定時計数法による X 線応力測定における応力定数 および弾性定数の統計学的解析*

栗 田 政 則^{*1}

A Statistical Analysis of a Stress Constant and Elastic Constants in X-Ray Stress Measurements by the Fixed Time Method

Masanori KURITA

In X-ray stress measurement, to obtain accurate results, it is necessary to determine experimentally the X-ray stress constant. However, values measured by X-ray diffraction have variability arising from inherent X-ray counting statistics. Therefore, it is important to investigate the reproducibility of the measured values by using the standard deviation representing the size of the variability caused by counting statistics. The equations are derived analytically for calculating the standard deviations of the stress, X-ray stress constant, and elastic constants. These equations give the standard deviations from a single measurement. The variances in these values are expressed in terms of a linear combination of the variances in peak positions of the diffraction line. The standard deviations of these values decrease in a manner inversely proportional to the X-ray counts. The X-ray stress constant and the elastic constants, along with their standard deviations, were determined by the Gaussian curve method using a quenched and tempered steel.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Stress Measurement, Residual Stress, Elastic Constants, X-Ray Diffraction, Statistical Analysis, Standard Deviation, Steels

1. 緒 言

材料を機械加工したり熱処理したりする際に生ずる残留応力は、材料の強度に重要な影響を及ぼす。X 線回折による応力測定法は、多結晶から成る材料の局所の残留応力を非破壊的に測定できるという特長をもっている。最近、ファインセラミックスのような新素材が工業上広く使われるようになるにつれて、セラミックスの残留応力を X 線回折によって測定しようとする研究がいくつか行われている^{(1)~(4)}。

X 線応力測定法は、等方性弾性体に対する弾性力学の理論に基づいている⁽⁵⁾。この理論によれば、X 線による応力値は異なった方位をもつ回折面の回折線ピーク位置の差と応力定数との積に比例する。一般的に、結晶体は方位による弾性異方性を示すが、個々の結晶がランダムな方位をもつ多結晶体に対しては、巨視的にはこの弾性力学の理論が成り立つことは多くの実験事実が示すとおりである。しかし、X 線応力測定においては、ある相の特定な方位をもつ特定な回折面のみを選択的に測定するので、必ずしも等方性弾性体に対

するこの理論がそのまま適用できるとは限らない。そこで、X 線法によって応力値を精度よく測定するためには、まず応力定数を X 線の測定によって決定する必要がある^{(6)~(10)}。

ところで、X 線回折を利用したすべての測定値は回折 X 線強度（または計数値）から求まるが、これらの測定値は X 線強度固有の統計変動⁽¹¹⁾によってばらつく。この統計変動は X 線による測定値には避けられないので、X 線による測定値の信頼度を高めるためには、この X 線強度固有の統計変動によって生ずる測定値のばらつきの大きさを表す標準偏差を求めて、その測定値の再現性を検討することが重要である。特に、X 線によって試験片表面の応力分布を求めるときには、X 線照射面積を大きくとれず十分な回折 X 線強度が得られないために、測定される応力値や応力定数の標準偏差が大きくなる場合が多い。幸いにして、定時計数法による測定においては、回折線ピーク位置、応力値または回折線の広がりを表すガウス曲線パラメータ (GCP) などの測定値の標準偏差は、1 回の測定値から統計学の理論を用いて解析的に求め得る^{(12)~(18)}。しかも、すでに前報⁽¹⁴⁾で明らかにしたように、定時計数法による X 線応力測定においては、このように 1 回の測定値から解析的に求めた応力値の標準偏差は、

* 昭和 63 年 10 月 19 日 第 66 期全国大会講演会において講演。原稿受付 昭和 63 年 2 月 2 日。

*1 正員、長岡技術科学大学 (〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)。

実際に 65 回繰返し測定して得た応力値の標準偏差によく一致する。

本研究は、定時計数法を用いて、X 線的に測定した応力定数 K 、コンプライアンス s_1, s_2 および弾性定数 E, ν の信頼度を検討するために、X 線強度固有の統計変動によるこれらの値の標準偏差を 1 回の測定値から解析的に求める式を導いたものである。なお、これらの標準偏差を求める諸式は、すべて回折線ピーク位置の標準偏差から計算できるので、定時計数法を用いたすべての X 線応力測定法^{(12)~(15), (17)~(19)}に適用できる。

