h < y < \infty)$;

$$u_i^{(3)}, \sigma_{ij}^{(3)}, \lambda_3, \mu_3, \rho_3, C_{d3}, C_{s3}$$

領域 II ($0 > y > -\infty$) ;

$$u_i^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \lambda_2, \mu_2, \rho_2, C_{d2}, C_{s2}$$

ここに、 $(\lambda_i, \mu_i, \rho_i)$ はラーメの定数と密度を表し、 (C_{di}, C_{si}) は膨張波とせん断波の伝ば速度である。さらに、次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_3, \mu_1 = \mu_3, \rho_1 = \rho_3 \\ C_{d1} &= C_{d3}, C_{s1} = C_{s3}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

平面ひずみ状態を仮定すれば、各領域中での運動方程式と構成式は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \rho \ddot{u}_i^{(k)} \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_k^{-1} \sigma_{ij}^{(k)} &= (\gamma_k^2 - 2)(u_{i,x}^{(k)} + u_{j,y}^{(k)}) \delta_{ij} + u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)} \\ &; k=1, 2, 3; i, j=x, y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$\gamma_k = C_{dk}/C_{sk} \dots\dots\dots (5)$$

境界条件として、転位面上での条件

$$\left. \begin{aligned} y &= h; \\ u_x^{(1)} - u_x^{(3)} &= U_0 H(a - |ct - x|) \\ u_y^{(1)} - u_y^{(3)} &= 0 \\ \sigma_{yy}^{(1)} - \sigma_{yy}^{(3)} &= 0, \sigma_{xy}^{(1)} - \sigma_{xy}^{(3)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

と界面での接合条件

(1) 完全接合 (Welded contact)

$$\left. \begin{aligned} y &= 0; \\ u_i^{(1)} - u_i^{(2)} &= 0, \\ &; i=x, y \\ \sigma_{yi}^{(1)} - \sigma_{yi}^{(2)} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

もしくは、

(2) 接触接合 (Lubricated contact)

$$\left. \begin{aligned} y &= 0; \\ u_y^{(1)} - u_y^{(2)} &= 0 \\ \sigma_{yy}^{(1)} - \sigma_{yy}^{(2)} &= 0 \\ \sigma_{xy}^{(1)} &= 0, \sigma_{xy}^{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

が与えられ、さらに無限遠 ($y \rightarrow \pm \infty$) での収束条件

$$\left. \begin{aligned} u_i^{(3)} &\rightarrow 0; y \rightarrow +\infty \\ u_i^{(2)} &\rightarrow 0; y \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

が付加される。

3. 解 析

いま、転位は定常移動状態にあるものとして、移動座標 $(\bar{x}, y)$ への変換

$$\bar{x} = x - ct \dots\dots\dots (10)$$

によって、時間変数 t を消去したのち、変数 $\bar{x}$ に関するフーリエ変換

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \exp(i\xi \bar{x}) d\bar{x} \dots\dots\dots (11)$$

を行うと、積分変換された一般解は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} u_x^{(k)} &= -i\alpha_k \operatorname{sgn}(\xi)(A^{(k)} E_{\alpha k} - B^{(k)} E_{\alpha k}^{-1}) \\ &\quad - \frac{i\gamma_k}{\beta_k} \operatorname{sgn}(\xi)(C^{(k)} E_{\beta k} - D^{(k)} E_{\beta k}^{-1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} u_y^{(k)} &= A^{(k)} E_{\alpha k} + B^{(k)} E_{\alpha k}^{-1} \\ &\quad + C^{(k)} E_{\beta k} + D^{(k)} E_{\beta k}^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

; $k=1, 2, 3$ (not sum for k)

ここに、 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ は符号関数であり、

$$E_{\alpha k} = \exp(\alpha_k |\xi| y) \dots\dots\dots (14)$$

$$E_{\beta k} = \exp(\beta_k |\xi| y / \gamma_k) \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k &= (1 - M_k^2)^{1/2}, \beta_k = (\gamma_k^2 - M_k^2)^{1/2} \\ M_k &= c / c_{sk}, 0 < M_k < 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

