軸対称荷重を受け混合境界を持つ円板の曲げ問題
に対する係数比較法の提案*三 船 忠 志^{*1}, 浜 田 実^{*2}, 水 嶋 巖^{*3}
増 尾 龍 一^{*1}, 岡 本 行 史^{*4},Proposal of Coefficient Comparison Method for Bending Problems of an
Axi-symmetrically Loaded Circular Plate with Mixed BoundariesTadashi MIFUNE, Minoru HAMADA, Iwao MIZUSHIMA,
Ryuichi MASUO, and Kousi OKAMOTO

This paper treats the bending problem of an axi-symmetrically loaded circular plate with mixed boundaries. It is assumed that the plate is simply supported on two equal and diametrically opposite portions of its edge the remaining edge portions being clamped, or that the plate is supported and elastically constrained for rotation where the constraint is biaxially symmetric. The deflection and the bending moments at the center of the plate are calculated by the coefficient comparison method which is proposed in this paper. By using this method with the results obtained for the cases of uniformly distributed load, the problems of axi-symmetrically loaded circular plates with mixed boundary conditions can be easily solved. The validity of the calculated results is assured by comparing with those obtained by the iterative method.

Key Words: Elasticity, Numerical Analysis, Circular Plate, Bending, Mixed Condition, Coefficient Comparison Method

1. 緒 言

著者らは、前報⁽¹⁾⁽²⁾において円板の周縁が部分的に支持され、残りの部分が固定された場合の曲げ問題、および周縁が支持され、回転に対して線形および非線形的に弾性拘束され、かつその拘束度が周縁に沿って変化する場合の曲げ問題に有効な、数値解法の一つとして反復解法を提案し、等分布荷重および中心に集中荷重が作用する場合の解を求めた。このうち、固定・支持の混合境界条件の円板は Conway ら⁽³⁾および Stahl ら⁽⁴⁾により取扱われたこともあるが、いずれも等分布荷重の場合のみである。著者らの反復解法は、他の軸対称分布荷重にも適用できるが、そのつど大形計算機を利用することは得策ではない。これに対して、これらの等分布荷重の解を利用し係数比較法と呼ぶ新しい方法によれば、きわめて簡単に集中荷重や他の軸対称分布荷重の解が求められることがわかった。本研究ではこの係数比較法を図1および図2に示すような周縁

が部分的に固定で、残りの部分が支持される場合と、周縁が支持され回転に対して弾性拘束された場合の円板に軸対称分布荷重が作用する場合の静的曲げ問題に適用する。

図1 部分的に支持・固定された円板

図2 支持され部分的に弾性拘束された円板

* 昭和63年11月26日 関西支部第248回講演会において講演。原稿受付 昭和63年2月8日。

^{*1} 正員、大阪工業大学 (〒535 大阪市旭区大宮5)。

^{*2} 正員、阿南工業高等専門学校 (〒774 阿南市見能林町)。

^{*3} 正員、奈良工業高等専門学校 (〒639-11 大和郡山市矢田町)。

^{*4} (株)近計システム (〒559 大阪市住之江南港)。

2. 基礎方程式

2.1 基礎関係式 図1のように周縁の一部が固定で、残りの部分が支持された一定板厚の円板および図2に示すような周縁が支持され、また半径方向の回転に対して弾性拘束され、その弾性拘束度が周縁に沿って x, y 両軸に関し対称的に変化するような円板に軸対称分布荷重、または中心点に集中荷重が作用する場合を取扱う。図1および図2に示す諸記号を用い、次のような無次元量を定義する。

$$\rho = r/a, \bar{w} = \frac{w}{q_0 a^4/D}, \left(\text{または} \frac{w}{Pa^2/D} \right)$$

$$\phi = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \rho}, \bar{M}_r = \frac{M_r}{q_0 a^2}, \left(\text{または} \frac{M_r}{P} \right)$$

$$\bar{M}_t = \frac{M_t}{q_0 a^2}, \left(\text{または} \frac{M_t}{P} \right), \bar{k} = ka/D$$