ところで、単一波長の X 線による回折線プロファイルは理論上ガウス関数で近似できる⁽²⁰⁾。ガウス曲線法による X 線応力測定法は、回折線ピークを近似したガウス関数の主軸を回折線ピーク位置とする方法である。この方法は他の方法に比べて応力値を迅速に再現性よく測定できるという特長をもち、実用上有効な方法であると考えられる⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁹⁾。そこで本研究では、ガウス曲線法によって焼入れ焼戻し鋼の X 線の諸定数を測定し、上記の式を用いてその標準偏差を求めて得られた諸定数の信頼度を検討した。

2. ガウス曲線法による回折線ピーク位置とその標準偏差

ガウス曲線法による回折線ピーク位置および X 線強度固有の統計変動⁽¹¹⁾に起因するピーク位置のばらつきを大きさを表す標準偏差の求め方については前報⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾で述べたので、ここではその結果のみについて述べる。

一般に、回折 X 線計数値を正確に求めるためには計数値の実測値からバックグラウンド (BG) 計数値を差し引いた値を LPA (ローレンツ・偏りおよび吸収) 因子⁽²¹⁾で補正する必要がある。しかし、マルテンサイト組織をもつ焼入れ鋼のように非常に幅広い回折線をもつ材料⁽¹³⁾⁽¹⁵⁾や、セラミックスなどのように多くの回折線が接近して現れて BG 強度が正確に求めることができない材料も多い。また、測定時間を短縮するという実用的見地からも BG 補正の省略が望まれる。そこで、本研究では BG 補正をした場合としない場合について応力値を求め、両者を比較検討した。

2.1 回折線ピーク位置⁽¹³⁾⁽¹⁹⁾ いま、一定の間隔 c (ステップ幅) で測定した X 線計数値の実測値 y (カウント) を BG 計数値および LPA 因子で、または LPA 因子のみで補正した値を z (カウント) で示し、回折角を x (deg) で表す。回折線ピーク付近の n 個の点 (x_i, z_i) に最小二乗法を用いて当てはめたガウス関数

の主軸の位置で定義される回折線ピーク位置 p (deg) は、次式で与えられる。

$$p = \frac{x_1 + x_n}{2} - d \frac{\sum t_i w_i}{\sum T_i w_i} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $\sum$ は $i=1$ から n までの和をとることを表し、

$$d = 0.4c(n^2 - 4)$$

$$t_i = i - (n+1)/2$$

$$T_i = 12t_i^2 - n^2 + 1$$

$$w_i = \ln z_i \quad (\ln \text{ は自然対数を表す})$$

である。X 線計数値 y の補正值 z は、 y を LPA 因子のみで補正した場合には、 l を LPA 因子の逆数とすると

$$z_i = l y_i \quad \dots\dots\dots (2)$$

また、 y を BG 計数値 y_b (カウント) および LPA 因子で補正した場合には

$$z_i = l_i (y_i - y_{bi}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。なお、BG 計数値 y_b は簡単のために回折線の両端の二点 $(x_0, y_0), (x_{n+1}, y_{n+1})$ を結んだ直線で表されるものとする

$$y_{bi} = E_i y_0 + F_i y_{n+1}$$

となる。ただし、

$$E_i = (x_{n+1} - x_i) / (x_{n+1} - x_0)$$

$$F_i = (x_i - x_0) / (x_{n+1} - x_0)$$

である。

2.2 回折線ピーク位置の標準偏差⁽¹³⁾ X 線強度固有の統計変動によるピーク位置 p の標準偏差 σ_p は、式(1)に付録に示した式(50)を用いると、X 線計数値を LPA 因子のみで補正した場合には次式で与えられる。

$$\sigma_p = d \sqrt{\sum G_i^2 / y_i} / (\sum T_i \ln z_i)^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$G_i = t_i \sum T_i \ln z_i - T_i \sum t_i \ln z_i$$

で、 z は式(2)で与えられる。

また、X 線計数値 y を BG および LPA 因子で補正した場合には、 σ_p は同様に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_p = d \{ & (\sum E_i H_i / v_i)^2 y_0 + \sum H_i^2 y_i / v_i^2 \\ & + (\sum F_i H_i / v_i)^2 y_{n+1} \}^{1/2} / (\sum T_i \ln z_i)^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

$$v_i = y_i - y_{bi}$$

$$H_i = t_i \sum T_i \ln z_i - T_i \sum t_i \ln z_i$$

で、 z は式(3)で与えられる。式(4)または(5)を用いれば、ピーク位置の標準偏差を 1 回の測定で求めることができる。

3. コンプライアンスと応力定数

等方性弾性体に対する弾性学の理論によれば、試料に x 方向の単軸応力 τ を加えたときに、試料面法線と ψ の角度をなす方向の試料表面層内の格子面に生ずるひずみ ε は

$$\varepsilon = \frac{s_2}{2}(\tau + \sigma_x) \sin^2 \psi + s_1(\tau + \sigma_x + \sigma_y) \quad \cdots \cdots (6)$$

