反復法による弾塑性有限要素法の一解法*

河 野 俊 一^{*1}, 上 西 研^{*1}
種 田 元 治^{*1}, 三 好 哲 彦^{*2}A New Iterative Method for the Elastic-Plastic Stress Analysis
by the Finite Element MethodShunichi KAWANO, Ken KAMINISHI,
Motoharu TANEDA, and Tetsuhiko MIYOSHI

This report proposes a new iterative method for the elastic-plastic stress analysis by the finite element method (FEM), of which scheme simultaneously satisfies the normality condition of plastic strain increments and two other conditions: the conditions that the stress point must move on the yield surface during plastic deformation and that the plastic strain increments relate to the hardening parameters. The combined hardening rule is used in this FEM program. In order to evaluate the accuracy and the computational time for the proposed new iterative method, we analyze an axisymmetric problem that is a round bar with a U groove loaded in the uni-axial direction. Good accuracy is obtained by using the incremental displacement (load) which produces the equivalent plastic strain increment within 0.01 in each step.

Key Words: Strength of Materials, FEM, Numerical Stress Analysis, Elastic-Plastic Problem, Combined Hardening Rule

1. 緒 言

弾塑性有限要素法は、塑性構成方程式の近似において次の2種類に大別できる。一つは応力-ひずみ曲線の接線係数から求められる接線剛性を用いる方法で、他の一つは塑性ひずみ増分と硬化パラメータ増分の両者に対する Normality Condition を満足させる方法である。前者に対しては r -min 法⁽¹⁾や初期応力法⁽²⁾などの先駆的研究があり、弾塑性クリープ、塑性座屈などの幅広い分野まで著しい成果を上げている⁽³⁾。また、後者に対しては、radial return 法⁽⁴⁾および三好の方法⁽⁵⁾などがあり、最近その計算精度および計算時間に関して研究が進められている⁽⁶⁾⁽⁷⁾。しかし、後者の方法は塑性構成方程式の差分の定式化の性格上繰返し計算が必要であるので、計算手順の選択、打ち切り誤差の判定などにまだ検討の余地があるように思われる。

既報⁽⁸⁾で著者らは、微小変形に基づく弾塑性解析に三好の理論を適用し、微小変形の範囲内であれば荷重増分を大きく取ることができ、また計算精度の向上および計算時間の短縮に関して極めて良好な結果が得ら

れることを報告した。

本研究では、既報の方法をさらに拡張し、三次元弾塑性および複合硬化則をも含めた有限要素法のアルゴリズムを提案するものである。計算例として、半円切欠をもつ丸棒の繰返し負荷による応力-ひずみループのシミュレーションを行い、計算精度および計算時間について検討を行った。なお、ひずみ増分に対しては、一般に提案されている update lagrange 流のひずみ増分を採用した。

2. 基礎式の導入

図1に示すように荷重増分 $\{\Delta F\}$ が与えられた場合の反復法による弾塑性有限要素法のアルゴリズムは次式で表される。(付録)

$$[K^{(n)}]\{\Delta U\}_{i+1} = [K^{(n)}]\{\Delta U\}_i + \{\Delta F + F^{(n)}\} \\ - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{(\Delta \sigma)_i + \{\sigma^{(n)}\}\} dV \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $[K]$ は全体剛性マトリックス、 $[B]$ はひずみ変換マトリックス、 $\{U\}$, $\{\sigma\}$ および $\{F\}$ は、それぞれ節点変位ベクトル、応力ベクトルおよび外力ベクトルであり、 Δ は増分を表す。また、添字 i は図1に示すように (n) ステップから $(n+1)$ ステップまでの計算の反復回数、 j は図6の計算手順のところで述べるよう

* 昭和63年10月18日 第66期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和63年3月30日。