ただし、 w はたわみ、 M_r, M_t は曲げモーメント、 ϕ はたわみ角、 q_0 は分布荷重 q の代表値、 P は集中荷重値、 D は曲げ剛性である。

薄板の曲げ理論により、場の支配微分方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D} \quad (1)$$

式(1)の一般解 $\bar{w}$ は特解 $\bar{w}_0$ と同次方程式の解 $\bar{w}_1$ の和で表される。

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_1 \quad (2)$$

ここで、円板中心におけるたわみとモーメントの有限性を考慮し、また、たわみの分布が x 軸および y 軸に関して対称な問題のみを取扱うことにすると、 $\bar{w}_1$ が次のように与えられる。

$$\bar{w}_1 = \left[A_0 + C_0 \rho^2 + \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{m+2}) \cos m\theta \right] \quad (3)$$

また、特解 $\bar{w}_0$ は全周単純支持の場合のそれぞれの荷重に対するたわみ解を用いる。

2.2 等分布荷重 q_0 の場合 この等分布荷重の場合の特解を $\bar{w}_0$ とし

$$\bar{w}_0 = \frac{1}{64(1+\nu)} [2(3+\nu)(1-\rho^2) - (1+\nu)(1-\rho^4)] \quad (4)$$

を用いる。 ν はポアソン比である。

このとき、 $\phi = (\partial \bar{w} / \partial \rho)$ および $\bar{M}_r$ は式(2)~(4)より次式のようにになる。

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \\ = \frac{1}{16(1+\nu)} [(1+\nu)\rho^3 - (3+\nu)\rho]$$

$$+ 2C_0 \rho + \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \{m A_m \rho^{m-1} + (m+2) C_m \rho^{m+1}\} \times \cos m\theta \quad (5)$$

$$\bar{M}_r = \bar{M}_{r0} + \bar{M}_{r1}$$

これより

$$\bar{M}_r = \frac{1}{16}(3+\nu)(1-\rho^2) - 2(1+\nu)C_0 - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} [m(m-1)(1-\nu)A_m \rho^{m-2} + (m+1)\{m(1-\nu) + 2(1+\nu)\}C_m \rho^m] \cos m\theta \quad (6)$$

また図1のような、固定・支持の混合境界条件の場合および図2のような周縁が支持され、半径方向の回転に対して弾性拘束される場合は周縁では全周にわたり $\bar{w}$ が零であるから、式(2)~(4)より

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -C_0 \\ A_m &= -C_m \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる。式(7)を式(5)、(6)に代入すると、 $(\phi)_{\rho=1}$ および $(\bar{M}_r)_{\rho=1}$ はそれぞれ次のようになる。

$$(\phi)_{\rho=1} = -\frac{1}{8(1+\nu)} - 2A_0 - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} 2A_m \cos m\theta \quad (8)$$

$$(\bar{M}_r)_{\rho=1} = 2(1+\nu)A_0 - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} [m(m-1)(1-\nu) - (m+1)\{m(1-\nu) + 2(1+\nu)\}]A_m \cos m\theta \quad (9)$$

図1の場合は、固定部の周縁での境界条件はたわみ角 $(\phi)_{\rho=1}$ が零で、支持部の周縁での境界条件は $(\bar{M}_r)_{\rho=1}$ が零である。また、図2に示すような周縁が支持され半径方向の回転に対して弾性拘束される場合の境界条件は、 $[(\bar{M}_r)_{\rho=1} - \bar{k}(\phi)_{\rho=1}]$ が零であるから、これらの境界条件を満足するように A_m を決定するとこれらの場合の解が得られる。

3. 固定・支持の混合境界条件で軸対称荷重を受ける円板の解析

前報⁽¹⁾では、等分布荷重と中央集中荷重の場合に対して反復解法により解を求めたが、ここでは等分布荷重の結果を用いて、きわめて簡単な手続きにより、他の軸対称分布荷重の解を得る手法(係数比較法)を提案する。