となる⁽⁵⁾⁽⁶⁾。ただし、 s_1 と s_2 はコンプライアンスと呼ばれる定数で

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= 2(\nu+1)/E \\ s_1 &= -\nu/E \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (7)$$

E と ν は、それぞれ縦弾性係数およびポアソン比である。また、 σ_x と σ_y はそれぞれ互いに直交する x, y 方向の残留応力である。

式(6)のひずみ ε を、ブラッグの式を用いて回折線の回折角度位置すなわち回折線ピーク位置 $p(\text{deg})$ に置き換えると

$$\begin{aligned} p &= -\beta s_2(\tau + \sigma_x) \sin^2 \psi \\ &\quad - 2\beta s_1(\tau + \sigma_x + \sigma_y) + 2\theta_0 \quad \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

となる。ただし、 θ_0 は無応力状態のブラッグ角で

$$\beta = 180 \tan \theta_0 / \pi \quad \cdots \cdots (9)$$

である。式(8)は、ピーク位置 p と $\sin^2 \psi$ との関係を示す $\sin^2 \psi$ 線図は直線となることを示している。この直線のこう配を M とすれば、式(8)から

$$M = -\beta s_2(\tau + \sigma_x) = (\tau + \sigma_x)/K \quad \cdots \cdots (10)$$

となる。ただし、 K は応力定数で次式で与えられる。

$$K = -\frac{1}{\beta s_2} = -\frac{\pi}{180} \frac{E \cot \theta_0}{2(\nu+1)} \quad \cdots \cdots (11)$$

式(10)は、試験片に種々の単軸応力 τ を加えたときの $\sin^2 \psi$ 線図のこう配 M を応力 τ に対してプロットすれば、この関係は直線となることを示している。この直線のこう配を B とすれば、式(10)から

$$B = -\beta s_2 = 1/K \quad \cdots \cdots (12)$$

となる。また、このときの $\sin^2 \psi$ 線図の切片を N とすれば、式(8)から

$$N = -2\beta s_1(\tau + \sigma_x + \sigma_y) + 2\theta_0 \quad \cdots \cdots (13)$$

となる。したがって、 $\sin^2 \psi$ 線図の切片 N は単軸応力 τ に対して直線となる。この直線のこう配を C とすれば、式(13)から

$$C = -2\beta s_1 \quad \cdots \cdots (14)$$

となる。

4. X 線の応力定数、コンプライアンス および弾性定数の標準偏差

X 線的に測定される応力定数、応力、コンプライア

ンスおよび弾性定数はすべて回折線ピーク位置から計算される。したがって、これらの値は X 線強度固有の統計変動に起因するピーク位置の変動によってばらつく。ここでは、このばらつきの大きさを表す標準偏差の求め方について述べる。なお、一般的に測定値のばらつきの大きさは標準偏差で表されるが、標準偏差は分散の平方根であるので、式の重複を避けるために、以下の諸式では標準偏差の代わりに分散を求める式のみを示す。

4.1 $\sin^2 \psi$ 線図のこう配、切片および応力値の標準偏差 今後、X 線で測定される応力値を、標準偏差を表す記号 σ および単軸応力を表す τ と区別するために、 S で表す。

いま

$$u_i = \sin^2 \psi_i$$

とおき、 $\sin^2 \psi$ 線図上の k 個の点 (u_i, p_i) に最小二乗法を用いて当てはめた直線のこう配 M 、応力値 S および切片 N を求めるものとすれば

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sum' (ku_i - \sum' u_i p_i)}{k \sum' u_i^2 - (\sum' u_i)^2} \\ &= \sum' a_i p_i \quad \cdots \cdots (15) \end{aligned}$$

ただし、 $\sum'$ は $i=1$ から k までの和をとることを表すものとし

$$a_i = \frac{ku_i - \sum' u_i}{k \sum' u_i^2 - (\sum' u_i)^2} \quad \cdots \cdots (16)$$

