き裂をもつ半だ円切欠を有する 半無限板の引張りにおける応力拡大係数*

陳 玳 珩^{*1}, 西谷 弘 信^{*2}, 森 和 也^{*3}

Stress Intensity Factors of a Semi-Infinite Plate having a Semi-Elliptical Notch with a Crack under Tension

Dai-heng CHEN, Hironobu NISITANI, and Kazuya MORI

The problems of the tension of a semi-infinite plate having a semi-elliptical notch with a crack are analyzed by the body force doublet method. Quite accurate values of the stress intensity factor for a crack of arbitrary size can be obtained by using the stress field due to a pair of point forces (doublet) in an infinite plate with an elliptical hole. Furthermore, the error due to the use of equivalent crack length, which is the sum of notch depth and crack length, is discussed.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Edge Crack, Semi-Infinite Plate, Semi-Elliptical Notch, Body Force Doublet Method, Tension

1. 緒 言

疲労き裂は一般に、応力集中部より発生し、しばしば材料や構造物の破壊の原因となる。したがって、き裂をもつ切欠の応力拡大係数 K_I の解析は重要であり、これまでに多くの研究がなされてきた。

これまでの、き裂をもつ切欠を有する半無限板の解析に関して、西谷⁽¹⁾、西谷・尾田⁽²⁾は体積力法による解析を行って、き裂があまり短くないかぎり精度の高い結果を得ているが、それらは形状パラメータに対して連続的に得られているわけではない。

そこで、本論文ではこれらの点を考慮して、き裂をもつ半だ円切欠を有する半無限板(図1)の K_I を体積力対法⁽³⁾を用いて求めた。また、その結果に基づいて等価き裂(長さが切欠深さ+き裂長さのき裂)を用いることによる誤差を評価した。本解析では、基本解として、だ円孔を有する無限板に作用する集中力対の解⁽⁴⁾を用い、集中力対の応力場の対称性を利用することによって未知数の減少および精度の向上を図った。

2. 解 析 理 論

2.1 基本解 ここでは基本解として、だ円孔を有する無限板の一点に大きさ T の集中力対が作用するときの解(図2)を採用する。これは集中力の解⁽⁵⁾から導かれる。

だ円孔の両軸の方向に座標軸 x, y をとり、物理面 $z (=x+iy)$ を次の変換によって ζ 面に写像する。

$$z = Z(\zeta) = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) \dots\dots\dots (1)$$

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - m} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$m = a^2 - b^2 \dots\dots\dots (3)$$

図1 き裂をもつ半だ円切欠を有する半無限板

* 昭和63年11月17日 第954回講演会において講演、原稿受付 昭和63年5月16日。

*1 正員、江南大学(中国江蘇省無錫市五愛路215)。

*2 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

*3 正員、久留米工業高等専門学校(〒830 久留米市小森野町1232)。

図 2 基本解

これによって物理面の円孔およびその外部領域は、 ζ 面の半径 $R = a + b$ の円およびその外部領域に変換される。

ここで、集中力対の大きさ T を次式で定義するとき、

$$T = \lim_{\delta \rightarrow 0} (P\delta) \quad (4)$$

$T=1$ の集中力対が点 $z_0 (=x_0 + iy_0)$ に作用する場合、弾性体内の点 $A(x_A, y_A)$ から、点 $B(x_B, y_B)$ に至る任意の経路に沿って、右の部分が左の部分に及ぼす

(a)

(b)

