接触応力分布を求めるための逆問題解析手法*

(測定値のバラツキを考慮した手法)

尾田十八*¹, 本 悟*²

On Inverse Analytical Technique to Obtain Contact Stress Distributions
(Technique Using Measurement Values with Errors)

Juhachi ODA and Satoru MOTO

In this paper, an inverse analytical technique to estimate the contact stress distributions is proposed. The technique uses the finite element method and the measurement values. The values are forces or displacements measured by experimental techniques on the surface of an elastic body distant from the contact area, and include several errors. In order to decrease the effect of the errors, two inverse analysis schemes are presented. One scheme is a technique using an average value of many measurements. The other scheme is a technique applying the least square method. The validity of these schemes is evaluated by using numerical data produced by computer.

Key words : Elasticity, Structural Analysis, Experimental Stress Analysis
Inverse Analysis, Contact Problem, Finite Element Method

1. 緒 言

接触する物体間には、ある大きさの接触領域が存在し、その領域にはある分布の接触応力が生ずる。これらを求めることは、一般に非常に難しいが、近年この問題を解決する手法として、実験的手法と、解析的手法を組み合わせた逆問題解析手法が著者らによって提案された⁽¹⁾⁽²⁾。この手法は、接触領域以外で測定された力や変位情報をもとに、接触領域の大きさやそこの応力分布をFEMなどを使用して計算するものである。ところがこの手法では、入力情報としてある誤差分布を持った測定値を用いるため、この誤差によって得られる解も致命的な精度の低下をもたらすこと

が多い。そこで、本研究では、入力すべき測定値の誤差をある程度許容できる逆解析手法を考える。具体的には、同一の条件下で多数回測定して得られる測定値群(これらの測定値はすべて実測値ではなく、乱数を用いたコンピュータシミュレーション値である。)を平均して入力する方法(入力測定値平均化法)の有効性と、求めようとする接触部の解析点数に対してより過剰な測定点を取り、最小自乗法によって最も確からしい解を得ようとする方法(最小自乗法による方法)の有効性について検討した。さらに、これら両手法を組み合わせた方法がどの程度誤差を許容できるかも吟味したので報告する。

* 昭和63年11月11日 北陸信越支部北陸地方講演会において講演、原稿受付 昭和63年1月28日。

*¹ 正員、金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野2-40-20)。

*² 学生員、金沢大学大学院。

2. FEMを利用した逆問題解析の理論

構造物をFEMを用いて解析する場合、一般にその構造物の分割要素の節点数を m 、自由度を f とすれば次のような剛性方程式を作ることができる。

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (1)$$

ここで $(i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, f)$ 。一般の順解析問題では、どの節点のどの方向の力 $\{F\}$ や変位 $\{d\}$ についてもそれらの一方が既知で、他方が未知となる関係があるが、逆問題では必ずしもそうではなく、力、変位ともに未知や、既知の場合がある。つまりそれらは次の4つの場合に分けることができる。

No. 1, 力、変位ともに未知の場合。

No. 2, 力は既知、変位は未知の場合。

No. 3, 力、変位ともに既知の場合。

No. 4, 力は未知、変位は既知の場合。

これらそれぞれの場合の数を N_1, N_2, N_3, N_4 個とし、それらに対応する力と変位の関係を改めて記号化したものが表1である。

一方、問題を図1に示すような2次元物体の問題に限定してみると、その内部領域 Ω と境界 Γ 上の節点について、上述の力、変位の場合分けは表2のようになることがわかる。ここで、

Γ_c : 接触境界

Γ_u : 変位の与えられる境界

Γ_F : 力の与えられる境界

さらに、 $\Gamma_u = \Gamma_u^a + \Gamma_u^b + \Gamma_u^c$ であり、

Γ_u^a : x, y 方向の変位が与えられる境界。

Γ_u^b : x, y 方向の変位と y 方向の力も与えられる境界。

Γ_u^c : y 方向の変位と力が与えられる境界。

また、 $\Gamma_F = \Gamma_F^a + \Gamma_F^b$ で、

Γ_F^a : x, y 方向の力が与えられる境界。

Γ_F^b : x, y 方向の力とさらに x 方向の変位も与えられる境界。

さて、表1より式(1)の剛性方程式は具体的には次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} F_1^d \\ F_2^d \\ F_3^d \\ F_4^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1^d \\ d_2^d \\ d_3^d \\ d_4^d \end{Bmatrix} \quad (2)$$