である。応力値 S は、式(10)と式(15)から

$$S = KM = K \sum' a_i p_i \quad \cdots \cdots (17)$$

となる。

$\sin^2 \psi$ 線図のこう配 M および応力値 S のばらつきの大きさを表す標準偏差 σ_M と σ_S は、各 $p_i (i=1 \sim k)$ は統計学的に互いに独立であるので、式(15)と(17)に付録に示した式(50)を用いれば

$$\sigma_M^2 = \sum' a_i^2 \sigma_{p_i}^2 \quad \cdots \cdots (18)$$

$$\sigma_S^2 = K^2 \sum' a_i^2 \sigma_{p_i}^2 \quad \cdots \cdots (19)$$

となる。式(18)と(19)におけるピーク位置 p_i の分散 $\sigma_{p_i}^2$ は、式(4)または式(5)から求まる。 M と S の標準偏差は、それぞれ式(18)と(19)によって1回の測定値から計算できる⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。なお、後に4.2節で述べるように、応力定数 K を X 線の測定によって決定するときには、 K 値にも統計的変動を伴う。しかし、ひとたび K 値を実験的に決定してしまえば X 線応力測定ではこの値を定数として使うので、式(19)も K を定数として導いた。なお、式(15)～(19)は単軸応力 τ を加えた場合に限らず、一般的に成り立つ。

次に $\sin^2 \psi$ 線図の切片 N の分散 σ_N^2 を求める。まず切片 N は

$$N = \bar{p} - M\bar{u} \quad (20)$$

ただし, $\bar{p}$ と $\bar{u}$ は $\sin^2 \psi$ 線図上の k 個のピーク位置 p と u の平均値で

$$\bar{p} = \sum' p_i/k, \quad \bar{u} = \sum' u_i/k \quad (21)$$

式(20)に式(15), (21)を代入して

$$\begin{aligned} N &= [\sum' p_i - (\sum' a_i p_i) \sum' u_i]/k \\ &= \sum' (1 - a_i \sum' u_i) p_i/k \\ &= \sum' c_i p_i \end{aligned} \quad (22)$$

ただし

$$c_i = (1 - a_i \sum' u_i)/k \quad (23)$$

である。式(22)に式(50)を使うと

$$\sigma_N^2 = \sum' c_i^2 \sigma_{p_i}^2 \quad (24)$$

となる。

4.2 X 線コンプライアンスおよび応力定数の標準偏差 いま, 種々の単軸応力 τ_i を加えたときの $\sin^2 \psi$ 線図のこう配を M_i とすれば, m 個の点 (τ_i, M_i) に最小二乗法を用いて当てはめた直線のこう配 B は

$$B = \sum'' b_i M_i \quad (25)$$

となる。ただし, $\sum''$ は $i=1$ から m までの和をとることを表し, b_i は式(16)と同様にして

$$b_i = \frac{m\tau_i - \sum'' \tau_i}{m\sum'' \tau_i^2 - (\sum'' \tau_i)^2} \quad (26)$$

となる。

式(25)に式(15)を代入すれば

$$B = \sum'' \sum' b_i a_j p_{ij} \quad (27)$$

となる。ただし, 式(27)において $\sum''$ は $i=1$ から m までの和を, また $\sum'$ は $j=1$ から k までの和をとることを表し, p_{ij} は τ_i の単軸応力を加えたときの $\sin^2 \psi$ 線図上の j 番めのピーク位置を表すものとする。コンプライアンス s_2 は, 式(12)に式(25)を代入すれば

$$s_2 = -B/\beta = -\sum'' b_i M_i/\beta \quad (28)$$

また, 式(12)に式(27)を代入すれば

$$s_2 = -\sum'' \sum' b_i a_j p_{ij}/\beta \quad (29)$$

となる。

B の分散 σ_B^2 は, 式(25)に式(50)を使えば

$$\sigma_B^2 = \sum'' b_i^2 \sigma_{M_i}^2 \quad (30)$$

また, 式(27)に式(50)を使えば

$$\sigma_B^2 = \sum'' \sum' b_i^2 a_j^2 \sigma_{p_{ij}}^2 \quad (31)$$

となる。式(31)は, 式(30)に式(18)を代入しても得られる。

コンプライアンス s_2 の分散 $\sigma_{s_2}^2$ は, 式(28)に式(50)を使えば

$$\sigma_{s_2}^2 = \sum'' b_i^2 \sigma_{M_i}^2 / \beta^2 \quad (32)$$

また, 式(29)に式(50)を使えば

$$\sigma_{s_2}^2 = \sum'' \sum' b_i^2 a_j^2 \sigma_{p_{ij}}^2 / \beta^2 \quad (33)$$

