弾塑性アーチの面内非対称飛び移り座屈の実験*

伊藤 智 啓^{*1}, 川嶋 紘一郎^{*1}In-Plane Asymmetric Snap-Through Buckling of Elastic-Plastic Arches;
Experimental Investigation

Toshihiro ITO and Koichiro KAWASHIMA

An experimental system is devised to investigate the asymmetric snap-through process of a pin-ended elastic-plastic arch under a concentrated load. A special device is used to bear the compressive reaction in the initial stage and the tensile reaction after the snap-through at the arch ends. In the system, the deflection at the loaded point is increased gradually and the resulting transverse load and thrust are continuously measured. The deformed shape of the arch line and the strain at certain locations are measured at several stages during the snap-through. The numerical results in which the reversed plasticity is taken into account are found to agree well with the experimental ones, while the results neglecting the reversed plasticity give a far smaller deflection after the snap-through.

Key Words: Buckling, Arch, Numerical Analysis, Plasticity, Reversed Plasticity

1. 緒 言

アーチ構造では、臨界荷重値に達したとき、しばしば飛び移り座屈を起こす。地震時におけるような変位形の荷重を受ける場合には、臨界荷重値とともに、座屈後の挙動を知ることが安全上重要である。

そこで著者らは剛体棒と非線形ばねで構成される離散化モデル⁽¹⁾を用いて、弾塑性アーチの面内対称飛び移り座屈過程を解析し、アーチの形状、支持方法、荷重条件、材料特性(特に逆負荷塑性)等が、臨界荷重および座屈後の荷重-たわみ曲線に及ぼす影響を明らかにしてきた⁽²⁾⁽³⁾。しかし、実際の構造物では、荷重の偏心や初期不整のため完全に対称な変形は期待できず、座屈荷重は対称モードの場合より小さくなることが予想される。このため、任意の位置に集中荷重を受けるアーチの非対称な飛び移り座屈挙動を解析し、臨界荷重および荷重-たわみ曲線に及ぼす荷重の作用点の位置、アーチの厚さ、材料特性等の影響を明らかにした⁽⁴⁾。

一方、弾塑性アーチの非対称座屈に関する実験は、これまで非対称な分布荷重を受ける放物線アーチ⁽⁵⁾、箱形断面の円弧アーチ⁽⁶⁾について報告されているが、いずれも座屈後挙動を扱っていない。荷重制御の実験では、臨界荷重において飛び移り座屈が起こるので、この座屈過程におけるアーチの挙動を明らかにするためには、たわみ制御の実験により、臨界荷重以降の荷重の低下する過程も連続して追跡することが必要である。また上記の研究においては、試験片に設けた穴に軸を通すことにより回転支持の条件を実現しているが、穴を設けた端部の厚さの影響や、軸力による軸と穴との接点に生じる局所的な塑性変形の影響は明らかにされていない。

そこで本報では、アーチ中央からいくらか離れた点に集中荷重を受ける両端回転支持の円弧アーチについて、たわみ制御飛び移り座屈の実験を行い、軸線を含む平面内の非対称座屈過程における荷重-たわみ関係、支点の水平反力とたわみの関係、たわみ形状およびひずみ履歴を示すとともに、既報⁽⁴⁾の数値解と比較検討を行った。

2. 実験装置および方法

2-1 実験装置 実験装置の概要を図1に示す。た

* 昭和63年10月19日 第66期全国大会講演会において講演。原稿受付 昭和62年11月17日。

^{*1} 正員、名古屋工業大学 (〒466 名古屋市中区御器所町)。

わみ制御のもとでアーチに集中荷重を加え、それによるアーチ端の水平反力（図1に示す装置では支点反力の垂直方向成分であるが、通常の水平に支持されるアーチにおいては反力の水平方向成分であるので以下、このように呼ぶ）をも同時に測定するため、剛性の大きな電気油圧サーボ試験機のフレームに実験装置を取付けた。集中荷重は、ネジを用いた負荷装置④により、アーチ中央より10 mm（アーチ全長の1/20）だけ離れた位置のたわみを与えることにより加えられる。荷重は半円柱状の受座②を介してアーチ試験片①に作用させ、アーチ幅全体に一樣な荷重が加わり、作用点の局所的な変形を防ぐようにした。アーチ端の支持装置⑤⑥は電気油圧サーボ試験機の上下チャック部⑦⑧に取付けられる。