*¹ 正員、山口大学工学部(〒755 宇部市常盤台 2557)。

*² 山口大学工学部。

に剛性マトリックスを作り替える回数である。

図2に示すような複合硬化則をもつ材料の構成式は、塑性ポテンシャル f として Mises の降伏条件式と同一の関数形を用いれば、次式で表される⁽⁹⁾。

$$(1) \text{ 弾性: } f(\sigma - \alpha) < H_{\text{tot}} \left(\int d\bar{\epsilon}^p \right) - H_k \left(\int d\bar{\epsilon}^p \right)$$

$$\{d\epsilon\} - [D^e]^{-1} \{d\sigma\} = 0$$

$$\{d\alpha\} = 0$$

$$(2) \text{ 塑性: } f(\sigma - \alpha) = H_{\text{tot}} \left(\int d\bar{\epsilon}^p \right) - H_k \left(\int d\bar{\epsilon}^p \right)$$

$$\text{および } \{\partial f / \partial \sigma\}^T \{d\sigma\} > 0$$

$$\{d\bar{\epsilon}^p\} = \{d\epsilon\} - [D^e]^{-1} \{d\sigma\}$$

$$= \frac{d\bar{\epsilon}^p}{f(\sigma - \alpha)} [S] \{\sigma - \alpha\} \dots \dots \dots (2)$$

$$f(\sigma - \alpha) = H_{\text{tot}} \left(\int d\bar{\epsilon}^p \right) - H_k \left(\int d\bar{\epsilon}^p \right) \dots \dots \dots (3)$$

$$\{d\alpha\} = \frac{d\bar{\epsilon}^p H_k}{f(\sigma - \alpha)} [T] \{\sigma - \alpha\} \dots \dots \dots (4)$$

$$H_k = dH_k / d\bar{\epsilon}^p, H_k: \text{移動硬化率}$$

$$d\bar{\epsilon}^p = [\{\{d\epsilon^p\}^T [\tilde{S}] \{d\bar{\epsilon}^p\}\}^{1/2}] \dots \dots \dots (5)$$

$$[S][\tilde{S}][S] = [S] \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 $\{\epsilon\}$ および $\{\epsilon^p\}$ はひずみおよび塑性ひずみベクトル、 $\{\alpha\}$ は塑性ポテンシャルの中心の移動量、 $\bar{\epsilon}^p$

は相当塑性ひずみ、 H_{tot} は単軸引張試験によって得られる応力、 $[D^e]$ は弾性応力-ひずみマトリックス、 d は増分を表す。また

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_0] & [0] \\ [0] & [S_1] \end{bmatrix} \quad [\tilde{S}] = \begin{bmatrix} [S_2] & [0] \\ [0] & [S_3] \end{bmatrix} \dots \dots (7)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_0] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix}$$

$$[S_0] = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ & 1 & -1/2 \\ \text{Sym.} & & 1 \end{bmatrix}, [S_1] = 3[1] \\ [S_2] = (2/3)[1] \\ [S_3] = (1/3)[1]$$

$$[T_0] = \begin{bmatrix} (a+2)/3 & (a-1)/3 & (a-1)/3 \\ & (a+2)/3 & (a-1)/3 \\ \text{Sym.} & & (a+2)/3 \end{bmatrix}$$

$a=1$: Ziegler 則, $a=0$: Prager 則

ここで、 $[1]$ は単位マトリックス、 $[0]$ は零マトリックスである。

式(2)~(5)を差分表示すると、次のようになる。

$$\{\Delta \bar{\epsilon}^p\} = \{\Delta \epsilon\} - [D^e]^{-1} \{\Delta \sigma\}$$

$$= \frac{\Delta \bar{\epsilon}^p}{f^{(n+1)}} [S] \{\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n+1)}\} \dots \dots \dots (8)$$

$$f^{(n+1)} = f(\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n+1)})$$

$$= H_{\text{tot}}^{(n+1)} - H_k^{(n+1)} \dots \dots \dots (9)$$

$$\{\Delta \alpha\} = \frac{\Delta H_k}{f^{(n+1)}} [T] \{\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n+1)}\} \dots \dots \dots (10)$$

$$\Delta \bar{\epsilon}^p = [\{\{\Delta \bar{\epsilon}^p\}^T [\tilde{S}] \{\Delta \bar{\epsilon}^p\}\}^{1/2}] \dots \dots \dots (11)$$

ここで、式を簡略化するために、図1に示すステージのサフィックス i は省略する。式(10)を変形して

$$\{\Delta \alpha\} = \frac{\Delta H_k}{f^{(n+1)}} [T] \{(\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n)}) - \{\Delta \alpha\}\}$$

式(7)に示す $[T]$ を用いて、上式を変形すると次のようになる。

$$\{\Delta \alpha\} = \frac{\Delta H_k}{f^{(n+1)} + \Delta H_k} [\bar{T}] \{\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n)}\} \dots \dots (12)$$