となる。式(33)は, 式(32)に式(18)を代入しても得ら

れる。

応力定数 K は, 式(12)に式(25)を代入すると

$$K = \frac{1}{B} = \frac{1}{\sum'' b_i M_i} \quad (34)$$

また, 式(12)に式(27)を代入すると

$$K = \frac{1}{\sum'' \sum' b_i a_j p_{ij}} \quad (35)$$

となる。 K の分散 σ_K^2 は, 式(34)に式(50)を使うと

$$\sigma_K^2 = \frac{\sum'' b_i^2 \sigma_{M_i}^2}{(\sum'' b_i M_i)^4} = K^4 \sum'' b_i^2 \sigma_{M_i}^2 \quad (36)$$

または, 式(35)と式(50)から

$$\sigma_K^2 = K^4 \sum'' \sum' b_i^2 a_j^2 \sigma_{p_{ij}}^2 \quad (37)$$

となる。

次に, コンプライアンス s_1 の分散 $\sigma_{s_1}^2$ を式(14)から求める。いま, 種々の単軸応力 τ_i を与えたときの $\sin^2 \psi$ 線図の切片を N_i とすれば, m 個の点 (τ_i, N_i) に最小二乗法を用いて当てはめた直線のこう配 C は

$$C = \sum'' b_i N_i \quad (38)$$

となる。式(38)に式(22)を代入すると

$$C = \sum'' \sum' b_i c_j p_{ij} \quad (39)$$

となる。式(14)に式(38)を代入すると

$$s_1 = -\frac{C}{2\beta} = -\frac{\sum'' b_i N_i}{2\beta} \quad (40)$$

また, 式(14)に式(39)を代入すると

$$s_1 = -\frac{\sum'' \sum' b_i c_j p_{ij}}{2\beta} \quad (41)$$

となる。

s_1 の分散 $\sigma_{s_1}^2$ は, 式(40)に式(50)を使えば

$$\sigma_{s_1}^2 = \frac{\sum'' b_i^2 \sigma_{N_i}^2}{4\beta^2} \quad (42)$$

また, 式(41)に式(50)を使えば

$$\sigma_{s_1}^2 = \frac{\sum'' \sum' b_i^2 c_j^2 \sigma_{p_{ij}}^2}{4\beta^2} \quad (43)$$

となる。

4.3 X 線の弾性定数 E と ν の標準偏差 式(7)の関係を使えば, X 線的に測定したコンプライアンス s_1 と s_2 から縦弾性係数 E とポアソン比 ν が求まるので, 次にこの E と ν の分散 σ_E^2 と σ_ν^2 の求め方について述べる。式(7), (28)および(40)から

$$E = -\frac{\beta}{\sum'' b_i (M_i + N_i)} \quad (44)$$

$$\nu = -\frac{\sum'' b_i N_i}{\sum'' b_i (M_i + N_i)} \quad (45)$$

式(44)と(45)に式(15)と(22)を代入すると

$$E = -\frac{2\beta}{\sum'' \sum' B_{ij} p_{ij}} \quad (46)$$

$$\nu = -\frac{\sum'' \sum' A_{ij} p_{ij}}{\sum'' \sum' B_{ij} p_{ij}} \quad (47)$$

ただし

$$A_{ij} = b_i c_j$$

$$B_{ij} = b_i (a_j + c_j)$$

である。式(46)と(47)に式(50)を使えば E と ν の分散 σ_E^2, σ_ν^2 が次のように求まる。

$$\sigma_E^2 = \frac{4\beta^2}{(\sum'' \sum' B_{ij} p_{ij})^4} \sum'' \sum' B_{ij}^2 \sigma_{p_{ij}}^2 \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$\sigma_\nu^2 = \frac{\sum'' \sum' [A_{ij} \sum'' \sum' B_{ij} p_{ij} - B_{ij} \sum'' \sum' A_{ij} p_{ij}]^2 \sigma_{p_{ij}}^2}{(\sum'' \sum' B_{ij} p_{ij})^4} \quad \dots\dots\dots (49)$$

式(19), (33), (37), (43), (48)および(49)からわかるように, X 線的に測定される応力値 S , コンプライアンス s_2, s_1 , 応力定数 K , および弾性定数 E, ν の分散はすべて回折線ピーク位置の分散の一次結合として表される。前報⁽¹³⁾で述べたように, ピーク位置の標準偏差 σ_p は X 線計数値 y (カウント) の平方根に逆比例して小さくなる。したがって, 応力値, コンプライアンス, 応力定数および弾性定数も X 線計数値 y の平方根に逆比例して小さくなる。X 線計数値は, X 線強度 (cps) とプリセットタイム (s) との積であるので, 応力値や上記の諸定数の標準偏差は, X 線強度およびプリセットタイムの平方根に逆比例して小さくなる。この結論は, X 線強度が高くなるほど, またプリセットタイムを大きくするほど X 線による測定値のばらつきが小さくなるという経験的によく知られている実験事実を, 数学的に説明している。