図 3 X および Y 方向体積力対

応力の成分 P_x, P_y の複素関数は、次のように与えられている⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} (P_y + iP_x)_{r=1} = & \frac{1}{4\pi} \left[\frac{-e^{-2ia}}{(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)(1 - m/\bar{\zeta}_0^2)} - \frac{e^{-2ia}R^2/\bar{\zeta}_0^2}{(\zeta - R^2/\bar{\zeta}_0)(1 - m/\zeta_0^2)} + \frac{2}{(1 - m/\zeta_0^2)(\zeta - \bar{\zeta}_0)} \right. \\ & + \frac{1}{(1 - m/\zeta_0^2)} \left[\frac{2R^2/\bar{\zeta}_0^2}{\bar{\zeta} - R^2/\zeta_0} + \frac{e^{2ia}R^2(m/R^2 - R^2/\zeta_0^2)}{(\zeta_0^2 - m)(\bar{\zeta} - R^2/\zeta_0)} \right. \\ & - \frac{e^{2ia}R^2\{(R^2/\zeta_0 + m\zeta_0/R^2) - (\bar{\zeta}_0 + m/\bar{\zeta}_0)\}\{2\zeta_0\bar{\zeta} - R^2(1 + m/\zeta_0^2)\}}{(\zeta_0^2 - m)^2(\bar{\zeta} - R^2/\zeta_0)^2} \\ & - \frac{e^{2ia}(R^2/\zeta_0^2 - m/R^2)}{(1 - m/\zeta_0^2)(\zeta - \bar{\zeta}_0)} + \frac{\{(R^2/\zeta + m\zeta/R^2) - (\bar{\zeta} + m/\bar{\zeta})\}}{(1 - m/\zeta^2)} \left[-\frac{e^{2ia}}{(\zeta - \bar{\zeta}_0)^2(1 - m/\zeta_0^2)} \right. \\ & + \frac{1}{(1 - m/\bar{\zeta}_0^2)} \left\{ \frac{2R^2/\bar{\zeta}_0^2}{(\zeta - R^2/\bar{\zeta}_0)^2} + \frac{e^{-2ia}R^2(-R^2/\bar{\zeta}_0^2 + m/R^2)}{(\zeta_0^2 - m)(\zeta - R^2/\bar{\zeta}_0)^2} \right. \\ & + \frac{e^{-2ia}R^2\{(R^2/\bar{\zeta}_0 + m\bar{\zeta}_0/R^2) - (\zeta_0 + m/\zeta_0)\}\{2R^2m/\bar{\zeta}_0^2 - 2\bar{\zeta}_0\zeta\}}{(\zeta_0^2 - m)^2(\zeta - R^2/\bar{\zeta}_0)^3} \left. \right\} \\ & + \frac{e^{2ia}\{(\bar{\zeta}_0 + m/\bar{\zeta}_0) - (R^2/\zeta_0 + m\zeta_0/R^2)\}\{2m(\zeta - \bar{\zeta}_0)/\zeta_0^3 - (1 - m/\zeta_0^2)\}}{(1 - m/\zeta_0^2)^3(\zeta - \bar{\zeta}_0)^2} \left. \right]_A^B \quad (5) \end{aligned}$$

ここで、

$$R = a + b \quad (6)$$

また、 ζ_0 は z_0 の ζ 面上の像で次式で与えられる。

$$\zeta_0 = z_0 + \sqrt{z_0^2 - m} \quad (7)$$

ここで取扱う問題では、結果はポアソン比 ν に無関係なので、 $\nu=0$ としている。

実際に分布させる体積力対^{***}としては、 x 方向体積力対 [図 3(a)] および y 方向体積力対 [図 3(b)] の 2 種類を用いる。 x および y 方向体積力対が作用する場合の複素関数は式 (5) に $\alpha=0, \alpha=\pi/2$ を代入して求められる。

2.2 体積力対の密度と応力拡大係数 本解析においては、円孔を有する無限板に作用する集中力対の解を基本解とし、図 4 に示すようにき裂となるべき直線 AA' および BB' に y 方向体積力対を分布させ、半無限板の自由縁となるべき直線 CC' および DD' に x 方向体積力対を分布させる。このように直線 BB' にも体積力対を分布させることにより、 x 軸および y 軸に対して対称となり、せん断応力に関する境界条件を自動的に満足し、精度の向上および未知数の減少が可能となる。

実際に数値を求める際には、直線 AA' および BB' の微小要素 ds に作用させる体積力対の大きさを dT_c 、直線 CC' および DD' の微小要素 ds に作用させる体積力対の大きさを dT_s とするとき、 dT_c, dT_s を次のように表し、

***連続的に分布した集中力対をここでは体積力対と呼ぶ

重み関数 f_c, f_b を未知数として取扱う。

$$dT_c = 4\sqrt{l^2 - s^2} f_c ds \quad (8)$$

$$dT_b = 4\sqrt{l^2 - s^2} f_b ds \quad (9)$$

ここで, s は, それぞれの体積力対を分布させる端点である, A, B, C, D 点から体積力対の作用点までの距離である。重み関数の決定にあたっては, き裂および半無限板の自由縁となるべき直線を分割し, 各区内で直線的に変化する折れ線関数を用い, 各区内での合力条件⁽⁶⁾より求めた, 応力拡大係数 K_I は次式より求められる。

$$K_I = f_{ct} \sqrt{\pi l} \quad (10)$$

ここで, f_{ct} はき裂先端における重み関数の値である。

3. 計算結果

き裂をもつ半円切欠を有する半無限板の引張りにおける応力拡大係数 K_I を求めた。

き裂となるべき直線および直線縁となるべき直線の分割数 n_1, n_2 のそれぞれ 2 組の分割数に対する値を求め, 外そう⁽⁷⁾によって厳密解を推定した。ここで, n_1, n_2 の値は外そう値の誤差が小数点以下 4 けたまで 1 以内となるように選んだ。