未定係数は無限遠での収束条件式(9)より、

$$A^{(3)} = C^{(3)} = B^{(2)} = D^{(2)} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

また転位面および接合面での境界条件式(6)~(8)から、残りの未定係数に関する連立方程式

$$\left. \begin{aligned} [\chi_{ij}] \cdot [B^{(3)}, D^{(3)}, A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}, D^{(1)}, A^{(2)}, C^{(2)}]^T \\ = [F_x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

が得られる。ここに、行列要素 χ_{ij} は付録Aに与えられており、

$$F_x = -\frac{i\beta_1}{\xi} U_0 \sin(a|\xi|) \dots\dots\dots (19)$$

連立方程式(18)を解き、接合界面上 ($y=0$) での応力を求める**1。無次元界面応力、 τ_{ij} を次式

$$\tau_{ij} = \frac{a}{\mu_2 U_0} \sigma_{ij}|_{y=0} \dots\dots\dots (20)$$

で定義すると、フーリエ変換された界面応力は、

(A) 完全接合

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{yy} &= i \sin(a\xi) \left\{ \frac{F_a}{F_w} \exp(-\alpha_1 |\xi| h) \right. \\ &\quad \left. + \frac{F_b}{F_w} \exp(-\beta_1 |\xi| h / \gamma_1) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{xy} &= \sin(a|\xi|) \left\{ \frac{G_a}{F_w} \exp(-\alpha_1 |\xi| h) \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_b}{F_w} \exp(-\beta_1 |\xi| h / \gamma_1) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

(B) 接触接合

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{yy} &= i \sin(a\xi) \frac{G_t}{F_t} \left\{ \exp(-\alpha_1 |\xi| h) \right. \\ &\quad \left. - \exp(-\beta_1 |\xi| h / \gamma_1) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

**1 連立方程式は Cambridge LISP 68000 上の REDUCE Ver. 3.2 を用いて解かれた。

図 2 ストンリー波の存在領域

$$\nu_1 = .30 \quad \nu_2 = .30 \quad \lambda = .5 \quad \delta = 3.0 \quad H = 1.0$$

図 3 界面応力の分布 (ストンリー波が存在しない場合)

図 4 界面応力の分布 (ストンリー波が存在する場合)

となる。ここに、 $F_a, F_b, G_a, G_b, G_t, F_w, F_t$ は付録Bに与えられている。

上式(21)～(23)は簡単な積分公式⁽²⁾

$$\int_0^{\infty} \cos(ax) e^{-\beta x} dx = \frac{\beta}{a^2 + \beta^2} \dots\dots\dots (24)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(ax) e^{-\beta x} dx = \frac{a}{a^2 + \beta^2} \dots\dots\dots (25)$$

を用いてフーリエ逆変換を行うことができる。その結果、界面応力は次式となる。

(1) 完全接合の場合

$$\begin{aligned} \tau_{yy} = & \frac{F_a}{F_w} \{T_a(X-1) - T_a(X+1)\} \\ & + \frac{F_b}{F_w} \{T_b(X-1) - T_b(X+1)\} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & \frac{G_a}{F_w} \{S_a(X-1) - S_a(X+1)\} \\ & + \frac{G_b}{F_w} \{S_b(X-1) - S_b(X+1)\} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