5. 実験方法

一般構造用炭素鋼 S 45 C を 860°C で焼入れ後 400°C 焼戻した試験片を用いて, コンプライアンス, 応力定数, 応力および弾性定数を X 線的に測定し, 4 章に記した諸式を使ってこれらの値の標準偏差を計算し, 測定値の信頼度を検討した。図 1 には試験片形状を示した。試験片表面は熱処理後, 約 100 μm 電解研磨で除去した。この試験片を引張負荷装置に取りつけて種々の単軸引張応力を加えた後, 試験片中央部の軸方向の応力値を著者らが開発した自動 X 線応力測定装置⁽²⁴⁾を用いて並傾法で測定した。回折線ピーク位置は, ψ 一定法を用いたガウス曲線法で決定した。ピーク位置決定に用いた X 線計数値の点の数 n は 8~10, ステップ幅 c は 0.2° である。試験片に加えた荷重は, 試験片に貼布したゲージ長 5 mm のひずみゲージで測定した。表 1 に X 線応力測定条件を示す。なお, この試験片の半価幅は 2.8° であった。

6. 実験結果

表 2 は, 種々の引張応力を負荷した試験片の応力をガウス曲線法によって測定し, バックグラウンド (BG) 補正が応力値 S とその標準偏差 σ_s に及ぼす影響を調べた結果である。応力値は, 後に述べる X 線的に測定した応力定数 $K = -314 \text{ MPa/deg}$ を用いて計算した。負荷応力と X 線で測定した応力とが一致していないのは, この試験片は熱処理による 32~33 MPa の残留応力をもっているためである。表 2 は, BG 補正を省略した場合の応力値 S とその 95 % 信頼限界 $S \pm 1.96\sigma_s$ は BG 補正をした場合の値にほぼ一致しており, ガウス曲線法においては BG 補正は応力値に影響しないので省略できることを示している。したがって, 以下に示す実験結果は BG 補正を省いて求めた結果のみを示す。

図 2 は, 種々の引張応力を加えた試験片の $\sin^2 \psi$ 線図である。この図には, 式(4)から計算したピーク位置 p の標準偏差 σ_p から, p の 95 % 信頼区間 $\pm 1.96\sigma_p$ を求め, その最大値と最小値を図示した。各負荷応力に対する $\sin^2 \psi$ 線図は, 信頼区間が示すばらつきの範囲内でかなりよい直線性を示している。

図 3 は, 式(15)から計算した図 2 の $\sin^2 \psi$ 線図のこの配 M を, 負荷応力に対してプロットした結果である。この図には, 式(18)から計算した M の標準偏差 σ_M から M の 95 % 信頼区間 $\pm 1.96\sigma_M$ を求めて記入した。各点は式(10)が示すとおり, 信頼区間が示すばらつきの範囲内で良好な直線性を示している。

図 4 は, 式(22)から計算した図 2 の $\sin^2 \psi$ 線図の切

表 1 X 線応力測定条件

Characteristic X-rays	Chromium K α
Diffraction plane	(211) plane of ferritic iron
Filter	Vanadium foil
Divergence angle of slit	1°
Tube voltage	30 kV
Tube current	9 mA
Irradiated area	5 x 11 mm ²
Preset time	1 s

図 1 試験片

片 N を、各負荷応力に対して示した結果である。この図にも、図 2, 3 の場合と同様に、式(24)から計算した N の標準偏差 σ_N から N の 95 % 信頼区間を求め記入してある。図 4 も、式(13)が示すとおり、各点はよく直線になっている。

表 3 には、図 2~4 の結果から X 線的に測定したコンプライアンス $s_1, s_2/2$ 、応力定数 K および弾性定数 E, ν とこれらの値の 95 % 信頼限界を示した。表 2 に示した応力値の 95 % 信頼区間 $\pm 1.96\sigma_s$ からわかるように、応力値の標準偏差 σ_s は約 10 MPa であるのに対して、応力定数 K の相対誤差 (σ_K/K) は約 4 % でかなり大きい値をとることがわかる。4・3 節で述べたように、応力定数の標準偏差 σ_K は X 線計数値 (カウント) の平方根に逆比例して小さくなる。したがって、例えば K の相対誤差を上記の半分にするためには、プリセットタイムを 4 倍すなわち 4 s に選べばよい。