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} [T_1] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix}$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1+\beta & \beta & \beta \\ & 1+\beta & \beta \\ \text{Sym.} & & 1+\beta \end{bmatrix}$$

$$\beta = (a-1)f^{(n+1)} / (3f^{(n+1)} + a\Delta H_k)$$

$$\beta = 0, [T_1] = [T_0] = [1] \quad : \text{Ziegler 則}$$

$$\beta = -1/3, [T_1] = [T_0] = (2/3)[S_0] : \text{Prager 則}$$

式(12)を用いて式(8)の右辺の $\{\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n+1)}\}$ の項を変形すると

$$\{\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n+1)}\} = \{\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n)}\} - \{\Delta \alpha\}$$

$$= \left[[1] - \frac{\Delta H_k}{f^{(n+1)} + \Delta H_k} [\bar{T}] \right] \{\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n)}\}$$

図1 反復計算法

図2 λの定義

$[S][\bar{T}]=[S]$ となるので、上式を式(8)に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \{\Delta \varepsilon^p\} &= \{\Delta \varepsilon\} - [D^e]^{-1} \{\Delta \sigma\} \\ &= \frac{\Delta \bar{\varepsilon}^p}{f^{(n+1)} + \Delta H_k} [S] \{\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n)}\} \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで、次式で示すパラメータ λ を導入する。

$$\lambda = \Delta \bar{\varepsilon}^p / (f^{(n+1)} + \Delta H_k) \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)で示す λ は、図2に示すような傾きの逆数を意味する。この λ を用いて式(13)を書き直すと

$$\begin{aligned} \{\Delta \varepsilon^p\} &= \{\Delta \varepsilon\} - [D^e]^{-1} \{\Delta \sigma\} \\ &= \lambda [S] \{\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n)}\} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

上式より

$$\begin{aligned} \{\Delta \sigma\} &= [\bar{C}] \{ [D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\} \} \\ &\quad - \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\} \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$[\bar{C}] = [1] + \lambda [D^e] [S]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} [C_0] & [0] \\ [0] & [C_1] \end{bmatrix}$$

$$[C_0] = \frac{1}{1+3G\lambda} \begin{bmatrix} 1+G\lambda & G\lambda & G\lambda \\ & 1+G\lambda & G\lambda \\ \text{Sym.} & & 1+G\lambda \end{bmatrix}$$

$$[C_1] = (1/(1+3G\lambda)) [1]$$

ここで、 G は横弾性係数である。

式(16)を式(15)に代入して

$$\begin{aligned} \{\Delta \varepsilon^p\} &= \lambda [S] [\bar{C}] \{ [D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\} \} \\ \{A\} &= [D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\} \text{ と置き、上式を式(11)に} \\ &\text{代入して式(6)の関係を用いると、} [\bar{C}] \text{ および } [S] \text{ は} \\ &\text{対称マトリックスであるので} \\ \{\Delta \varepsilon^p\} &= \lambda^2 \{A\}^T [\bar{C}] [S] [\bar{C}] \{A\} \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここで

$$[\bar{C}] [S] [\bar{C}] = (1/(1+3G\lambda))^2 [S]$$

となるので、 $\Delta \bar{\varepsilon}^p$ が正の場合、式(17)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\varepsilon}^p &= \frac{\lambda}{1+3G\lambda} f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\}) \\ &\quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\}) = (\{A\}^T [S] \{A\})^{1/2}$$

式(14)と式(18)より

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= f(\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n+1)}) \\ &= \frac{1}{1+3G\lambda} f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\}) - \Delta H_k \\ &\quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$H_{\text{tot}}^{(n+1)} = \Delta H_{\text{tot}} + H_{\text{tot}}^{(n)}$, $H_k^{(n+1)} = \Delta H_k + H_k^{(n)}$ であるので、式(9)と式(19)より

$$\begin{aligned} \Delta H_{\text{tot}} + H_{\text{tot}}^{(n)} - H_k^{(n)} \\ &= \frac{1}{1+3G\lambda} f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\}) \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$\{\Delta \varepsilon\}$ は既知の場合、 $f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\})$ は一定

値をとるので、式(20)の右辺は λ に関して単調減少関数となる。したがって、降伏判定条件は次式によって与えられる。

$$H_{\text{tot}}^{(n)} - H_k^{(n)} \leq f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\}) \quad \dots\dots\dots (21)$$