よって、この式の一部より次式が導出できる。

$$\{F_k\} = [K_1]\{d_u\} + [K_2]\{d_k\} \quad (3)$$

ここで、 $\{F_k\} = \{F_2^d, F_3^d\}^T, \{d_u\} = \{d_1^d, d_2^d\}^T$,

表1 節点力、節点変位の既知、未知関係

No.	Number of (F,d) Couples	Nodal Forces	Nodal Displacements
1	N_1	F_1^d	d_1^d
2	N_2	F_2^d	d_2^d
3	N_3	F_3^d	d_3^d
4	N_4	F_4^d	d_4^d

k: known u: unknown

図1 2次元接触モデル

表2 接触モデルの領域分類

	Ω	Γ_c	Γ_u			Γ_F	
			Γ_u^a	Γ_u^b	Γ_u^c	Γ_F^a	Γ_F^b
x	2	1	4				3
y				3		2	

$$\{d_k\} = \{d_3^d, d_4^d\}^T,$$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} K_{21} & K_{22} \\ K_{31} & K_{32} \end{bmatrix}, \quad [K_2] = \begin{bmatrix} K_{23} & K_{24} \\ K_{33} & K_{34} \end{bmatrix}$$

さらに、式(3)は次のように変換できる。

$$[K_1]\{d_u\} = \{F_k\} - [K_2]\{d_k\} \quad (4)$$

上式で右辺は既知であるので、未知変数を求めることは、もし、 $(N_2 + N_3) \times (N_1 + N_2)$ の大きさのマトリックス $[K_1]$ において、

$$N_1 = N_3 \quad (5)$$

ならば、つまり与えられる力学的条件数と未知数が一致していれば、 $[K_1]^{-1}$ が求められるので容易である。一方、

$$N_1 < N_3 \quad (6)$$

ならば、式(4)の両辺に $[K_1]^{-1}$ を乗じ $[K_1]^{-1}[K_1]$ を $N_1 + N_2$ の正方マトリックスとすることによって、つまり与える力学的条件数を未知数より増大させる最小

表3 入力測定誤差と逆解析解の関係

NUMBER OF DATA	INPUT ERR AND OUTPUT FORCE							FORCE SUM (N)	ERR SQUARE SUM (N ²)	FORCE SQUARE SUM (N ²)	OUTPUT FORCE ERR SQUARE SUM (N ²)
	NODAL NUMBER (IN/OUT)	67/8	70/7	73/8	76/9	79/10	82/11				
1	INPUT ERR (%)	1.052	4.925	-1.305	1.452	-0.921	-4.992	—	54.95	—	—
	OUTPUT FORCE (N)	-1280.	-8819.	9527.	-8685.	2123.	-403.4	-2958.	—	2.187×10 ⁶	2.166×10 ⁶
5	INPUT ERR (%)	-2.054	-1.258	-1.602	-1.009	-2.708	0.3068	—	16.80	—	—
	OUTPUT FORCE (N)	-247.2	413.0	-3994.	4141.	-3922.	689.6	-2920.	—	4.920×10 ⁷	4.728×10 ⁷
10	INPUT ERR (%)	-0.085	-0.4230	1.384	-0.7782	-0.2331	-0.0189	—	2.756	—	—
	OUTPUT FORCE (N)	-532.1	1247.	-4203.	2371.	-1855.	25.3	-2945.	—	2.858×10 ⁷	2.682×10 ⁷
50	INPUT ERR (%)	-0.4315	-0.3443	-0.2308	0.7772	-0.2751	0.1096	—	1.049	—	—
	OUTPUT FORCE (N)	-160.6	-767.5	46.1	-1905.	186.4	-347.7	-2948.	—	4.404×10 ⁶	2.641×10 ⁶
100	INPUT ERR (%)	0.1487	0.2527	0.014	-0.0384	0.1251	0.2777	—	0.1804	—	—
	OUTPUT FORCE (N)	-126.4	-739.2	-496.8	-878.4	-525.2	-177.6	-2943.	—	1.888×10 ⁶	1.061×10 ⁶
EXACT SOLUTION	INPUT ERR (%)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	—	0.0	—	—
	OUTPUT FORCE (N)	-166.7	-578.6	-725.7	-725.7	-578.6	-166.7	-2942.0	—	1.778×10 ⁶	0.