表 1, 2 と図 5~7 は, K_I を次式で示される無次元量 F_I で表したものである。

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma_\infty \sqrt{\pi(a+l)}} \quad (11)$$

$F_I = 1.1215$ は, K_I が等価き裂長さ, すなわち切欠深さとき裂長さの和, を用いて計算できることを意味している。

また, 表 3 と図 8 は, K_I を次式で与えられる無次元量 F_I で表したものである。

図 4 体積力対を分布させる仮想境界

$$F_I = \frac{K_I}{1.1215 K_{Ic} \sigma_\infty \sqrt{\pi l}} \quad (12)$$

ここで, K_{Ic} は, 表 4 に示す半円切欠を有する半無限板の応力集中係数である。

表 1 と図 5 は, F_I と l/ρ の関係を示したものである。図 5 より, $l/\rho > 2$ であれば, ほぼ等価き裂とみな

図 5 F_I と l/ρ の関係

図 6 F_I と $l/\sqrt{pa}$ の関係

表 1 き裂をもつ半だ円切欠の F_I [$F_I = K_I / \sigma_\infty \sqrt{\pi(a+l)}$]

$\frac{g}{\rho}$	b/a												
	0	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	4.0	∞	
0.05	0.5143	0.5145	0.5157	0.5193	0.5260	0.5408	0.5570	0.5916	0.6800	0.8332	1.0118	1.1215	
0.1	0.6707	0.6721	0.6736	0.6782	0.6865	0.7048	0.7245	0.7656	0.8632	1.0012	1.1013	1.1215	
0.2	0.8307	0.8324	0.8340	0.8394	0.8488	0.8693	0.8906	0.9325	1.0181	1.0987	1.1215	1.1215	
0.3	0.9161	0.9151	0.9168	0.9223	0.9320	0.9523	0.9728	1.0109	1.0771	1.1180	1.1216	1.1215	
0.4	0.9632	0.9650	0.9668	0.9722	0.9817	1.0012	1.0202	1.0534	1.1023	1.1216	1.1215	1.1215	
0.5	0.9962	0.9979	0.9997	1.0050	1.0142	1.0326	1.0499	1.0783	1.1136	1.1219	1.1215	1.1215	
0.8	1.0490	1.0506	1.0522	1.0571	1.0652	1.0802	1.0928	1.1098	1.1218	1.1214	1.1215	1.1215	
1.0	1.0669	1.0684	1.0699	1.0745	1.0818	1.0949	1.1050	1.1169	1.1221	1.1214	1.1215	1.1215	
1.5	1.0898	1.0912	1.0926	1.0964	1.1023	1.1116	1.1174	1.1219	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	
2.0	1.1003	1.1017	1.1029	1.1062	1.1110	1.1177	1.1210	1.1222	1.1213	1.1215	1.1215	1.1215	
3.0	1.1097	1.1109	1.1119	1.1145	1.1179	1.1214	1.1222	1.1216	1.1214	1.1215	1.1215	1.1215	
4.0	1.1136	1.1148	1.1157	1.1178	1.1202	1.1221	1.1219	1.1213	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	
5.0	1.1157	1.1169	1.1176	1.1194	1.1212	1.1220	1.1216	1.1213	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	
7.0	1.1176	1.1189	1.1195	1.1208	1.1218	1.1217	1.1213	1.1213	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	
10.0	1.1187	1.1202	1.1206	1.1214	1.1218	1.1213	1.1212	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	

 表 2 き裂をもつ半だ円切欠の F_I [$F_I = K_I / \sigma_\infty \sqrt{\pi(a+l)}$]

