初期面外変形をもつ平板が引張り荷重を受けるときの非線形応力解析*

(許容初期変形量を検討するための大変形理論解析)

大谷 幸広*¹, 古口 日出男*², 矢田 敏夫*²

A Nonlinear Stress Analysis for Plates with Various Types of Initial Out-of-plane Distortion under a Tensile Load

(Large Deformation Analysis for Estimating Allowable Amount of the Distortion)

Yukihiro OHTANI, Hideo KOGUCHI, Toshio YADA

Some initial out-of-plane distortions, occurring as a result of the errors during working and assembling members or by the thermal deformations during welding, often exist in the members of various structures. A large strain concentration at the distortion regions is induced by an application of tensile load to such members. In spite of the importance for practice, the quantitative relation between the initial distortions and the strain concentration has scarcely been investigated so far. In the present paper, theoretical formulae for the strain concentration at the distortion regions, with various types of the initial out-of-plane distortions, are derived on the basis of the large deformation theory by infinitesimal strain. The theory is then compared with experimental strain concentration and shown to agree well with each other. The present formulae are very useful for estimating the amount of allowable distortions in various structures.

Key Words: Elasticity, Large Deformation Theory, Nonlinear Stress Analysis, Strain Concentration, Initial Out-of-plane Distortion

1. 緒言

一般に各種の構造物の部材には、部材の加工誤差、組立誤差あるいは溶接時の熱変形等によって、部材接合部等に初期面外変形（以下、単に初期変形と呼ぶ）を生じることがある。このような初期変形を有する部材に圧縮荷重が作用すると、部材が偏心荷重を受けるため、座屈強度が大きく低下することになる。このため、初期変形を有する部材に種々の荷重が作用する場合の座屈については、これまでに多くの研究が行われている^{(1),(2)}。また、初期変形を有する部材に引張荷重が作用する場合、その変形量が大きいと、変形部にかなり大きなひずみ集中が発生する。その結果、部材の疲労強度の低下や応力腐食割れ等を引き起こす原因となる^{(3),(4)}。このため、変形部に生ずるひずみ集中

は、構造物の強度および安全性を維持する上で重要な問題となる。

ところで、多くの実際の構造物では部材の板厚は長さや幅に比べて薄いため、部材に引張荷重が作用すると変形部の形状が荷重の増加と共に大きく変化する。このため、変形部のひずみ集中の検討には、このような変形部の大変形挙動を考慮した解析を行う必要がある。しかしこの点に着目し、初期変形（変形量、変形形状等）と変形部に生ずるひずみ集中の関係を定量的に扱った研究報告は非常に少ない⁽⁵⁾。

そこで本研究では、初期変形を有する平板に引張荷重が作用する場合について、変形部に生ずるひずみ集中に関する検討を行った。すなわち、変形部の微小変形を前提とする微小変形理論による線形解析によらずに、上述の変形部の大変形挙動を考慮した非線形解析によって、初期変形とひずみ集中の関係を示した。そして、種々の初期変形形状および端部境界条件に対する、変形部に生ずるひずみ集中を定量化する大変形理論式を導いた。さらに、この式から計算される理論値と実験値とを比較・検討し、提案した理論の妥当性を検証した。

* 昭和63年3月30日 第65期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和63年5月23日。

¹ 学生員、長岡技術科学大学大学院(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)。

² 正員、長岡技術科学大学工学部(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)。

(a) 変形部の大変形挙動

(b) 力の釣合い

図1 初期面外変形をもつ平板

2. 理論解析

2.1 微小変形理論による解析の問題点 例えば、突合せ溶接等によって生じた図1(a)に示されるような溶接線に対して対称の初期変形（最大初期変形量 w_0 ）を有する板厚 t で単位幅の平板が、その両端に引張り荷重を受ける場合を考える。

この時、変形部の中央（溶接線上）には、平均引張応力 σ_m の他に、荷重（ $=\sigma_m t$ ）とその偏心量 w_0 による曲げモーメント $M(=\sigma_m t w_0)$ が生じる。そしてこの M による曲げひずみ ϵ_b の大きさを、微小変形理論（荷重が増加しても平板の形状変化は微小であることを仮定としている）を用いて定式化すると次式のようなになる。

$$\epsilon_b = \frac{M}{D} y = 6(1-\nu^2) \frac{\sigma_m w_0}{E t} \quad (1)$$

ここで、

E : ヤング率, ν : ポアソン比

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{: 板の曲げ剛性}$$

y : 中立面からの距離

である。

しかし、式(1)から計算される値は、初期変形長さ l に対して板厚 t が小さい場合、荷重が増加するにしたがって実測値とは異なった値をとることがわかって

いる。これは、 σ_m の増加につれて変形部の形状が図中の破線で示されるように変化し、その結果変形量が次第に減少していくためである。すなわち、 σ_m の増加と共に荷重の偏心量が小さくなって、変形部に生ずるひずみに占める曲げひずみ ϵ_b の比率が式(1)よりは減少することになる。したがって、微小変形理論によって解析を行うと実際とは異なった結果となる。