3.1 集中荷重の場合 係数比較法を説明するために、集中荷重を考える。特解を $\bar{w}_{0c}$ とし、同次解を $\bar{w}_{1c}$ とすれば、 $\bar{w}_c$ は

$$\bar{w}_c = \bar{w}_{0c} + \bar{w}_{1c} \\ = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (1-\rho^2) + 2\rho^2 \ln \rho \right]$$

$$+ \left[A_0 + C_0 \rho^2 + \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} (A_m \rho^m + C_m \rho^{m+2}) \cos m\theta \right] \quad \dots\dots\dots (10)$$

である⁽⁵⁾から、この場合のたわみ角 ϕ に添字 c を付けて表すと、 $(\phi_c)_{\rho=1}$ は

$$(\phi_c)_{\rho=1} = (\phi_{0c})_{\rho=1} + (\phi_{1c})_{\rho=1} \\ = -\frac{1}{4\pi(1+\nu)} - 2A_0 - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} 2A_m \cos m\theta \quad \dots\dots\dots (11)$$

等分布荷重の場合のたわみ角 ϕ に添字 d を付けて表すと、式(8)より、

$$(\phi_d)_{\rho=1} = (\phi_{0d})_{\rho=1} + (\phi_{1d})_{\rho=1} \quad \dots\dots\dots (8)'$$

となる。図1の境界条件の場合は $\alpha < \theta < \pi/2$ の領域では、 $(\phi_c)_{\rho=1} = 0$ および $(\phi_d)_{\rho=1} = 0$ となるから、この境界条件を満足したときの未定係数 A_m にそれぞれ、添字 c および添字 d を付けて表すと次のようになる。

$$(\phi_c)_{\rho=1} = -\frac{1}{4\pi(1+\nu)} - 2A_{0c} - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} 2A_{mc} \cos m\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$(\phi_d)_{\rho=1} = -\frac{1}{8(1+\nu)} - 2A_{0d} - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} 2A_{md} \cos m\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(13)は定数倍しても境界条件を満足するので、式(14)の特別な定数 ζ_c を用いて両式を比較すると $A_{0c} = \zeta_c \cdot A_{0d}$ および $A_{mc} = \zeta_c \cdot A_{md}$ となる。この関係式を利用すると、 $\bar{w}_{1c} = \zeta_c \cdot \bar{w}_{1d}$ の関係を得る。この場合 ζ_c は $2/\pi$ となるから、 $\bar{w}_{1c}$ は上式より式(15)となる。

$$\zeta_c = (\phi_{0c})_{\rho=1} / (\phi_{0d})_{\rho=1} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\bar{w}_{1c} = \bar{w}_{1d} \cdot (2/\pi) \quad \dots\dots\dots (15)$$

集中荷重の場合のたわみ $\bar{w}_c$ と等分布荷重の場合のたわみ $\bar{w}_d$ とは次式であるから、

$$\bar{w}_d = \bar{w}_{0d} + \bar{w}_{1d} \quad \dots\dots\dots (16)$$

表1 中央集中荷重のときの円板中心の $\bar{w}$ の値

α°	$(wD/Pa^2)_{\max} (\equiv w_{\max})$	
	Coefficient Method	Iterative Method
90°	0.05050	
0°	0.01990	0.01989
15°	0.02050	0.02050
30°	0.02209	0.02209
45°	0.02456	0.02456
60°	0.02788	0.02788
75°	0.03247	0.03247

$$\bar{w}_c = \bar{w}_{0c} + \bar{w}_{1c} \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(16)より、 $\bar{w}_d$ と $\bar{w}_{0d}$ が既知ならば、 $\bar{w}_{1d}$ が求まる。これを式(15)に用いて $\bar{w}_{1c}$ を求め、さらにそれを、式(17)に代入すると、集中荷重の場合のたわみ $\bar{w}_c$ は次のようになる。

$$\bar{w}_c = \bar{w}_{0c} + \{2(\bar{w}_d - \bar{w}_{0d})/\pi\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