3. 2 解析例 図1に示す長方形板に、円形の物体が接触している系を考える。この問題は、Hertz⁽³⁾によって解かれており接触応力場が半円状のものとなることがわかっている。さて、これに対し、図2の様な有限要素モデルを作成し、節点67、～、82の力に適当な誤差を有する値を代入し、接触点6、～、11の力の分布を求めることを考える。

まず、設定した接触圧力分布のもとでFEM順解析を行い節点67～82の力の値を決定した。これを厳密解とし、それに誤差を含ませた入力測定値は次のようにして作った。すなわち、厳密解を中心にして任意の巾のバラツキを有するデータを計算機による一様乱数を用いて所定の個数作り、これらを入力測定値とした。

表3はバラツキの範囲を5%としてデータ数群nを種々変化した場合の入力値の誤差(%)と得られた未知力を示したものである。ここで、入力測定値の誤差や逆解析解の誤差を定量的に表すのに、それらがベクトル量であるため、その大きさを自乗して表した。この表を見ると、n=1～10程度では殆ど信頼できる値が得られないが、n=50、100となるとこの順で解の精度がよくなっており本法の有効性が確かめられる。また入力誤差の自乗和が小さいほど逆解析解の自乗和も小さくなることが分かる。

4. 最小自乗法による方法

4. 1 理論 最小自乗法を用いた逆解析は、式(10)に於て、過剰な測定点を与えて、評価関数を考え、これを最小にするような解を求めるものである。具体的には、評価関数として次式Mを用いる。

$$M(\{d_u\}) = (\{F_k'\} - [K_1]\{d_u\})^T (\{F_k'\} - [K_1]\{d_u\}) \quad (15)$$

このMを最小にする $\{d_u\}$ を解と考えることにすると、式(15)を $\{d_u\}$ で微分して0と置くことにより、

$$\{d_u\} = ([K_1]^T [K_1])^{-1} [K_1]^T \{F_k'\} \quad (17)$$

式(17)で $[K_1]^T [K_1]$ は常に正方行列となり、これが正則な場合には逆行列が計算できて $\{d_u\}$ を求めることが出来る。

4. 2 解析例 解析例は、前章で扱った図2の系と同様である。ただ測定点数としては、接触点6個に対し図3に示すような8、12、16個の各場合を考えた。そして、各々の点での値が厳密解より±5%で一様にバラツクものを入力測定値として、逆解析解を求めてみた。それらの結果は6-6モデルのものも含めて表4に示した。

接触点の未知反力誤差自乗和を解の精度と直接的に対応させるならば、6-6モデルより6-8モデル、6-12モデル、6-16モデルの順で解の精度が向上していることが分かる。

しかし、それでも得られる解は十分なものとは言えない。そこで本手法に前章での方法、つまり、人力値平均化法を併用させることを考えてみた。表5は6-16モデルに対し、その測定データ群を1~10に変化させた場合のそれらの結果を示すもので、表4の結果はもちろん、前章の表3の $n=10$ の結果と比較することによりその効果が分かる。

5. 接触領域を決定する手法について

前章までの方法は、正確な接触領域が分かっている場合の接触応力分布のみを求める方法であった。しかし、一般の接触問題では接触領域も未知である。この様な接触領域の同定も含めて行う手法については、既に著者らが提案している⁽¹⁾。が、それらは、誤差を含まない人力測定値に対して考えられたものである。そこで、ここでは人力測定値に誤差がはいってきた場合のその手法の適用可能性を調べることにする。