7. 結 論

定時計数法による X 線応力測定における X 線強度

表 2 ガウス曲線法による X 線応力測定法におけるバックグラウンド補正が応力値に及ぼす影響

Applied stress τ (MPa)	95% confidence limits of stress $S \pm 1.96\sigma_S$ (MPa)	
	Not corrected for background	Corrected for background
0	33 ± 18	32 ± 18
30	80 ± 17	78 ± 18
84	130 ± 16	139 ± 19
143	194 ± 17	192 ± 17
199	242 ± 16	237 ± 18
255	293 ± 18	291 ± 18

図 2 種々の負荷応力 τ に対する $\sin^2 \psi$ 線図

固有の統計変動によって生ずる X 線の応力定数、コンプライアンスおよび弾性定数のばらつきの大きさを表す標準偏差を、1 回の測定値から解析的に求める式を導いた。また、焼入れ焼戻し鋼の試験片を用いてこれらの諸定数をガウス曲線法によって測定し、その標準偏差を上記の式から求めて諸定数の信頼度を検討した。得られた主な結論は、次のとおりである。

(1) コンプライアンス s_1 および s_2 の標準偏差は、それぞれ式(43)および式(33)から計算できる。

(2) 応力定数 K の標準偏差は、式(37)から計算できる。

(3) 弾性定数 E および ν の標準偏差は、それぞれ式(48)および(49)から計算できる。

(4) 応力値および上記の諸定数の標準偏差は、X 線計数値 (カウント) の平方根に、したがって X 線強度 (cps) およびプリセットタイム (s) の平方根に逆比例して小さくなる。

(5) ガウス曲線法による X 線応力測定においては、バックグラウンド補正は応力値とその標準偏差にほとんど影響しないので省略できる。

(6) 本研究で得られた X 線の応力定数、縦弾性係数およびポアソン比の 95 % 信頼限界は、それぞれ $K = -314 \pm 25$ MPa/deg, $E = 216 \pm 16$ GPa, $\nu = 0.27 \pm 0.035$ であった。

付 録⁽²²⁾⁽²³⁾

統計学的に互いに独立な n 個の確率変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の関数

図 3 負荷応力 τ に対する $\sin^2 \psi$ 線図のこう配 M とその 95 % 信頼区間の変化

図 4 負荷応力 τ に対する $\sin^2\psi$ 線図の切片 N とその 95% 信頼限界の変化

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

の分散 σ_y^2 は次式で与えられる。

$$\sigma_y^2 = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (50)$$

ただし、 $\sum$ は $i=1$ から n までの和をとることを表し、 $\sigma_{x_i}^2$ は x_i の分散である。なお、確率変数 (random variable) とはばらつきをもつ変数で、本論文の場合には X 線による測定値がこれに相当する。

文 献

- (1) 田中・ほか 3 名, 材料, 36-407 (昭 62), 792.
- (2) 田中・ほか 3 名, 文献(1)の 817 ページ.
- (3) 岸本・ほか 3 名, 文献(1)の 810 ページ.
- (4) 栗田・ほか 4 名, 機論, 54-500, A (昭 63), 854.
- (5) Hilley, M. P. 編, *Residual Stress Measurement by X-Ray Diffraction*-SAE J784a, (1980), 12~16, SAE.
- (6) Macherauch, E., *Exp. Mech.*, 6 (1966), 140.

表 3 X 線の弾性定数と応力定数の 95% 信頼限界

		95% confidence limits
Compliances	$(1+\nu)/E \text{ (10}^4\text{GPa)}^{-1}$	58.5 ± 4.7
	$\nu/E \text{ (10}^4\text{GPa)}^{-1}$	12.3 ± 1.9
Young's modulus $E \text{ (GPa)}$		216 ± 16
Poisson's ratio ν		0.27 ± 0.035
Stress constant $K \text{ (MPa/deg)}$		-314 ± 25