(2) 接触接合の場合

$$\begin{aligned} \tau_{yy} = & \frac{G_t}{F_t} \{T_a(X-1) - T_a(X+1) \\ & - T_b(X-1) + T_b(X+1)\} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここに、

$$T_a(z) = \frac{z}{z^2 + (\alpha_1 H)^2} \dots\dots\dots (29)$$

$$T_b(z) = \frac{z}{z^2 + (\beta_1 H/\gamma_1)^2} \dots\dots\dots (30)$$

$$S_a(z) = \frac{\alpha_1 H}{z^2 + (\alpha_1 H)^2} \dots\dots\dots (31)$$

$$S_b(z) = \frac{\beta_1 H/\gamma_1}{z^2 + (\beta_1 H/\gamma_1)^2} \dots\dots\dots (32)$$

$$X = \bar{x}/a, H = h/a \dots\dots\dots (33)$$

4. 数 値 計 算

複合材中の界面ストンリー波は剛性率比 δ と密度比 λ ,

$$\delta = \mu_2/\mu_1, \lambda = \rho_1/\rho_2 \dots\dots\dots (34)$$

によってその存在領域が決まる。図2は両材質のポアソン比を0.3とした場合のストンリー波の存在領域とその速度変化 c_{st} を示したものである。なお、ポアソン比の変化は存在領域の幅と速度にはあまり影響を与えない。

界面応力 τ_{ij} の計算に当たっては、各材質中のポアソン比 ν_1, ν_2 , 剛性率比 δ , 密度比 λ , 転位の位置 H および材質I中のせん断波に対するマッハ数 $M(=M_1)$ をパラメータとした。このため、材質II中のマッハ数 M_2 とは次の関係

$$M_2 = M(\lambda/\delta)^{1/2} \dots\dots\dots (35)$$

がある。

図3はストンリー波が存在しない場合での界面応力の分布転位速度による変化を示したものである。完全接合の場合では転位の移動速度が小さくなるにつれ応力値は大きくなるがその変化は滑らかである。しかし、マッハ数が $M=1$ の近傍では転位の前・後端直下で応力は急しゅんな変化をする。接触接合の場合では応力値とその変化もきわめて小さく、 $M=1$ 近傍においてのみ変化をする。

図4はストンリー波が存在する場合での応力分布の変化を示す。完全接合の場合では、転位の移動速度がストンリー波の速度に近づくにつれて垂直界面応力は転位直下近傍で複雑な変化をするのに対し、せん断応力は転位の前・後端部付近で急変したのち転位直下ではほぼ一様となっている。転位の移動速度がストンリー波の速度を超えると、応力値は急速に減少してゆく。接触接合の場合では、ストンリー波速度の直前・直後においてきわだつ変化が見られるが、ストンリー波の速度からの影響範囲はきわめて小さい。このことは、ストンリー波の影響は接触接合よりも完全接合の場合に顕著となっていることがわかる。

図5は完全接合状態での密度比 λ の変化による応力分布の相異を見たものである。剛性率比が $\delta=1$ のときにはストンリー波が存在し、その前後において応力分布は急変するがストンリー波が存在しないならば、応力は滑らかに変化する。

図6は転位の位置による応力分布の相異を示したものである。転位が界面に近づくこと($H=0.5$)転位の前・後端直下付近で急しゅんな変化が生じている。このときの応力分布は図3, 4での $M=1$ 近傍の場合と類似したものとなっている。すなわち、転位の移動速度が音速に近づくことと、転位が界面に近づくことは界面応力に対してほぼ同じ効果をもつものと考えられる。

図7はポアソン比の組合せを変えた場合の応力分布を比較したものである。ポアソン比が同じ場合($\nu_1=\nu_2=0.3$)では均質体($\delta=1$)が最も小さな応力になるのは垂直応力であり、せん断応力はこれと逆に最も大きな応力となっている。また、転位の存在する材質のポアソン比が小さいと剛性率比が小さいときに応力が大きくなり、転位の存在する材質のポアソン比が大きいと($\nu_1=0.45, \nu_2=0.1$)、剛性率比が大きいときに応力が大きくなる傾向にある。このことはせん断応力よりも垂直応力に対して顕著である。