まず、すでに提案した接触領域を評価する手法を説明する。その手法は、次の評価関数 R を用いる。

$$R = \sum_{r=1}^{N_1} (F_{ur})^2 \quad (16)$$

ここで、 r は接触点での節点を表し、 F_{ur} はその節点の未知反力である。

接触領域同定の手法は、接触領域を適当に仮定し、

(a)
6-8 MODEL

(b)
6-12 MODEL

(c)
6-16 MODEL

図3 最小自乗法に使用したモデル

その状態に対応した R を計算。そして、この R を最小にする接触領域を正しい接触領域とするものである。人力測定値として誤差を与えない場合、 R は正解の接触領域で最小値を取ることが知られている。

そこで、ここでは数値解析例を通して以上述べた方法が有効かどうかを吟味してみたい。解析例は、前章までと同様なものとし接触領域 $L_c = 35 \sim 65 \text{ mm}$

表4 人力誤差と逆解析解の関係（最小自乗法）

MODEL TYPE	INVERS ANALYSIS VALUE							FORCE SUM (N)	FORCE SQUARE SUM(N ²)	OUTPUT FORCE ERR SQUARE SUM (N ²)
	NODAL NUMBER	6	7	8	9	10	11			
6-6	OUTPUT FORCE (N)	-1280.	-6819.	9527.	-8665.	2123.	-403.4	-2956.	2.187×10^8	2.166×10^8
6-8	OUTPUT FORCE (N)	-985.0	845.6	376.9	-5780.	4586.	-2024.	-2981.	6.037×10^7	5.959×10^7
6-12	OUTPUT FORCE (N)	-932.5	1646.	-3767.	1753.	-1613.	-13.8	-2953.	5.287×10^7	5.094×10^7
6-16	OUTPUT FORCE (N)	99.9	-1965.	2627.	-5354.	2852.	-1222.	-2962.	4.907×10^7	4.755×10^7

表5 6-16モデルにおける人力測定誤差と逆解析解の関係

NUMBER OF DATA	INVERS ANALYSIS VALUE							FORCE SUM (N)	FORCE SQUARE SUM(N ²)	OUTPUT FORCE ERR SQUARE SUM (N ²)
	NODAL NUMBER	6	7	8	9	10	11			
1	OUTPUT FORCE (N)	99.9	-1966.	2627.4	-5354.	2852.	-1193.	-2962.	4.907×10^7	4.749×10^7
5	OUTPUT FORCE (N)	20.3	-1173.	74.3	-1160.	-638.4	-45.8	-2922.	3.137×10^6	1.235×10^6
10	OUTPUT FORCE (N)	-136.9	-738.8	-583.4	-658.2	-669.2	-153.6	-2940.	1.810×10^6	5.975×10^4
EXACT	OUTPUT FORCE (N)	-166.7	-578.6	-725.7	-725.7	-578.6	-166.7	-2942.	1.778×10^6	0.

図4 接触領域とRの関係

図5 6-16モデルの接触領域とRの関係

と5mm間隔に変えて7通りを仮定する。つまり接触領域の長さ L_c と板の寸法 L_a との比 L_c/L_a は0.233~0.433となっている。

ここで、正解の接触領域は、 $L_c = 50$ mmのとき、すなわち、 $L_c/L_a = 0.333$ であるように設定した。これら7つのモデルに対して逆解析解を求める。そして、その未知反力の自乗和 R を計算し図示したものが図4である。この計算では入力測定値平均化法を利用しており、入力測定回数として n は1~100まで変化させた。

この方法にさらに入力測定点の点数を6個のものから16個に変化させ最小自乗法を併用したものの結果も図5に示した。

図4を見ると、測定回数の少ないものは、正解の接触領域 $L_c = 50$ mmで極小値を持たないが、回数を増やすに連れて正解で最小値を持つようになっている。また図5より、測定点の点数を16個としたものは、6個の場合に比べ少ない回数で正解の接触領域が判定できるようである。

6. 結 言

以上の結果より、次のようなことが言えると考えら

れる。

(1) 入力測定値平均化法では、50個程度の測定値、つまり平均誤差を0.1%程度以下にすればかなり正確な接触応力情報を得ることが出来る。

(2) 最小自乗法による方法では測定点を、なるべく多く取ることが望まれる。その効果は、測定値平均化法を併用すれば更に向上する。

(3) 未知反力自乗和を指標とする接触領域同定法は、入力誤差を伴う問題に対してもほぼ有効である。

また、ここで提案された手法を現実のものとするには、多数回の測定とその処理を可能とする測定法が必要であり、今後本問題に対するマイクロコンピュータと連動した自動計測システムの確立が望まれるところである。

参考文献

- (1) 尾田・品田, 機論, 53-492, A (昭62), 1614.
- (2) 尾田・品田, 機講論, No.870-12 (昭62-11), 52.
- (3) Hertz, H., J. Mathematik von Crelle 92, (1882), 156.