$\frac{g}{a}$	b/a											
	0	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	4.0	∞
0.001	1.1215	1.1202	1.1085	0.9722	0.6865	0.4006	0.2825	0.1836	0.1084	0.0714	0.0533	0.0354
0.01	1.1215	1.1215	1.1215	1.1178	1.0818	0.9168	0.7507	0.5393	0.3350	0.2237	0.1675	0.1116
0.02	1.1215	1.1214	1.1215	1.1211	1.1110	1.0326	0.9135	0.7085	0.4620	0.3131	0.2354	0.1574
0.05	1.1215	1.1214	1.1214	1.1216	1.1212	1.1055	1.0617	0.9325	0.6800	0.4801	0.3652	0.2447
0.1	1.1215	1.1213	1.1213	1.1214	1.1218	1.1203	1.1093	1.0534	0.8632	0.6463	0.5010	0.3381
0.2	1.1215	1.1213	1.1213	1.1213	1.1214	1.1220	1.1216	1.1098	1.0181	0.8332	0.6689	0.4579
0.3	1.1215	1.1214	1.1213	1.1213	1.1212	1.1216	1.1221	1.1201	1.0771	0.9373	0.7763	0.5388
0.4	1.1215	1.1214	1.1214	1.1213	1.1212	1.1213	1.1218	1.1221	1.1023	1.0012	0.8523	0.5995
0.5	1.1215	1.1214	1.1214	1.1214	1.1212	1.1212	1.1215	1.1222	1.1136	1.0421	0.9088	0.6475
0.6	1.1215	1.1214	1.1214	1.1214	1.1213	1.1212	1.1213	1.1219	1.1187	1.0689	0.9518	0.6868
0.8	1.1215	1.1215	1.1214	1.1214	1.1214	1.1212	1.1212	1.1215	1.1218	1.0987	1.0118	0.7477
1.0	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1214	1.1213	1.1213	1.1213	1.1221	1.1120	1.0497	0.7930
2.0	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1214	1.1213	1.1219	1.1132	0.9157
3.0	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1214	1.1215	1.1212	0.9713
5.0	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1215	1.1214	1.1216	1.0238

 図 7 F_I と切欠の鋭さ ρ との関係

表 3 き裂をもつ半だ円切欠の F_I ($F_I = K_I / 1.1215 K_t \sigma_\infty \sqrt{\pi l}$ **2)

$\frac{l}{\rho}$	b/a											
	0	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	4.0	∞
0.05	0.9128	0.9127	0.9126	0.9124	0.9121	0.9114	0.9107	0.9093	0.9064	0.9026	0.9002	1.0000
0.1	0.8431	0.8430	0.8429	0.8426	0.8420	0.8408	0.8396	0.8373	0.8327	0.8285	0.8327	1.0000
0.2	0.7384	0.7382	0.7380	0.7375	0.7366	0.7347	0.7330	0.7299	0.7254	0.7289	0.7621	1.0000
0.3	0.6649	0.6627	0.6624	0.6617	0.6606	0.6585	0.6566	0.6537	0.6522	0.6695	0.7313	1.0000
0.4	0.6054	0.6052	0.6049	0.6042	0.6030	0.6007	0.5989	0.5967	0.5999	0.6324	0.7153	1.0000
0.5	0.5601	0.5598	0.5595	0.5587	0.5574	0.5553	0.5537	0.5525	0.5611	0.6077	0.7055	1.0000
0.6	0.5231	0.5228	0.5225	0.5217	0.5204	0.5184	0.5171	0.5172	0.5314	0.5905	0.6990	1.0000
0.8	0.4662	0.4659	0.4656	0.4648	0.4635	0.4619	0.4615	0.4643	0.4895	0.5683	0.6907	1.0000
1.0	0.4241	0.4238	0.4235	0.4226	0.4215	0.4204	0.4209	0.4266	0.4616	0.5545	0.6857	1.0000

**2 K_t については表 4 参照 図 8 F_I と l/ρ の関係

してよい (誤差 2%以下) ことがわかる。

表 2 は, F_I と l/a の関係を示している。

図 6 において, 横軸は Smith らによるパラメータ⁽⁸⁾である。図 6 からわかるように, $l/\sqrt{\rho a} > 0.5$ のとき, 等価き裂とみなすときの誤差は 1%以内である⁽⁹⁾。

図 7 は, き裂長さを 0.1 mm および 0.2 mm でそれぞれ一定とし, 各切欠深さのもとで切欠の鋭さを変えたときの F_I の変化を示したものである。これより, $\rho < 0.5$ mm の切欠では, 長さ 0.2 mm のき裂が入った状態の F_I の値は ρ にほぼ無関係であるといえる。

表 3 と図 8 は, F_I と l/ρ の関係を示している。図 8 からわかるように, ρ が一定で $b/a < 2$ であれば, 切欠底に同一長さの l のき裂が入ったときの F_I の値は, l が ρ に比べて小さい範囲で互いにほぼ等しい。このことは, $K_t \sigma_\infty$ (き裂がないときの最大応力) と ρ がそれぞれ互いに等しいいくつかの切欠があるとき, それら

表 4 半だ円切欠の応力集中係数 K_t

b/a	K_t
0.01	224.81
0.02	112.66
0.05	45.396
0.1	23.000
0.2	11.842
0.3	8.1476
0.5	5.2204
1.0	3.0653
2.0	2.0160
4.0	1.5033