この支持装置の構成を図2に示す。飛び移り座屈前の圧縮の軸力および飛び移り後の引張りの軸力に対してもアーチ端の回転支持の条件が実現されるように、この装置では試験片の端面の中心が常に切欠きを設けた丸棒の中心線上に保たれる。飛び移り前に試験片端面が受ける圧縮力は端面と軸溝底面により、飛び移り後に受ける引張力は試験片の側面にアラルダイトで接着したキーと軸に設けたキー溝により支えられる。軸はころ軸受で支持される。キーは試験片端面から1 mmのすき間を持たせて貼り付け、圧縮力は試験片の端面のみに作用するようにした。

アーチ中央のたわみは変位変換器⑨（測定範囲20 mm）で測定し、集中荷重 P はロードセル③（容量2t）で、また水平反力 Q は油圧サーボ試験機のロードセル⑧（容量±2t）により測定し、これらをX-Yレコーダで記録した。また、各変形段階におけるアーチ中央部の100 mmの範囲のたわみ形状は、二つの変位変換器⑩（スパン方向：測定範囲100 mm）と、⑪（ライズ方向：測定範囲20 mm）を用い後者をアーチのスパン方向に移動させながら測定し、X-Yレコーダで記録した。

集中荷重 P の作用点を正確に規定するため、ロードセル③はガイドに沿って平行に移動させたので、作用点の位置の誤差は±0.1 mmである。またアーチ支点間の距離は油圧サーボ試験機のアクチュエータ⑦により試験中一定（誤差0.02 mm以内）に保たれた。さらに上下支持装置⑤⑥の相対位置精度は0.05 mm以内になるように調整した。

2.2 アーチ試験片 A2017 アルミニウム合金の丸棒から図3に示す円弧アーチ形に数値制御フライス盤で加工した試験片を、真空焼鈍炉を用いて焼鈍（410°Cにて2時間保持後、炉冷）し残留応力を除去し

た後、実験に用いた。図3(a)に示す試験片は幅20 mm厚さ8 mmの長方形断面を持つスパン200 mmライズ20 mmのアーチである。図3(b)は引張軸力を受け持つキーの接着面積を大きくするために端部を厚くした試験片であり、他の部分の寸法は(a)と同様である。

なお、数値計算により塑性ヒンジが形成されると予想される2箇所の断面にひずみゲージを貼付けた。また、面内変形の仮定の妥当性を確認するため、幅の中央に対し対称な2点D、Eにゲージを貼付けた。

図1 実験装置概要

図2 アーチ端支持装置

3. アーチ材料の応力-ひずみ特性

飛び座屈の過程において、アーチ内の要素は、単調に増大する引張りまたは圧縮塑性変形だけでなく、たわみの増大により塑性状態からの除荷、さらに逆方向（圧縮または引張）塑性変形を受けるので、この範囲内の応力-ひずみ特性を忠実に表すことができる下記の関係を用いた。なお、これらの材料特性はアーチ材料と同一の素材から製作し、同一の条件で焼鈍した円柱試験片の引張試験および圧縮後の引張試験によって得られたものである。

縦弾性係数 $E=75.5$ [GPa]

初期降伏応力 $\sigma_Y=86.0$ [MPa]

初期降伏ひずみ $\varepsilon_Y=1.14 \times 10^{-3}$

単調に増大する負荷に対して（単軸引張曲線）

$$\sigma = f(\varepsilon) = \begin{cases} 75500\varepsilon & (|\varepsilon| \leq \varepsilon_Y) \\ \pm 592(|\varepsilon| + 0.00179)^{0.331} & (\varepsilon_Y < |\varepsilon| \leq 0.0372) \cdots \cdots (1) \\ \pm 363(|\varepsilon| - 0.0167)^{0.150} & (0.0372 < |\varepsilon|) \end{cases}$$

応力 $\bar{\sigma}$ 、ひずみ $\bar{\varepsilon}$ の状態からの除荷に対して

$$\sigma = \bar{\sigma} - E(\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \quad (|\varepsilon - \bar{\varepsilon}| \leq |\varepsilon_Y^* - \bar{\varepsilon}|) \cdots \cdots (2)$$

逆負荷塑性の降伏ひずみ ε_Y^* 、降伏応力 σ_Y^* は以下のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_Y^* &= \bar{\varepsilon} - 2\text{sign}(\bar{\varepsilon})\{\sigma_Y + 0.3(|\bar{\sigma}| - \sigma_Y)\}/E \\ \sigma_Y^* &= \bar{\sigma} - 2\text{sign}(\bar{\varepsilon})\{\sigma_Y + 0.3(|\bar{\sigma}| - \sigma_Y)\} \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで、 $\text{sign}(\bar{\varepsilon})$ は $\bar{\varepsilon}$ の符号である。