5. 結 言

二種の半無限体を接合した複合弾性体中の移動刃状転位による定常界面応力を解析し、界面ストンリー波

図 5 密度比による界面応力分布の相異 (完全接合の場合)

が界面応力に及ぼす効果などについて検討を行った。その結果は以下のように要約される。

- (1) 接触接合よりも完全接合の場合にストンリー波の影響が大きく顕著である。
- (2) 完全接合の場合では、転位の移動速度が小さいほど大きな応力となる。
- (3) 転位の移動速度がストンリー波の速度に近づくと、応力は転位の前・後端部直下では急しゅんな変化を示す。
- (4) 転位の移動速度が音速に近づいた場合の応力分布と、転位が界面に近づいた場合のそれとはほぼ同様なものとなる。

(5) 転位の存在する材質のポアソン比が小さく、剛性率が大きいとき、界面垂直応力は大きくなる。

本報では、界面近傍の移動転位による定常界面応力について考察を行ったものであり、ストンリー波その

図 6 転位の位置による応力分布の変化

図 7 ポアソン比の組合せによる応力分布の相異

ものが引き起こす界面応力について解析していない。次報では、衝撃界面応力について解析し、ストンリー波そのものが引き起こす界面応力についても検討を行うことにしている。

〔付 録 A〕

(1) 完全接合

$$[\chi_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \beta_1 E_{a1}^{-1} & \gamma_1 E_{\beta 1}^{-1} & \alpha_1 \beta_1 E_{a1} & -\alpha_1 \beta_1 E_{a1}^{-1} & \gamma_1 E_{\beta 1} & -\gamma_1 E_{\beta 1}^{-1} & 0 & 0 \\ E_{a1}^{-1} & E_{\beta 1}^{-1} & -E_{a1} & -E_{a1}^{-1} & -E_{\beta 1} & -E_{\beta 1}^{-1} & 0 & 0 \\ 2\alpha_1 \beta_1 E_{a1}^{-1} & \gamma_1 m_1 E_{\beta 1}^{-1} & 2\alpha_1 \beta_1 E_{a1} & -2\alpha_1 \beta_1 E_{a1}^{-1} & \gamma_1 m_1 E_{\beta 1} & -\gamma_1 m_1 E_{\beta 1}^{-1} & 0 & 0 \\ m_1 E_{a1}^{-1} & 2E_{\beta 1}^{-1} & -m_1 E_{a1} & -m_1 E_{a1}^{-1} & -2E_{\beta 1} & -2E_{\beta 1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha_1 \beta_1 \beta_2 & -2\alpha_1 \beta_1 \beta_2 & \gamma_1 \beta_2 m_1 & -\gamma_1 \beta_2 m_1 & -2\delta \alpha_2 \beta_1 \beta_2 & -\delta \gamma_2 \beta_1 m_2 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \beta_1 \beta_2 & -\alpha_1 \beta_1 \beta_2 & \gamma_1 \beta_2 & -\gamma_1 \beta_2 & -\alpha_2 \beta_1 \beta_2 & -\gamma_2 \beta_1 \\ 0 & 0 & m_1 & m_1 & 2 & 2 & -\delta m_2 & -2\delta \end{bmatrix}$$