これによる計算結果を前報⁽¹⁾に述べた反復解法による計算結果と比較すると、表1のようによく一致することが確かめられる。

3・2 三角形分布荷重の場合 図3のような三角形分布荷重の場合の特解を $\bar{w}_{0t}$ とすれば、 $\bar{w}_{0t}$ は

$$\bar{w}_{0t} = \frac{1}{14400} \left[\frac{3(183+43\nu)}{1+\nu} - \frac{10(71+29\nu)}{1+\nu} \right. \\ \left. \times \rho^2 + 225\rho^4 - 64\rho^5 \right] \quad \dots\dots\dots (19)$$

である⁽⁶⁾から、たわみ角 ϕ に添字 t を付けて表すと ϕ_t は

$$\phi_t = \phi_{0t} + \phi_{1t} \\ = \frac{1}{14400} \left[-\frac{20(71+29\nu)}{1+\nu} \rho + 900\rho^3 - 320\rho^4 \right] \\ - 2A_0 - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} 2A_m \cos m\theta \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。図1の境界条件の場合は $\alpha < \theta < \pi/2$ の領域では、 $(\phi_t)_{\rho=1} = 0$ および $(\phi_d)_{\rho=1} = 0$ となるから、この境界条件を満足したときの未知係数 A_m にそれぞれ、添字 d および添字 t を付けて表すと、式(13)および式(21)のようになる。

表2 三角形分布荷重のときの円板中心の $\bar{w}$, $\bar{M}_r$, $\bar{M}_t$ の値 ($\theta=0$ のとき)

α°	$(\bar{w})_{\max}$ (wD/qa^2)	$(\bar{M}_r)_{\rho=0}$ (M_r/qa^2)	$(\bar{M}_t)_{\rho=0}$ (M_t/qa^2)
90°	0.03139	0.11069	0.11069
0°	0.00896	0.05243	0.05243
15°	0.00940	0.05238	0.05477
30°	0.01056	0.05271	0.06051
45°	0.01236	0.05448	0.06808
60°	0.01481	0.05899	0.07634
75°	0.01825	0.06818	0.08502
85°	0.02191	0.07998	0.09277

図3 三角形分布荷重を受ける円板

$$-\frac{7}{120(1+\nu)} - 2A_{0t} - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} 2A_{mt} \cos m\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、式(13)を ζ_t 倍して、これと式(21)とを比較すると、 $A_{mt} = \zeta_t \cdot A_{md}$ を得る。この関係を利用すると、 $\bar{w}_{1t} = \zeta_t \cdot \bar{w}_{1d}$ となる。ただし、この場合の ζ_t は

$$\zeta_t = (\Phi_{0t})_{\rho=1} / (\Phi_{0d})_{\rho=1} = 7/15$$

となり、 $\bar{w}_t$ は次式で得られる。

$$\bar{w}_t = \bar{w}_{0t} + \zeta_t \cdot (\bar{w}_d - \bar{w}_{0d}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

また、曲げモーメント $\bar{M}$ は式(22)の $\bar{w}$ を $\bar{M}$ と書き換えればよいから、 $\bar{M}_{rt}$ 、 $\bar{M}_{tt}$ は次のようになる。

$$\bar{M}_{rt} = \bar{M}_{r0t} + \zeta_t \cdot (\bar{M}_{rd} - \bar{M}_{r0d}) \quad \dots\dots\dots (22)'$$

$$\bar{M}_{tt} = \bar{M}_{t0t} + \zeta_t \cdot (\bar{M}_{td} - \bar{M}_{t0d}) \quad \dots\dots\dots (22)''$$

表2は周縁が部分的に固定または支持された円板に三角形形状(図3)分布荷重が作用する場合の係数比較法による計算結果で、円板中心のたわみと曲げモーメントを示す。

3.3 中央の同心円部に等分布荷重が作用する場合
図4に示すように、円板の半径 b の部分に等分布荷重 q_0 が作用する場合の特解を $\bar{w}_{0\rho}$ とすれば、 $\bar{w}_{0\rho}$ は

$$\rho \leq \gamma \quad (\text{ただし, } \gamma = b/a)$$

$$\bar{w}_{0\rho} = \frac{1}{64} \left[4 - 5\gamma^2 + 4(2 + \nu^2) \ln \gamma \right] \gamma^2 + \frac{2\gamma^2}{1+\nu} (1 - \rho^2) \{ 4 - (1 - \nu) \gamma^2 \}$$