逆負荷塑性に対して⁽⁷⁾

$$\sigma = -\text{sign}(\bar{\varepsilon})\{f(|\bar{\varepsilon}| + \varepsilon_Y^* - \varepsilon) - C\}g + \sigma_Y^* \cdots \cdots (4)$$

図3 試験片形状およびひずみゲージ貼付け位置

ここで、 C および g は次式で表される。

$$C = 26.68[1 - \exp(-24.0(|\bar{\varepsilon} - \varepsilon_Y|))]]$$

$$g = 1 - \exp\{-(18.0 + 0.02/|\bar{\varepsilon} - \varepsilon_Y|)\sqrt{|\varepsilon - \varepsilon_Y^*|}\}$$

なお、式(1)および(4)における係数の値は応力の単位[MPa]に対応する。

図4に、いくつかのひずみ履歴に対する実験結果と上記の近似式による当てはめの結果を示す。

4. 実験結果および考察

実験結果と比較する数値解析結果は、剛体棒とそれを結合する非線形ばねで構成される離散化モデルを用いて⁽⁴⁾得られたものである。計算では、図3(a)の試験片の全長を24要素（全長を20等分し荷重作用点前後の2要素をさらに1/2, 1/4, 1/4の長さに3分割）でモデル化し、ひずみはアーチの厚さ方向の22点において評価した。たわみ増分は荷重点の高さの1/80に設定し、荷重の変化の大きなところではさらに小さなたわみ増分を用いた。

4.1 荷重-たわみ曲線 集中荷重 P および水平反力 Q とアーチ中央のたわみ W_0 の関係を図5、図6に示す。試験片(a)(b)についての実験結果を各々丸印と三角印で、数値解を実線で、また逆負荷塑性を無視した数値解を破線で表す。図中の白四角印は数値解析による塑性変形の開始点を、黒四角印は逆負荷塑性の開始点を表す。

数値解の臨界点は、 $(W_0, P) = (1.9 \text{ mm}, 4.17 \text{ kN})$ であり、試験片(a)を用いた実験では $(2.7 \text{ mm}, 3.43 \text{ kN})$ 、(b)では $(3.0 \text{ mm}, 3.63 \text{ kN})$ である。

図5において、臨界点まで実験結果の荷重は数値解に比べて小さい。この傾向はアーチが完全に弾性的に変形する範囲（図5の原点から白四角印の間）におい

図4 近似応力-ひずみ関係

でもみられる。弾性変形に対する本解法の妥当性は確認されている⁽³⁾ので、この差は、アーチ端を支持する回転軸のたわみ、軸と試験片の結合部のわずかな変形等により、アーチ支点間の実効的距離が広がったことによる剛性の低下に起因すると考えられる。

試験片(a)の結果は、水平反力 Q (図6) が引張りになるたわみ W_0 が 35 mm 以降で、試験片(b)の結果および数値結果と大きく異なる。これは、この時点で引張反力を支持すべきキーがはがれたためである。 W_0 が 15 mm から 35 mm の範囲で試験片(a)と(b)の荷重-たわみ曲線は一致している。 $W_0 \geq 25$ mm では、一部を除いて本数値結果と実験結果は良好な一致を示している。

これに対し、破線で示した逆負荷塑性を無視し弾性除荷までを考慮した数値解は、たわみ $W_0 \geq 30$ mm で実験結果に比べ大きな荷重を示す。数値解によれば逆負荷塑性は図中の黒四角印の位置で出現しているが、荷重が低下する範囲ではその影響はほとんどみられない。

図5 荷重-たわみ曲線

図6 水平反力-たわみ曲線

い。水平反力が引張りとなるにつれて、逆負荷塑性を無視した解析では、剛性を過大評価する。

図6に示す水平反力 Q とアーチ中央のたわみ W_0 の関係では、図5と同様に、臨界点まで水平反力の実験結果は数値解に比べて小さい。しかし、図5に見られるような W_0 が 13 mm から 25 mm までの実験結果と数値解のずれはほとんどない。

4.2 アーチのたわみ形状 上述のように試験片(a)を用いた実験結果は、水平反力が引張りとなった以降無効であるので、試験片(b)で得られたアーチのたわみ形状を、数値解と比較して図7に示した。実験では、変位変換器を用いてアーチの中央部 100 mm の範囲についてたわみ形状を曲線として測定した。図中に示す最終形状は実験装置から取り外した後の形状であり、スプリングバックのため端部と支持点は一致しない。