すなわち、このような部材に関する解析を正確に行うためには、変形部のこのような大変形挙動を考慮し、変形後の力の釣合いに基づく非線形解析（微小ひずみ大変形解析）が必要である。

2.2 大変形理論式の誘導^{(5)~(7)} ここでは上述の考察に基づいて、図1(a)に示されるような初期変形が生じている平板について非線形解析を行い、変形部に生ずるひずみ集中量を求める大変形理論式を導く。

この平板の両端に引張り荷重が作用する時の変形部凹入面（A面）のひずみ量 ϵ_a および凸出面（B面）のひずみ量 ϵ_b は、一般に次式のように表すことができる。

$$\epsilon_a = \epsilon_m + \epsilon_b \quad (2.a)$$

$$\epsilon_b = \epsilon_m - \epsilon_b \quad (2.b)$$

ここで、

$$\epsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} \quad \text{: 平均ひずみ}$$

$$\epsilon_b \quad \text{: 曲げひずみ}$$

である。

次に図1(b)のように座標軸をとり、2.1節で述べた変形部の大変形挙動を考慮して、その微小要素に対する曲げモーメント M の釣合いから、次の基礎方程式が得られる。ただし、初期変形量 w_0 は初期変形長さ l に比べて小さいと仮定する。

$$\frac{dM}{dx} + N \frac{dy_m}{dx} = 0 \quad (3)$$

ここで、

$$N = \sigma_m t \quad \text{: } x \text{ 軸方向内力}$$

$$y_0(x) = w_0 \cdot \eta_0(x/l) \quad \text{: 初期変形形状}$$

$$y_m(x) = w_0 \cdot \eta_m(x/l) \quad \text{: } \sigma_m \text{ 作用時の変形形状}$$

である。

さらに、式(3)について

$$M = -D \frac{d^2[y_m(x) - y_0(x)]}{dx^2} \quad (4)$$

$$m^2 = \frac{N}{D} l^2 = 12(1-\nu^2) \frac{\sigma_m}{E} \left(\frac{l}{t}\right)^2 \quad (5)$$

$$\xi_m(\xi) = \frac{y_m(x) - y_0(x)}{w_0}, \quad \xi = \frac{x}{l} \quad (6)$$

とおくと、式(3)は次式のようなになる。

$$\frac{d^3 \xi_m}{d\xi^3} - m^2 \frac{d \xi_m}{d\xi} = m^2 \frac{d \eta_0}{d\xi} \quad (7)$$

式(7)の一般解は次式で与えられる。

表1 最大変形部の形状係数 κ と変形量 y_m

Type of Distortion	Shape of Distortion	End Condition	Shape Factor κ	Deflection $-y_m$
A		Fix	$\frac{1}{m} \cdot \tanh \frac{m}{2}$	$2 \frac{w_0}{m} \cdot \tanh \frac{m}{2}$
		Support	$\frac{1}{m} \cdot \tanh m$	$\frac{w_0}{m} \cdot \tanh m$
B		Fix	$\frac{2}{m^2} \frac{\sinh m - m}{\cosh m}$	$2 \frac{w_0}{m} \cdot \tanh \frac{m}{2}$
		Support	$\frac{2}{m^2} \frac{\cosh m - 1}{\cosh m}$	$2 \frac{w_0}{m^2} \frac{\cosh m - 1}{\cosh m}$
C		Fix	$\frac{2}{m^2} (\frac{m}{\tanh m} - 1)$	$2 \frac{w_0}{m} \cdot \tanh \frac{m}{2}$
		Support	$\frac{2}{m^2} (m \tanh m + \frac{1}{\cosh m} - 1)$	$2 \frac{w_0}{m^2} (m \tanh m + \frac{1}{\cosh m} - 1)$
D		Fix	$\frac{\sinh m \lambda_1 \cdot (\cosh m \lambda_2 - \lambda_1)}{m \lambda_1 \lambda_2 \cdot \cosh m}$	$\frac{w_0}{m} \frac{\sinh m \lambda_1 \cdot (\cosh m \lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2 \cdot \cosh m}$
		Support	$\frac{\sinh m \lambda_1 \cdot \sinh m \lambda_2}{m \lambda_1 \lambda_2 \cdot \sinh m}$	$\frac{w_0}{m} \frac{\sinh m \lambda_1 \cdot \sinh m \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 \cdot \sinh m}$