表3 $\gamma=0.5$ の場合の同心円部に等分布荷重 q_0 が作用するときの円板中心の $\bar{w}$ 、 $\bar{M}_r$ 、 $\bar{M}_t$ の値 ($\theta=0$ のとき)
ただし、 $P = q_0 \pi b^2$

α°	w_0/Pa^2	M_r/P	M_t/P
90°	0.03950	0.14780	0.14780
0°	0.01272	0.07825	0.07825
15°	0.01325	0.07820	0.08105
30°	0.01464	0.07859	0.08790
45°	0.01678	0.08071	0.09694
60°	0.01971	0.08609	0.10680
75°	0.02381	0.09705	0.11716
85°	0.02819	0.11115	0.12641

図4 部分的に等分布荷重を受ける円板

$$-4(1+\nu) \ln \gamma + \rho^4 \quad \dots\dots\dots (23)$$

となり、 $q_0 = P/\pi b^2$ であるから $(\bar{w}_{0\rho})_{\rho=0}$ は

$$(\bar{w}_{0\rho})_{\rho=0} = \frac{1}{16\pi(1+\nu)} \left[(3+\nu) - \frac{\gamma^2}{4} \times \{ 7+3\nu - 4(1+\nu) \ln \gamma \} \right] \quad \dots\dots\dots (24)$$

である⁽⁶⁾。このとき、たわみ角 Φ に添字 p を付けて表すと、 $(\Phi_p)_{\rho=1}$ は

$$(\Phi_p)_{\rho=1} = (\Phi_{0p})_{\rho=1} + (\Phi_{1p})_{\rho=1} = \frac{1}{16\pi\gamma^2} \left[1 - \frac{\gamma^2}{(1+\nu)} \times \{ 4 - (1 - \nu) \gamma^2 - 4(1+\nu) \ln \gamma \} \right] - 2A_0 - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} 2A_m \cos m\theta \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。図1の境界条件の場合は $\alpha < \theta < \pi/2$ のとき、 $(\Phi_p)_{\rho=1} = 0$ および $(\Phi_d)_{\rho=1} = 0$ となるから、この境界条件を満足したときの未知係数 A_m に、それぞれ、添字 d および添字 p を付けて表すと、式(13)および次式(26)のようになる。

$$\frac{1}{16\pi\gamma^2} \left[1 - \frac{\gamma^2}{(1+\nu)} \times \{ 4 - (1 - \nu) \gamma^2 - 4(1+\nu) \ln \gamma \} \right] - 2A_{0p} - \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} 2A_{mp} \cos m\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

図5 ばね定数が円周方向に変化する場合

図6 部分的に弾性拘束された円板

ここで、式(13)と式(26)とを比較すると $A_{mp} = \zeta_p \cdot A_{md}$ を得る。この関係を利用すると、 $\bar{w}_{1p} = \zeta_p \cdot \bar{w}_{1d}$ となり、前と同様にして、

$$\zeta_p = (2 - \gamma^2) / \pi$$

$$\bar{w}_p = \bar{w}_{0p} + (\bar{w}_d - \bar{w}_{0d}) \zeta_p \quad \dots\dots\dots (27)$$

を得る。

上記の三つの場合の関係式(18)、(22)、(27)を係数 ζ を用いて表すと次式のようになる。

$$\bar{w}_x = \bar{w}_{0x} + (\bar{w}_d - \bar{w}_{0d}) \zeta \quad \dots\dots\dots (28)$$

表3は周縁が部分的に固定または支持された円板の同心円部に等分布荷重が作用する図4の場合の係数比較法による結果で $\gamma = 0.5$ としたときの中心のたわみと曲げモーメントを示す。