- (7) Macherauch, E. and Wolfstig, U., *Mater. Sci. Eng.*, 30 (1977), 1.
- (8) 平・有間・城山, 材料, 12-123 (昭 38), 865.
- (9) 平・林・渡瀬, 材料, 17-183 (昭 43), 1151.
- (10) 日本材料学会編, X 線応力測定法, (昭 56), 60, 養賢堂.
- (11) 栗田, 機論, 43-368 (昭 52), 1358.
- (12) Kurita, M., *Journal of Testing and Evaluation*, 9-2 (1981), 133.
- (13) Kurita, M., *Journal of Testing and Evaluation*, 9-5 (1981), 285.
- (14) Kurita, M., *Journal of Testing and Evaluation*, 11-2 (1983), 143.
- (15) Kurita, M., *Journal of Testing and Evaluation*, 10-2 (1982), 38.
- (16) Kurita, M. and Hirayama, H., *Journal of Testing and Evaluation*, 12-1 (1984), 13.
- (17) 栗田・天野・坂本, 材料, 31-345 (昭 57), 609.
- (18) 文献(5)の 50~60 ページ.
- (19) Kurita, M., *Role of Fracture Mechanics in Modern Technology*, (1987), 863, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland).
- (20) Klug, H. P. and Alexander, L. E., *X-Ray Diffraction Procedures for Polycrystalline and Amorphous Materials*, (1974), 635, John Wiley.
- (21) Cullity, B. D., *Elements of X-Ray Diffraction*, (1978), 127~135, 463.
- (22) Bowker, A. H. and Lieberman, G. J., *Engineering Statistics*, (1959), 62, prentice-Hall.
- (23) 本間・春日屋, 次元解析・最小二乗法と実験式, (昭 57), 92, 93, コロナ社.
- (24) 栗田・ほか 3 名, 機論, 52-480, A (昭 61), 1921.

討 論

〔質問〕 三 好 良 夫 (大阪大学基礎工学部)

$\sin^2\psi$ 法による X 線応力測定ではその基礎理論から、各 X 線入射角 ψ とそこで求めた回折線ピーク位置 2θ の関係を表す $\sin^2\psi$ 線図が直線となるのが基本であることはすでにご承知のことと存じる。したがって、被測定物に X 線応力測定法が適用できるか否かを含めて、測定値の信頼性も、その線図の直線性から評価するのが妥当のように思われるが、いかがか。

〔回答〕 等方性弾性体に対する弾性力学の理論に

よれば、式(8)が示すとおり $\sin^2\psi$ 線図は直線となる。本論文で示した標準偏差を求める諸式は、 $\sin^2\psi$ 線図が直線であってもなくても成立する。「測定値の信頼性を $\sin^2\psi$ 線図の直線性から評価する」方法とは、わが国でよく用いられている t 分布の式を意味しているものと思われるが、すでに文献(14)に詳しく述べたように、X 線応力測定においては t 分布の式から応力値の信頼限界を求めることはできない。

$\sin^2\psi$ 線図上のピーク位置 $p_i (i=1 \sim k)$ の期待値 μ_i

に当てはめた直線を $\mu = \alpha + \beta u$, p_i のかたよりを $\xi_i (= \mu_i - \mu)$, ばらつきを $\epsilon_i (= p_i - \mu_i)$ とすると, t 分布の式は $\xi_i = 0$ の仮定のもとに導かれている。ところが, たとえ $\sin^2\psi$ 線図が直線となると考えられる材料でも測定には系統誤差が含まれているし, また実際の材料は式(8)を導く際に設けられている弾性力学の仮定を厳密に満たしているわけではない。そこで一般的には $\xi_i \neq 0$ となるが, かたより ξ_i がばらつき ϵ_i に比べて十分に小さいときには $\xi_i = 0$ を仮定した t 分布の式が適用できる。しかし X 線応力測定では文献(14)で述べたように, 一見 $\sin^2\psi$ 線図がかなりよく直線となる鋼材でさえ ξ_i が ϵ_i に比べて無視できないために, t 分布の式から計算した応力値の信頼区間は, 実際に 65 回繰返し測定して得た応力値から求めた信頼区間の 4 倍も大きくなる。あらかじめ直線性の保証が得ら

れないために多くの ψ を選ぶ $\sin^2\psi$ 法に対して, 直線性の仮定がかなりよく成り立っていないと使えない t 分布の式を適用するのは矛盾している。

また, たとえ $\xi_i = 0$ の仮定が成立する場合でも, t 分布の式から応力値の信頼区間を再現性よく求めるためには 4~6 個のピーク位置では不十分で, かなり多くの点が必要となる。文献(14)に示したように, t 分布の式から求めた信頼区間の標準偏差は, 本論文の式(19)から求めた信頼区間の標準偏差の約 40 倍も大きくなる。すなわち, t 分布の式で信頼区間を求めても, もつ一度測定し直せばかなり異なる値が得られることが多いはずである。

このように, 仮定のくずれに対して強靱でない統計学の式を実際に応用するときには, 注意が必要である。