に ρ に比べて小さい同一の長さのき裂が入れば, K_t の値はそれらのすべての切欠において互いにほぼ等しいことを意味している。

4. 結 言

だ円孔を有する無限板に作用する集中力対の解を用いることによって, き裂をもつだ円切欠を有する半無限板の応力拡大係数の高精度の値を幾何学的条件を系統的に変えて求めた。また, この問題を等価き裂とみなすことによる誤差を評価し, $l/\rho > 2$ であれば, ほぼ等価き裂とみなせることを示した。

文 献

- (1) Nisitani, H., ICF 3, *Zusammenstellung der Tagungsberichte*, Teil II, (1973), I-513.
- (2) 西谷・尾田, 機論, 46-407, A (昭 55), 745.
- (3) 西谷・森・野口, 機論, 52-474, A (昭 61), 539.
- (4) 石田・陳・西谷, 機論, 50-451, A (昭 59), 330.
- (5) 村上, 機論, 43-370 (昭 52), 2022.
- (6) Isida, M., *Int. J. Fract. Mech.*, 7-3 (1971), 301.
- (7) 西谷, 機誌, 70-580 (昭 42), 627.
- (8) Smith, R. A. and Miller, K. J., *Int. J. Mech. Sci.*, 19 (1977), 11.
- (9) 西谷, 疲労強度学, 総合材料強度学講座 6, (昭 60), 41, オーム社.

討 論

〔質問〕 角 洋一〔横浜国立大学工学部〕

切欠底のごく短いき裂の応力拡大係数については、本論文と同様半だ円切欠きの場合についてその解の漸近挙動が文献(付1)で検討されており、数値計算との比較、等価き裂長の検討、応力拡大係数の近似式の提案が行われている。さらに、文献(付2)では、先端に丸みをもつV字形切欠底のき裂についても切欠底の応力値と応力こう配をもとに同様の検討が行われているので参考にされたい。

〔回答〕 本論文の目的は、き裂を持つ半だ円切欠を有する半無限板の引張りにおける正確な応力拡大係数の値を求めることにある。そのために、本論文で

は、応力拡大係数の近似値との比較は行わなかった。しかし、付図1の問題のき裂が短い場合に対するYamamotoらの近似式(付1)の $a/W \rightarrow 0$ のときの精度を知ることは意味があると思われるので、本解析結果とその近似式との比較を付表1に示す。この表よりYamamotoらの近似式は、 $a/W \rightarrow 0$ において、 $b/a \geq 0.5$ であれば誤差がほぼ5%以下であることがわかる。

付表1 き裂を持つ半だ円切欠を有する半無限板の引張りにおける F_I の本解析結果とYamamotoらの近似式(付1)との比較($F_I = K_I / 1.1215 K_{I0} \sigma_\infty \sqrt{\pi l}$)

z/a	b/a	0.1	0.3	0.5	1.0	2.0	4.0
0.05		0.9121 (0.948)	0.9107 (0.935)	0.9093 (0.932)	0.9064 (0.931)	0.9026 (0.924)	0.9002 (0.908)
0.1		0.8420 (0.888)	0.8396 (0.876)	0.8373 (0.873)	0.8327 (0.865)	0.8285 (0.843)	0.8327 (0.828)
0.2		0.7366 (0.774)	0.7330 (0.771)	0.7299 (0.767)	0.7254 (0.745)	0.7289 (0.721)	0.7621 -
0.3		0.6606 (0.668)	0.6566 (0.680)	0.6537 (0.678)	0.6522 (0.650)	0.6695 -	0.7313 -
0.4		0.6030 (0.569)	0.5989 (0.603)	0.5967 (0.605)	0.5999 (0.588)	0.6324 -	0.7153 -
0.5		0.5574 (0.477)	0.5537 (0.538)	0.5525 (0.546)	0.5611 (0.565)	0.6077 -	0.7055 -
0.6		0.5204 (0.393)	0.5171 (0.485)	0.5172 (0.500)	0.5314 -	0.5905 -	0.6990 -
0.8		0.4635 (0.244)	0.4615 (0.409)	0.4643 (0.445)	0.4895 -	0.5683 -	0.6907 -
1.0		0.4215 (0.120)	0.4209 (0.364)	0.4266 (0.429)	0.4616 -	0.5545 -	0.6857 -

( ): Yamamoto et al.

(付1) Yamamoto, Y., *Int. J. Fract.*, 10(1974), 593-595.

(付2) 山本・角・栗生, 造船論, 137(1975), 291-296.

付図 1