4. 半径方向の回転に対して 弾性拘束された円板の解析

ここでは、最初に円板が全周一様に弾性拘束されている簡単な場合の解析法を説明し、続いて弾性拘束が円周方向に式(34)および図5のように変化する場合、さらに図6のように階段状に変化する場合を取扱う。荷重はそれぞれ、中心に集中荷重および三角形分布荷重(図3)、同心円部に等分布荷重(図4)が作用する場合である。ただし、本研究ではばね特性が線形の場合のみを取扱う。

4.1 弾性拘束が全円周に一様で中央集中荷重の場合 この場合の境界条件は全円周にわたり、次式のように表される。

$$(\bar{M}_r)_{\rho=1} - \bar{k}(\phi)_{\rho=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

したがって、等分布荷重の場合(図2)の境界条件は式(8)および、式(9)より、次式で表される。

$$\frac{\bar{k}}{8(1+\nu)} + A_{0d}\{2(1+\nu) + 2\bar{k}\}$$

$$+ \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} A_{md}[\Psi(\bar{k}, m)] \cos m\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここに、

$$\Psi(\bar{k}, m) = 2\bar{k} - [m(m-1)(1-\nu) - (m+1)\{m(1-\nu) + 2(1+\nu)\}]$$

また、中心に集中荷重が作用する場合の境界条件も同様に

$$\frac{\bar{k}}{4\pi(1+\nu)} + A_{0c}\{2(1+\nu) + 2\bar{k}\} + \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} A_{mc}[\Psi(\bar{k}, m)] \cos m\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

となり、両式を比較することにより集中荷重が作用する場合の ζ_c は

$$\zeta_c = (\phi_{0c})_{\rho=1} / (\phi_{0d})_{\rho=1} = 2/\pi$$

となり、 $\bar{w}_c$ は次式で得られる。

$$\bar{w}_c = \bar{w}_{0c} + \zeta_c \cdot (\bar{w}_d - \bar{w}_{0d}) \quad \dots\dots\dots (32)$$

表4は周縁が支持され、半径方向の回転に対して一様に弾性拘束された円板に集中荷重が作用する場合の円板の中心におけるたわみで反復解法と係数比較法による結果との比較を示す。

4.2 弾性拘束が全円周に一様で三角形分布荷重(図3)の場合 4.1節の場合と同様にすれば、円板に三角形分布荷重(図3)の場合の ζ_t は

$$\zeta_t = (\phi_{0t})_{\rho=1} / (\phi_{0d})_{\rho=1} = 7/15$$

となり、 $\bar{w}_t$ は次式で得られる。

$$\bar{w}_t = \bar{w}_{0t} + \zeta_t \cdot (\bar{w}_d - \bar{w}_{0d}) \quad \dots\dots\dots (33)$$

式(32)、(33)は式(18)、(22)と同じである。したがって、円板の同心円部に等分布荷重が作用する図4の場合にも式(27)となる。

表5は周縁が支持され、半径方向の回転に対して一様に弾性拘束された円板に三角形分布荷重(図3)が作用する場合の係数比較法による円板中心のたわみ

表4 中央集中荷重で全周一様弾性拘束のときの円板中心の $\bar{w}$ の値

$\bar{k}$	$(wD/Pa^2)_{max} (\equiv \bar{w}_{max})$	
	Coefficient Method	Iterative Method
0	0.05050	
1.00	0.03719	0.03719
2.00	0.03191	0.03195
10.0	0.02344	0.02342
∞	0.01988	0.01989

表5 三角分布荷重で全周一様弾性拘束のときの円板中心の $\bar{w}$, $\bar{M}_r$, $\bar{M}_t$ の値
()内は、Iterative method

$\bar{k}$	$\bar{w}$	$\bar{M}_r = \bar{M}_t$
0	0.03139	0.11069
1.00	0.02164 (0.0216)	0.08535 (0.0853)
2.00	0.01776 (0.0178)	0.07536 (0.0753)
10.0	0.01156 (0.0115)	0.05908 (0.0591)
∞	0.00894 (0.0090)	0.05240 (0.0524)