アーチ中央のたわみ W_0 が 10 mm 程度までは実験結果と数値解はほぼ完全に一致しているが、それ以後、実験結果では荷重点近傍の曲げ変形が顕著である。この原因として実験に用いた試験片(b)では、アーチ端部の剛性が大きいため、変形が塑性ヒンジが形成されるアーチ中央部と中央から左へ 60 mm 程度の位置に集中したことが考えられる。この断面の応力分布については4.5節にて述べる。

4.3 ひずみとたわみの関係 図3に示した各位置のひずみとアーチ中央のたわみとの関係を、図8(a)、(b)に示す。試験片(a)、(b)とも、アーチ中央から 60 mm の位置における荷重点側の D と E 点のひずみの値はよく一致しており、この実験において試験片のねじれはなく、軸線を含む平面内の座屈変形が実現できたといえる。

試験片(a)の A と D、E 点ではゲージが途中ではがれたために、 W_0 が 10 mm 以上の範囲の測定ができなかったが、それ以下の範囲で A、B、D、E 点の値は解析結果とほぼ一致している。試験片(a)で W_0 が 30

図7 たわみ形状[試験片(b)]

mm 以上のとき、B 点のひずみが引張方向に変化しなかったのは、前記のように引張力を支持するためのキーが試験片からはがれたためである。試験片(a)の C 点を除く各点の実験結果と数値解が一致しているのに対し、試験片(b)では実験結果のひずみが数値結果に比べ大きい。これは、前述のように、試験片の端部が厚いため、ひずみゲージ貼付け位置での塑性ヒンジの形成が促進されたことによると考えられる。

試験片(a)(b)とも、C 点のひずみの絶対値は実験結果が数値解よりかなり小さい。この原因としては以下の理由が考えられる。① C 点が荷重点近くであるため、試験片表面が荷重受座により押し込まれることにより表面に引張りの応力が働く、②荷重点が空間的に拘束されていなければ、それはアーチの変形とともにアーチ中央に向かってわずかに変位することになるが、実験装置では荷重位置を正確に保つために荷重点の位置を固定したため、アーチと負荷装置との間に摩擦力が生じ引張力として作用する。

(a) 試験片

(b) 試験片

図 8 ひずみの変化

4.4 たわみと応力、軸力、曲げモーメントの関係

図 9 に、数値解で得られた、集中荷重作用点とアーチ中央から荷重作用点と逆向きに 60 mm 離れた (図 3

荷重作用断面

中央から荷重点の反対側 60 mm の断面

図 9 たわみと応力、軸力、曲げモーメントの関係

図 10 中央から荷重点の反対側 60 mm の断面の応力分布

のB点)断面における荷重作用側表面(以下外側表面と呼ぶ)とその裏側の表面(内側表面)の応力(σ_{out} , σ_{in}), 軸力(F/A)と曲げモーメント(M/Z)の変化をアーチ中央のたわみとともに示す。

荷重作用断面では内側表面の応力 σ_{in} は W_0 が11 mmから弾性除荷, その後弾性負荷となり, W_0 が22 mmで再降伏する。再降伏後の応力の変化がほとんど見られないのは, ひずみ自体の変化が小さいのに加え, 再降伏後の応力-ひずみ関係が初期塑性変形の関係の延長に従うために, 応力の変化がさらに小さくなる。また, 外側表面では軸力と曲げモーメントが加算されて大きな変化を示すのに対し, 内側表面では互いに相殺されほぼ一定の値を示す。これは, 図8(b)に示すA点のひずみの実験結果の傾向と一致する。

応力は W_0 が10 mm程度のところで極値をとるが, このたわみは集中荷重 P や水平反力 Q が極値をとるたわみより大きい。これは, この荷重作用断面に塑性ヒンジが形成され剛性が低下しているため, 他の部分の除荷によりこの部分の変形が進行し, 荷重 P , Q が低下した後も, しばらく応力の増加が続いたと考えられる。

アーチ中央から荷重点の反対側60 mmの位置の断面では, $W_0 > 23$ mmでは上に凸に曲げられるが, その後, 逆の曲げを受ける(図7)。これに伴い, この断面の表面の要素は弾性除荷された後, 逆負荷塑性変形を受けている。この状況は図8(b)のB, D, E点のひずみ履歴の実験結果に現れている。