また、 H_{tot} と H_k が $\bar{\varepsilon}^p$ の関数として与えられていれば、式(20)により λ が決定できる。以上の式をまとめると、弾塑性有限要素法の構成方程式は次のように表せる。

(1) 弾性：

$$f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\}) < H_{\text{tot}}^{(n)} - H_k^{(n)}$$

$$\{\Delta \varepsilon\} - [D^e]^{-1} \{\sigma\} = 0$$

$$\{\Delta \alpha\} = 0$$

(2) 塑性：

$$f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\}) \geq H_{\text{tot}}^{(n)} - H_k^{(n)}$$

$$\Delta H_{\text{tot}} + H_{\text{tot}}^{(n)} - H_k^{(n)}$$

$$= \frac{1}{1+3G\lambda} f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\})$$

$$= F(\lambda) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}^p = \frac{\lambda}{1+3G\lambda} f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\}) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta \sigma\} &= [\bar{C}] \{ [D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\} \} \\ &\quad - \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\} \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\{\Delta \alpha\} = \frac{\Delta H_k}{f^{(n+1)} + \Delta H_k} [\bar{T}] \{\sigma^{(n+1)} - \alpha^{(n)}\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

3. 計 算 方 法

($n+1$) ステップにおいて、降伏曲面上に応力が存在するための応力増分を求めるためには、2章の式(22)～(25)から明らかなように、各ステージにおける λ を求めればよい。本章ではその一例として、 H_{tot} および H_k と相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ の関係を、図3の破線および一点鎖線で示すように多直線近似した場合について述べる。

3.1 $\{\Delta \varepsilon\}$ が既知の場合 ひずみ増分 $\{\Delta \varepsilon\}$ が節点変位増分から一義的に求められる場合、 $f([D^e] \{\Delta \varepsilon\} + \{\sigma^{(n)} - \alpha^{(n)}\})$ は一定値となるので、式(22)の右辺 $F(\lambda)$ は図4の実線で示すように λ に関して単調減少関数となる。一方、相当塑性ひずみ増分 $\Delta \bar{\varepsilon}^p$ と λ の間には式(23)の関係があるので、式(22)の左辺 $\Delta H_{\text{tot}} + H_{\text{tot}}^{(n)} - H_k^{(n)}$ は図4の破線で示すように λ の関数として表される。式(22)が成立する、すなわち $\Delta H_{\text{tot}} + H_{\text{tot}}^{(n)} - H_k^{(n)}$ と $F(\lambda)$ が一致する区間を①とし、この区分における $H_{\text{tot}}^{(n+1)}$ を次式で表す。

$$H_{\text{tot}}^{(n+1)} = (H_{\text{tot}})_i \bar{\varepsilon}^{p(n+1)} + (H_{\text{tot}})_{oj}$$

$$= (H_{\text{tot}})_i \{\Delta \bar{\varepsilon}^p + \bar{\varepsilon}^{p(n)}\} + (H_{\text{tot}})_{oj}$$

上式を用いて式(22)と式(23)より λ を求めると、次の

のひずみ ϵ_x と n および計算時間と n の関係を図 10 に示す。ここで、 $\bar{\epsilon}_x$ および $\bar{T}_{CPU}$ は $n=20$ の計算結果および計算時間である。図 10 から明らかなように、 n が大きくなると $n=20$ の計算結果に対する ϵ_x の相対誤差は小さくなり、 $n=10$ でほぼ収束しているとみなすことができる。表 1 に 1 ステップに対応する相当塑性ひずみの増分 $\Delta\bar{\epsilon}^p$ を示す。図 10 および表 1 から $\Delta\bar{\epsilon}^p$ が 0.01 以内であれば十分精度の良い解が得られることが推定できる。なお、この誤差の原因は次のように考えられる。

真ひずみがひずみ増分の積分であるのに対して、有限要素法ではあくまでも有限量のひずみの和であるので、変位増分を大きく取ると必然的に誤差が生ずる。

図 5 $H_{tot}-\bar{\epsilon}^p$ および $H_k-\bar{\epsilon}^p$ 曲線の多直線近似

図 6 計算手順 (ΔW^p : 塑性仕事の増分)