と曲げモーメントを示す。

4.3 弾性拘束が全円周に一樣で同心円部に等分布荷重 (図4) の場合 表6は周縁が支持され、半径方向の回転に対して一樣に弾性拘束された円板に同心円部に等分布荷重が作用する (ただし $\gamma=0.5$) 場合の中心のたわみと曲げモーメントを示す。

4.4 集中荷重で、弾性拘束が円周方向に変化する場合 (図5) ここでは、半径方向の回転に対して図5および式(34)のような θ の関数のばね定数で弾性拘束された円板に集中荷重が作用する場合の解析を行う

$$\bar{k}(\theta) = \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{2} + \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2} \cos 4\theta \quad \dots\dots\dots (34)$$

この場合も ζ_c は

$$\zeta_c = (\Phi_{0c})_{\rho=1} / (\Phi_{0d})_{\rho=1} = 2/\pi$$

となり、 $\bar{w}_c$ は式(32)で得られる。

表7は周縁が支持され、半径方向の回転に対して図5のような θ の関数で弾性拘束された円板に集中荷重

表6 $\gamma=0.5$ の場合の部分分布荷重で全周一樣弾性拘束のときの円板中心の $\bar{w}$, $\bar{M}_r$, $\bar{M}_t$ の値
ただし、 $P=q_0\pi b^2$

$\bar{k}$	wD/Pa^2	$M_r/P=Mt$
0	0.03950	0.14780
1.00	0.02789	0.11755
2.00	0.02329	0.10563
10.0	0.01590	0.08619
∞	0.01279	0.07823

表7 中央集中荷重でばね定数が円周方向に変化する
ときの円板中心の $\bar{w}$ の値
ただし、 $\bar{k}_1=15.0$ の場合

$\bar{k}_2$	$(wD/qaa^4)_{max} (\equiv \bar{w}_{max})$	
	Coefficient Method	Iterative Method
0	0.05050 ($\bar{k}_1=\bar{k}_2=0$)	
2.5	0.02443	0.02434
5.0	0.02372	0.02363
7.5	0.02324	0.02315
10.0	0.02290	0.02281
12.5	0.02263	0.02254
15.0	0.02242	0.02230

が作用する場合の係数比較法による円板中心のたわみの計算結果と反復法による計算結果の比較を示す。

4.5 三角形分布荷重で、弾性拘束が円周方向に階段的に変化する場合 (図6) 表8は周縁が支持され、半径方向の回転に対して図6のように部分的に弾性拘束された円板に三角形分布荷重が作用する場合の係数比較法による結果で中心のたわみと曲げモーメントを示す。表中の各数値は無次元量であり、また最下位の数値は、多少変動する可能性をもつ。また、図6中の β は反復解法 [文献(1), (2)] の場合にステップ関数をフーリエ級数で精度よく取扱うため、境界部に狭い部分を設け、この部分では $\bar{k}$ が直線的に変化するものと近似するときの幅を示す。したがって、反復解法では種々の β の値に対して計算を行い、外挿法により $\beta=0$ の値を推定している。

5. 結 言

周縁が部分的に固定または支持された円板、および周縁が支持され半径方向の回転に対して弾性拘束された円板の曲げ問題について、等分布荷重の結果を用いて他の軸対称分布荷重の場合の解を得ることのできる係数比較法を提案した。この方法による解の精度は、等分布荷重の場合の解の精度によって正確に決まり、この係数比較法は混合境界条件に対して有効な方法であると考えられる。また、薄板構造物の基本的要素の一つである円板についての計算結果を整備しておくこと

表8 三角分布荷重でばね定数が図6の変化をする
ときの円板中心の $\bar{w}$, $\bar{M}_r$, $\bar{M}_t$ の値 ($\theta=0$ のとき)