4.5 応力分布 図10に, アーチ中央から荷重点の反対側60 mmの位置における断面内の応力分布を示す。縦軸はアーチの厚さ方向を表し, 上が荷重作用

表面(外側表面)である。

W_0 が10 mm程度のとき, 実質的な塑性ヒンジが形成され, 除荷の始まった W_0 が20 mmでは全域が弾性状態, 30 mmでは表面近くで逆負荷塑性が現れ, また40 mmではほとんど全域で逆負荷塑性状態となる。この応力分布の変化に伴うひずみの変化が, 前述のように図8(b)のB, D, E点の実験結果に現れている。

5. 結 言

アーチ中央からいくらか離れた点に集中荷重を受ける両端回転支持の円弧アーチについて, たわみ制御の面内非対称飛び移り座屈の実験を行い, 以下の事柄が明らかになった。

- (1) 離散化モデルによる数値解と実験結果はよい一致が見られた。
- (2) 逆負荷塑性を無視した解析では, 飛び移り座屈後の剛性を著しく高く評価する。
- (3) 非対称座屈では荷重点とその逆側の支持端近くの2箇所塑性ヒンジが形成される。

文 献

- (1) 川井・近藤, 生産研究, 28-9 (昭51), 409.
- (2) Ito, T. and Kawashima, K. (Yagawa, G. and Atluri, S. N. 編), *Computational Mechanics*'86, (1986). III-185, Springer-Verlag.
- (3) 伊藤・川嶋, 機論, 53-490, A (昭62), 1118.
- (4) 伊藤・川嶋, 日本機械学会講演概要集, No. 883-1 (昭63), 14.
- (5) 新家・頭井・波田, 土木論, No. 263 (昭52), 11.
- (6) 前田・藤本, 土木論, No. 174 (昭50), 25.
- (7) 川嶋・吉田, 機論, 50-451, A (昭59), 417.

討 論

〔質問〕 竹 園 茂 男〔豊橋技術科学大学〕

困難な飛び移り座屈の実験を種々工夫を凝らして行い, 数値解と比較検討されたことに敬意を表す。本試験片はスパンに比べ厚さの比較的大きいアーチのようであるが, 数値解と実験結果の比較において, 数値解で無視されているせん断変形の影響についてはいかがお考えか。

〔回答〕 せん断変形の大きさを簡単に評価するため, アーチを真直ばりで近似することにする。中央に集中荷重 P をうける長さ L の単純支持ばりのせん断変形による中央のたわみ δ_s は, 弾性解析により次式で与えられる。

$$\delta_s = kPL/4AG = kPL(1+\nu)/2AE \dots\dots\dots(i)$$

ここで, k : 中立面のせん断応力と平均せん断応力との比, A : 断面積, E : 縦弾性係数, G : 横弾性係数, ν : ポアソン比である。

次に, 簡単のため, 軸方向の塑性域の分布が一様である弾塑性ばりについて, 臨界荷重時 $P=3.43$ kNのせん断変形によるたわみを3種類の場合について評価した。塑性域のせん断応力を無視し, 弾性域の厚さのはりと考え, 厚さに占める弾性域の割合を λ で表すとす。式(i)において $A=\lambda A_0$ (A_0 : 試験片断面積), $k=1.5$ (長方形断面), $\nu=0.3$, $A_0=160$ mm², $L=200$ mm, $E=75$ GPaを用いる。せん断変形によるたわみ

δ_s , および臨界荷重時のたわみ $W_0=2.7$ mm に対する δ_s の比は次式で与えられる.

$$\delta_s=0.0557/\lambda \text{ mm} \dots\dots\dots (ii)$$

$$\delta_s/W_0=0.0206/\lambda \dots\dots\dots (iii)$$

(a) 断面全体が弾性域である場合, $\lambda=1$ として

$$\delta_s=0.06 \text{ mm}, \delta_s/W_0=2\% \dots\dots\dots (iv)$$

(b) 変形の大きな図 10 で示した断面の λ で代表させる場合, 図 10 の $W_0=1.9$ の曲線の縦軸 0.5 mm から 2 mm の間が弾性域であるので, $\lambda=0.2$ として

$$\delta_s=0.28 \text{ mm}, \delta_s/W_0=10\% \dots\dots\dots (v)$$

(c) 臨界荷重時の軸線にそった断面内の平均で λ を評価する場合, 本文中には示していないが離散化した各要素の λ を平均すると, $\lambda=0.62$ であるので

$$\delta_s=0.09 \text{ mm}, \delta_s/W_0=3\% \dots\dots\dots (vi)$$

である. 本実験条件では, せん断変形の影響は臨界荷重時に 3% となり, 以後荷重 P の減少, たわみ W_0 の増加に伴い減少する.