$$z_m(\xi) = C_1 e^{-m\xi} + C_2 e^{-m\xi} + C_3 + Y(\xi) \quad (8)$$

式(8)において、 C_1, C_2, C_3 は $\xi=0$ における境界条件 ($[dz_m/d\xi]=0$) および $\xi=\pm 1$ における境界条件 ($z_m=0$ と後に示す端部条件) によって、また $Y(\xi)$ は初期条件 $y_0(x)$ によってそれぞれ決定される式(7)の積分定数および特殊解である。

ところで、式(4)に示した曲げモーメントの式から変形部表面の曲げひずみ ϵ_0 を求めると、次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= -\frac{d^2[y_m(x) - y_0(x)]}{dx^2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 6(1-\nu^2) \frac{G_m w_0}{E t} \left[\frac{-1}{m^2} \frac{d^2 z_m(\xi)}{d\xi^2} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、

$$\kappa(\xi) = -\frac{1}{m^2} \frac{d^2 z_m(\xi)}{d\xi^2} \quad (10)$$

とおき、 $\kappa(\xi)$ を形状係数と呼ぶこととする。この形状係数 $\kappa(\xi)$ は、変形部のひずみ集中率を定義する係数で、初期変形形状、境界条件に関係する。なお、式(1)は式(10)において $\kappa(\xi)=1$ の場合に相当する。式(9)、(10)より、式(2)は次式のように書ける。

$$\epsilon_A = \epsilon_m \left(1 + 6(1-\nu^2) \frac{w_0}{t} \kappa(\xi)\right) \quad (11.a)$$

$$\epsilon_B = \epsilon_m \left(1 - 6(1-\nu^2) \frac{w_0}{t} \kappa(\xi)\right) \quad (11.b)$$

表1に、基本的な初期変形形状および端部境界条件 (Fix: 固定および Support: 単純支持) に対する、最大変形部における形状係数 κ と変形量 y_m の計算式を示す。なお、用いた端部境界条件は次式の通りである。

$$\text{Fix} : \frac{dz_m}{d\xi} = 0 \quad (\text{at } \xi = \pm 1)$$

$$\text{Support} : \frac{d^2 z_m}{d\xi^2} = 0 \quad (\text{at } \xi = \pm 1)$$

また、より複雑な変形形状に対するこれらの計算式も式(7)を解くことによって求められる。

図2 ひずみ集中率と荷重の関係

2・3 ひずみ集中率と荷重の関係 ここでは、変形部のひずみ集中に対する変形部の大変形挙動の影響について、理論式をもとに考察する。

2・2 節で導いた理論式を用い、変形部のひずみ集中率(形状係数) κ と荷重の無次元量 m (式(5))の関係を示すと図2のようになる。この図で、Type A, B, Cは表1に示した変形形状にそれぞれ対応している。

この図から、変形部の初期形状および端部境界条件の違いが、 κ に大きく影響を及ぼしていることがわかる。したがって、変形部のひずみ集中を評価する上で、これら二つの因子に対する十分な考慮が必要であると言える。

またこの図から、 m が増加するにしたがって逆に κ は減少しており、この傾向は変形部の初期形状および端部境界条件の違いにとくに関係していないことがわかる。すなわち、平板に作用する荷重が増すにつれ、変形部に生ずるひずみに占めるひずみ集中量の割合は逆に小さくなっていく。これに対し、微小変形理論では κ は常に一定値1をとるため、ひずみ集中量が荷重と共に直線的に増加し、過大評価となる。

ところで、 m が小さい時は端部境界条件(FixおよびSupport)の違いが κ に大きく影響しているが、 m の増加と共にその影響は小さくなり、 m が約5以上になると変形部の初期形状のみが κ に影響しているのが

わかる。これは、 m の増加と共に変形部の形状が次第にその変形量を減少する方向に変化するが、ある程度 m が増加すると変形部の変形量が零に近づいてしまうため、それ以上には形状変化(大変形挙動)があまり進まなくなるからである。すなわち、荷重が小さく変形部の形状変化が十分自由な段階では、変形の自由度を規定する端部境界条件の違いがひずみ集中に大きく影響を及ぼすが、荷重がある程度大きくなると可能な形状変化がわずかとなるため、その違いがひずみ集中に影響を及ぼさなくなる。