(2) 接触接合

$$[\chi_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \beta_1 E_{a1}^{-1} & \gamma_1 E_{\beta 1}^{-1} & \alpha_1 \beta_1 E_{a1} & -\alpha_1 \beta_1 E_{a1}^{-1} & \gamma_1 E_{\beta 1} & -\gamma_1 E_{\beta 1}^{-1} & 0 & 0 \\ E_{a1}^{-1} & E_{\beta 1}^{-1} & -E_{a1} & -E_{a1}^{-1} & -E_{\beta 1} & -E_{\beta 1}^{-1} & 0 & 0 \\ 2\alpha_1 \beta_1 E_{a1}^{-1} & \gamma_1 m_1 E_{\beta 1}^{-1} & 2\alpha_1 \beta_1 E_{a1} & -2\alpha_1 \beta_1 E_{a1}^{-1} & \gamma_1 m_1 E_{\beta 1} & -\gamma_1 m_1 E_{\beta 1}^{-1} & 0 & 0 \\ m_1 E_{a1}^{-1} & 2E_{\beta 1}^{-1} & -m_1 E_{a1} & -m_1 E_{a1}^{-1} & -2E_{\beta 1} & -2E_{\beta 1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha_1 \beta_1 \beta_2 & -2\alpha_1 \beta_1 \beta_2 & \gamma_1 \beta_2 m_1 & -\gamma_1 \beta_2 m_1 & -2\delta \alpha_2 \beta_1 \beta_2 & -\delta \gamma_2 \beta_1 m_2 \\ 0 & 0 & m_1 & m_1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 2 \end{bmatrix}$$

ここに,

$$E_{a1} = \exp(|\xi| \alpha_1 h), \quad E_{\beta 1} = \exp(|\xi| \beta_1 h / \gamma_1)$$

$$m_1 = 2 - M_1^2, \quad m_2 = 2 - M_2^2$$

〔付 録 B〕

$$F_a = (\alpha_1^2 + 1) \{ \gamma_1 (\alpha_1^2 + 1) \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1) - 2\alpha_2 \beta_2 \} - 2\gamma_2 \alpha_2 \beta_1 (\alpha_2^2 - 1) - \delta \gamma_1 \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1)^2 - 4\alpha_2 \beta_2 \} \}$$

$$F_b = 2\beta_1 \beta_2 \{ \gamma_2 \alpha_2 (\alpha_1^2 + 1) (\alpha_2^2 - 1) - 2\alpha_1 \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1) - 2\alpha_2 \beta_2 \} + \delta \alpha_1 \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1)^2 - 4\alpha_2 \beta_2 \} \}$$

$$G_a = \gamma_1 \beta_2 (\alpha_1^2 + 1) (\alpha_2^2 + 1) - 2\beta_1 \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1) - 2\alpha_2 \beta_2 \} + \delta \beta_1 \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1)^2 - 4\alpha_2 \beta_2 \}$$

$$G_b = (\alpha_1^2 + 1) \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1) - 2\alpha_2 \beta_2 \} - 2\alpha_1 \beta_2 (\alpha_2^2 - 1) - \delta \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1)^2 - 4\alpha_2 \beta_2 \}$$

$$G_t = 2\beta_1 (\alpha_1^2 + 1) \{ 4\alpha_2 \beta_2 - \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1) \}$$

$$F_w = (\alpha_2 \beta_2 - \gamma_2) \{ \gamma_1 (\alpha_1^2 + 1)^2 - 4\alpha_1 \beta_1 \} + \delta^2 (\alpha_1 \beta_1 - \gamma_1) \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1)^2 - 4\alpha_2 \beta_2 \}$$

$$- \delta \{ (\alpha_1^2 - 1) (\alpha_2^2 - 1) (\gamma_1 \alpha_1 \beta_2 + \gamma_2 \alpha_2 \beta_1) + 2 \{ \gamma_1 (\alpha_1^2 + 1) - 2\alpha_1 \beta_1 \} \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1) - 2\alpha_2 \beta_2 \} \}$$

$$F_t = \beta_2 (\alpha_2^2 - 1) \{ \gamma_1 (\alpha_1^2 + 1)^2 - 4\alpha_1 \beta_1 \} + \delta \beta_1 (\alpha_1^2 - 1) \{ \gamma_2 (\alpha_2^2 + 1)^2 - 4\alpha_2 \beta_2 \}$$

文 献

- (1) Stonely, R., *Proc. R. Soc., Ser. A* 106 (1924), 416.
 (2) Erdélyi, A. (Ed.), *Tables of Integral Transforms*, 1 (1954), 14 McGraw-Hill.