討 論

〔質問〕 中 桐 滋〔東京大学生産技術研究所〕

逆問題解析の論文として興味深く拝見した。以下の二点につき質問する（入力測定値平均化法に関して）。

（１） 数値シミュレーションではなく、実測の（誤差を含む）力から接触部状態を推定する際、力の誤差が内部状態を顕著にかえるものとお考えか。力に測定誤差があるとしても 100 回も測定を繰返さないとその平均値すら求められないとお考えか。

（２） 既知で確定の $[K]$, $\{F\}$ に対して $\{d^*\} = [K]^{-1}\{F\}$ を求め、この $\{d^*\}$ と一成分でもごくわずかに異なる $\{\bar{d}\}$ を作成し、 $[K]\{\bar{d}\}$ を計算するとその結果は $\{F\}$ と非常に異なることがある。これは有限要素法の離散化に起因する誤差ではないかと質問者は考えている。貴研究の表 3 の OUTPUT FORCE は厳密解とかけ離れ、 $n=50, 100$ としても対称性すら見られない。解の精度がよくなっていると記述されているが、質問者には解の精度が十分とは思えない。その原因は貴計算には上記の誤差が混入しているからではないかと考える。

〔回答〕 （１） サンプナンの原理によれば、物体の非常に小さい領域に負荷される分布力による物体の応力やひずみの分布は、その負荷領域から十分離れた場所では、負荷の分布形状にほとんど影響を受けず、その剛体合力と偶力のみが重要となる。

この場合の負荷される小領域とは接触領域であり、十分離れた場所とは、測定が行われる点である。したがって、測定点の情報より接触場の圧力分布を規定することは極めて難しいことになる。よって、この意味において測定点の力の誤差が物体内部情報（応力、変位など）を顕著に変えるものと考えられる。また、上記の理由により、測定値に対しては非常に精度が要求され、本文中にあるような 5% 程度の一様な誤差を含む測定値を使用する場合には、100 回程度の繰返しは必要であると考える。

（２） 質問の内容は入力測定値の誤差を例えば 0.1% 程度にしたにもかかわらず、解の精度が思うほど良くなくこれは有限要素法の離散化誤差が原因であ

付図 1

ろうというふうに解釈する。

（１）の回答でも述べたとおり、負荷点から離れた部分の節点量は負荷点の分布の影響は受けにくく、よって、 $\{d\}$ をはなれた部分の節点についてわずかに変更させれば、当然負荷点での $\{F\}$ は非常に変化する。これは特に有限要素法の離散化によるものではなく逆解析特有の性質と著者らは考えている。

〔質問〕 久 保 司 郎〔大阪大学工学部〕

貴論文では、接触領域を求めるための評価関数として節点力の二乗和 (R) の最小を採用しておられる。しかし、前報⁽¹⁾に対する討論でも指摘したように、この規準によれば接触領域を大きめに、応力分布を平坦に推定することが考えられる。図 4 および図 5 において、 n が小さいときには R が極小値をもたず L_c とともに減少を続けたり、 R が正解より大きな L_c 値で極小となっていることは、このことと関連しているように思われる。小さな n に対しても接触領域を正しく評価するような改善方法があればご教示願いたい。

〔回答〕 測定値に誤差のない場合には、御指摘のような傾向、つまり接触域が正解の近傍でやや平坦な圧力分布を解とする場合がみられる。

しかし、それはごく近傍のことで、実際上問題となることはないと考え。ただ、測定値に誤差のあるのが普通で、この場合は接触域の大きいほうから正解を探すようにすればこの評価関数でも十分に有効になる。それは、真の解より大きめに決めた接触幅 L_c で R 最小の解を求めると付図 1 のような圧力分布として通常求まり L_c が正解に近いものとなるからである。