ちなみに、単軸応力の場合を考えると、ステップ数 $n=1$ における誤差は、有限要素法によって得られたひずみを ϵ とすると次のようになる。

$$\text{誤差} = |\ln(1+\epsilon) - \epsilon| / \ln(1+\epsilon)$$

ステップ数 $n=1$ の計算結果を上式に代入して $n=20$ に対する相対誤差を推定すると約 4.4% となり、本計算の誤差はこれよりも大きな値 (約 6.6%) となった。このことから、本計算例のように要素の剛体回転が比較的小さい場合においても、多軸応力下では変位増分を小さくとる必要があることがわかる。しかし、図 10 に示す計算時間の比較に見られるように、誤差をある程度容認すれば大幅な計算時間の短縮が期待できる。例えば、5% 程度の誤差を認めるとステップ数 n は 2~3 ($\Delta\epsilon_x$ で約 4% 程度) で十分であり、計算時間は $n=20$ の約 1/5 になる。

図 11 に変位振幅 δ を一定とした場合の $P/\bar{P}$ と $\delta/\bar{\delta}$ の関係を示す。なお、 $\bar{P}$ は 1/4 サイクル (図 11 中①印) における荷重であり、また上述の図 10 の計算結果から切欠底における相当塑性ひずみ増分 $\Delta\bar{\epsilon}^p$ が 0.01 以内となるように $\Delta\epsilon$ を十分小さくとった。図 11 に示すように、 $P/\bar{P}$ は繰返し回数の増加とともに一定値に近付き、ヒステリシスループも一定形状に収束する傾

図 7 要素分割

向が見られた。また、式(12)に示す Ziegler 則と Prager 則による両計算結果は有効数字 5 けたの精度で一致した。

5. 結 言

本研究では、三次元弾塑性有限要素法の反復計算方法に対する新しいアルゴリズムを提案し、半円切欠を有する丸棒の単軸負荷の場合を例にとって計算精度および計算時間について検討を行った結果、次の結論を得た。

計算精度は変位増分の大きさに依存しており、精度の良い解を得るためには 1 ステップの変位増分をある程度小さくする必要がある。本計算例のように要素の剛体回転が比較的小さい場合には、相当塑性ひずみ増分が 1% 以内となる変位増分で、十分精度の良い解を得ることができた。逆に、誤差をある程度容認(例えば 5% 程度)すれば大幅な計算時間の短縮が期待できる。

なお、本研究の一部は昭和 61 年度文部省科学研究費・総合研究(A) (代表者 東京大学工学部教授 町田進) の補助により行われたものである。

付 録 反復法による有限要素法の定式化

微小変形の場合、反復法による弾塑性有限要素法の定式化は次式で表される⁽⁵⁾。

$$[K]\{\Delta U\}_{i+1} = [K]\{\Delta U\}_i + \{\Delta F\} - \sum \int [B]^T \{\Delta \sigma\}_i dV \dots \dots \dots (31)$$

ここで、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{\Delta U\}$ および $\{\Delta F\}$ は節点変位増分ベクトルおよび荷重増分ベクトル、 $\{\Delta \sigma\}$ は応力増分ベクトルであり、添字の i は反復回数である。

最終ステップにおける節点変位が要素寸法に比較して無視できない場合の定式化は以下のようにして導かれる。節点荷重 $\{F^{(n)} + \Delta F\}$ に対応する応力を $\{\sigma^{(n)} + \Delta \sigma\}$ とすると、仮想仕事の原理より

$$\sum \int [B^{(n+1)}]^T \{\Delta \sigma\} dV = - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{\sigma^{(n)}\} dV + \{F^{(n)} + \Delta F\} \quad (32)$$

ここで $[B^{(n+1)}]$ は $(n+1)$ ステップにおける節点座標を用いたマトリックスであり、これを次のように分解する。

$$[B^{(n+1)}] = [B^{(n)}] + [\Delta B] \dots \dots \dots (33)$$

式(33)を用いて式(32)を書き直すと

$$[K^{(n)}]\{\Delta U\} = - \sum \int [\Delta B]^T \{\Delta \sigma\} dV - \sum \int [B^{(n+1)}]^T \{\sigma^{(n)}\} dV + \{F^{(n)} + \Delta F\} \dots \dots (34)$$

表 1 ステップ数 n と最大相当塑性ひずみ増分の関係

NO. of step	1	2	5	10	20
Maximum plastic strain increment (%)	8.34	4.72	1.85	0.92	0.47