ただし、変形部のひずみ集中量は、式(11)からわかるように W_0/t の大きさに影響され、荷重の増加と共に増加する。

3. 実験結果および考察

ここでは、先に示した理論の妥当性を検証するため、実験との比較を行う。なお実験は、表1に示したType AとType Bの二形状の試験片についてそれぞれ行った。

3・1 Type A試験片による実験結果との比較 図3(a)に示すような初期形状(Type A, 表1参照)・寸法(板厚 $t=4.9$ mm, 最大初期変形量 $W_0=5.1$ mm, 初期変形長さ $l=227$ mm)の試験片をフライス加工により作成した。なお、試験片材料は溶接構造用圧延鋼材

図3 理論値と実験値の比較 (Type A試験片)

図4 理論値と実験値の比較 (Type B試験片)

SM41A である。この試験片を用い、両端固定の条件で引張試験（使用試験機：精密万能試験機 島津オートグラフ AG-10TA）を行った。また、変形部のひずみはストレインゲージを用いて測定した。

実験結果を図3(b)に示す。この図は、負荷平均応力 σ_m と変形部中央におけるひずみ量 ϵ_a （凹入表面）、 ϵ_b （凸出表面）および平均ひずみ ϵ_m の関係に対する理論値と実験値の比較である。同図中に、微小変形理論による計算値を参考までに破線で示した。

3・2 Type B試験片による実験結果との比較 また、図4(a)に示すような初期形状（Type B、表1参照）
・寸法（板厚 $t=4.9$ mm, 最大初期変形量 $W_0=3$ mm, 初期変形長さ $l=121$ mm）の試験片を用い、両端固定の条件で引張試験を行った。なお、試験片の材料その他は、Type A試験片の場合と同様である。実験結果を図3(b)と同様に、図4(b)に示す。

以上二つの実験結果と理論値の比較からわかるように、表1に示した大変形理論式による理論値が実験値とよく一致することが確認できる。これに対し、2・1節で指摘したように、微小変形理論による計算値は荷重が微小である時を除いて、実験値と異なった値を示し、変形部のひずみ集中を正しく評価できないことがわかる。

以上の考察から、提案した理論式を用いれば、構造物の設計・製作時に問題となる初期面外変形（変形量、変形形状等）の許容値を、過大評価することなく正確に決定することができる。

4. 結 論

各種の初期面外変形をもつ平板に引張荷重が作用する場合について、理論的考察を加えた。そして初期変形の初期形状と端部境界条件の差異が変形部のひずみ集中に及ぼす影響を明らかにするために、この平板に関する非線形解析を行った。また、実験によってその妥当性の確認を行った。この結果、次の事項が明らかになった。

- (1) 荷重が増加しても部材の形状変化が微小であることを仮定とする微小変形理論では、荷重の増加と共に形状が大きく変化する薄肉部材の応力-ひずみ関係を正しく評価できない。このため、多くの場合実測値とは異なった値を示し不十分な結果を与える。
- (2) そこで、初期変形をもつ平板に関して、荷重の増加による変形部の形状変化（大変形挙動）すなわち、変形後の力の釣合いを考慮した非線形解析を行い、変形部に生ずるひずみ集中量を計算する大変形理論式を導いた。

- (3) この理論式をもとに、変形部のひずみ集中と初期変形形状および端部境界条件との関係を検討した。この結果、これら二つの因子の差異が変形部に生ずるひずみ集中に大きな影響を及ぼすことがわかった。
- (4) 変形部のひずみ集中率は、荷重の増加と共にしだいに減少する。また m （式(5)）が約5以上になると、ひずみ集中率に対して端部境界条件はほとんど影響せず、初期変形形状のみが影響することがわかった。
- (5) 提案した理論式による計算値は実験値とよく一致することが確認された。したがって、この理論式は、各種構造部材の強度および安全性に対する初期変形量および変形形状の影響とその許容値を検討する上で有効に適用できるものと考えられる。

文 献

- (1) Y. Watanabe, J. Soc. of Naval Archi. Japan, 61(1937), 235.
- (2) B. Almroth, NASA, CR-432, (1966).
- (3) K. Iida, N. Iino, Trans. J. W. S., 8-2(1977), 7.
- (4) A. Brown, J. T. Harisson, R. W. Willeins, NACE. Houston (1977), 686.
- (5) T. Yada, J. Soc. of Naval Archi. Japan, 1(1966), 73.
- (6) S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, (1981), McGRAW-HILL.
- (7) 矢田, 古口, 大谷, 梅本, 機論に投稿中.