$\bar{k}_0$	α°	wD/qaa^4	M_r/qaa^2	M_t/qaa^2
0	90°	0.03139	0.11069	0.11069
1.0	10.0°	0.02234	0.08647	0.08786
	22.5°	0.02335	0.08823	0.09140
	45.0°	0.02550	0.09285	0.09795
	60.0°	0.02715	0.09729	0.10209
	75.0°	0.02905	0.10307	0.10615
	85.0°	0.03052	0.10786	0.10904
2.0	10.0°	0.01857	0.07639	0.07823
	22.5°	0.01973	0.07816	0.08259
	45.0°	0.02244	0.08359	0.09128
	60.0°	0.02469	0.08948	0.09705
	75.0°	0.02745	0.09780	0.10300
	85.0°	0.02980	0.10549	0.10766
15.0	10.0°	0.01118	0.05720	0.05910
	22.5°	0.01219	0.05783	0.06372
	45.0°	0.01502	0.06162	0.07470
	60.0°	0.01773	0.06766	0.08269
	75.0°	0.02151	0.07856	0.09145
	85.0°	0.02572	0.09212	0.09986

は、薄板構造物の設計上意義があると考える。

文 献

- (1) 浜田・ほか4名, 機論, 52-476, A(昭61), 958.
- (2) Hamada, M., ほか 名, *Int. J. Mech. Sci.*, 29-3 (1987), 231.
- (3) Conway, H. D. and Farnham, K. A., *Int. J. Mech. Sci.*, 9

(1967), 661.

- (4) Stahl, B. and Keer, L. M., *AIAA J.*, 10-6 (1972), 739.
- (5) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, (1959), 284, McGraw-Hill.
- (6) 関谷・浜田・角編, 平板構造強度設計便覧, (昭57), 33, 朝倉書店.

討 論

〔質問〕 松原典宏〔日本文理大学工学部〕

軸対称荷重を受け混合境界をもつ円板の曲げ問題に対し、係数比較法による新たな解析手法を提案されたことに對し敬意を表す。以下をご教示願いたい。

混合境界を有するので、たわみ、曲げモーメント、応力の分布は非軸対称となるが、薄肉の円板の設計にあたりその補強を考えるうえで参考になるので、中央集中荷重および同心円部等分布荷重($\gamma=0.5$)の場合について、板面応力分布はどのようなになるのか。例え

ば、 $\alpha=45^\circ$ の場合で $\theta=45^\circ$, $0<\gamma\leq a$ における値を例にとって図示願えば幸いである。

〔回答〕 等分布荷重の解があれば、ご質問の中央集中荷重および同心円状等分布荷重の場合の各点のたわみと曲げモーメントが本解法により、容易に求められる。以下に一例として、 $\alpha=45^\circ$ の等分布荷重、中央集中荷重および同心円状部分等分布荷重($\gamma=0.5$)の場合において、 $\theta=45^\circ$ の半径上の曲げモーメントを付表1, 2および付図1, 2に示す。ただし、曲げモーメントの特異点($\rho=1$ および $\rho=0$)は除く。

付表1 固定・支持の円板で $\alpha=45^\circ$, $\theta=45^\circ$ の場合の曲げモーメント M_r の分布

ρ	Uniformly M_r/qa^2	Concentrated M_r/p	Partially M_r/p
0.00	0.10047	∞	0.08888
0.20	0.09293	0.09961	0.07877
0.40	0.08916	0.02853	0.04780
0.60	0.02585	-0.01473	-0.00010
0.80	-0.04691	-0.05405	-0.04245
1.00	—	—	—

付表2 固定・支持の円板で $\alpha=45^\circ$, $\theta=45^\circ$ の場合の曲げモーメント M_t の分布

ρ	Uniformly M_t/qa^2	Concentrated M_t/p	Partially M_t/p
0.00	0.10047	∞	0.08888
0.20	0.09491	0.15434	0.08238
0.40	0.07814	0.08103	0.06283
0.60	0.04909	0.03571	0.03167
0.80	0.00241	-0.00260	-0.00135
1.00	—	—	—

付図1 固定・支持の円板で $\alpha=45^\circ$, $\theta=45^\circ$ の場合の曲げモーメント M_r の分布

付図2 固定・支持の円板で $\alpha=45^\circ$, $\theta=45^\circ$ の場合の曲げモーメント M_t の分布