図 8 計算に用いた $H_{tot}-\bar{\epsilon}^p$ および $H_k-\bar{\epsilon}^p$ 曲線と機械的性質

図 9 荷重 P と荷重点変位 δ の関係

図 10 ひずみの収束性および計算時間とステップ数 n の関係

図 11 荷重-荷重点変位のヒステリシスループ

$$[K^{(n)}] = \sum [B^{(n)}]^T [D^p] [B^{(n)}] dV$$

式(34)の右辺を荷重増分とみなし、式(31)と同様な定式化の操作を行い、さらに式(33)を用いると

$$[K^{(n)}]\{\Delta U\}_{i+1} = [K^{(n)}]\{\Delta U\}_i + \{F^{(n)} + \Delta F\}$$

$$- \sum [B^{(n+1)}]^T \{\Delta \sigma + \sigma^{(n)}\} dV \dots \dots \dots (35)$$

となる。 $[B^{(n+1)}]$ は陽に求めることができないので、これに対しても反復計算が必要になる。すなわち

$$[K^{(n)}]\{\Delta U\}_{i+1} = [K^{(n)}]\{\Delta U\}_i + \{F^{(n)} + \Delta F\}$$

$$- \sum [B^{(n+1)}]^T \{\Delta \sigma + \sigma^{(n)}\} dV \dots \dots \dots (36)$$

文 献

- (1) Yamada, Y., ほか 2 名, *Int. J. Mech. Sci.*, 10 (1968), 343.
- (2) Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., (1977), 450, McGRAW-HILL.
- (3) 鷲津・ほか 4 名, 有限要素法ハンドブック, (昭 58), 173, 培風館.
- (4) Schreyer, H. L., *Trans. ASME*, 101 (1979), 226.
- (5) Miyoshi, T., *Jpn. J. Appl. Math.*, 3 (1986), 331.
- (6) Pillinger, I., ほか 3 名, *Int. J. Mech. Sci.*, 28 (1986), 23.
- (7) Simo, J. C. and Taylor, R. L., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 22 (1986), 649.
- (8) Miyoshi, T., ほか 3 名, *Proc. ICCM*, Tokyo, 1 (1986), IV 89.
- (9) 山田, 塑性・粘弾性, (昭 55), 75, 培風館.

討 論

〔質問〕 横内 康人

〔電気通信大学電気通信学部〕

次の二点について質問したい。

(1) 反復における収束条件として、塑性仕事増分の変動と最大相当塑性ひずみ増分の変動をおさえているが、変位増分の変動や残差力を検証することも多いと思う。結果は許容誤差の設定値に依存するので単純にどちらが良いとは言えないと思うが、もしそのような検討を行っておられるならばコメントをいただきたい。

(2) 式(1)の反復過程において、剛性マトリックスを作りかえたのちにその影響が及ぶのは $[B]$ マトリックスのみで、 $[K^{(n)}]$ のように更新していないのか。

〔回答〕 (1) 私事になるが本 FEM プログラムはき裂先端近傍の弾塑性応力解析を目的として作られたものであり、許容誤差の物理的解釈が容易な塑性仕事増分の変動量を収束条件として採用した。しかし、一般的には変位増分、塑性仕事増分のいずれの変動を収束条件として採用しても結果に差はないと思われる。

(2) 原理的には剛性マトリックス $[K^{(n)}]$ を更新する必要はなく、したがって本プログラムで採用したコレスキー分解は、各ステップごとで 1 回のみでよ

い。また、 $[K^{(n)}]$ を更新した場合 $-[K^{(n)}]_j = \int [B^{(n)}]^T [D^p] [B^{(n)}] dV$ —では再度コレスキー分解が必要であるが、収束が速くなるので計算時間に大差はない。しかし、 $[K^{(n)}]$ を更新したほうが若干計算精度が良くなるので、荷重増分量、解析対象等によっていづれかを選択すればよい。なお、本計算では剛性マトリックスは更新している。

〔質問〕 矢川 元基・吉村 忍

〔東京大学工学部〕

実際の弾塑性解析において、解の精度を荷重ないしは変位などのマクロな量の増分幅によってコントロールする場合には、解析対象の各点において誤差を評価し、それを荷重や変位の増分幅にフィードバックすることが重要と考えるが、貴手法においては、そのような誤差測度を考えておられるか。

〔回答〕 横内氏の質問(2)で回答したように、各ステップ内で剛性マトリックスを更新することによって収束精度の向上を計っているが、質問にあるような誤差測度は用いていない。しかし、原理的にはそのような誤差測度の導入は可能であると考えられるので、今後の課題としたい。