Fe-C-Cu-Ni 焼結歯車の疲労強度*

岡崎 正和^{*1}, 久曾神 煌^{*1}
佐藤 利晴^{*2}, 角 南 英八郎^{*3}

Fatigue Strength of A Fe-C-Cu-Ni Sintered Gear

Masakazu OKAZAKI, Akira KYUSOJIN,
Toshiharu SATOH and Eihachiro SUNAMI

Effects of primary sintering and carburizing treatments on the fatigue strength of a Fe-C-Cu-Ni sintered gear were investigated. It was found that carburizing was the most effective treatment for the improvement of fatigue strength of the sintered gear. The notch effect on the fatigue strength was also investigated by means of a sintered specimen with various stress concentration factors, α_e . The fatigue strength of notched specimen was generally insensitive to α_e . Based on the results thus obtained, the prediction method of fatigue strength of the sintered gear was discussed by applying FEM analysis. The predicted fatigue strength comparatively agreed with the experimental result.

Key Words: Fe-C-Cu-Ni Sintered Gear, Fatigue Strength, Carburizing, Notch Effect, Prediction of Fatigue Limit

1. 緒 言

最近の焼結機械部品の需要は年々増加し、なかでも焼結歯車は従来の溶製材歯車に代わって多方面に使用されるようになってきた。このような焼結歯車の設計・信頼性向上のためには、その疲労強度に関する情報が不可欠となっているが、これらに関する研究はきわめて少ないのが現状である^{(1)~(5)}。

本研究では、ギヤポンプ用歯車として使用されている Fe-C-Cu-Ni 系焼結歯車を対象として、その疲労強度に及ぼす浸炭処理、仮焼結の影響について調べるとともに、それらの疲労破壊形態についても検討した。また非浸炭処理材を対象にして、種々の弾性応力集中係数を有する切欠焼結試験片を用いて焼結材の切欠強度を調べ、これより得られる情報と有限要素法による応力解析を組合せることにより、焼結歯車の疲労強度推定も試みた。

2. 実験方法

2.1 焼結歯車の疲労試験 用いた焼結歯車は Fe-C-Cu-Ni 系焼結歯車であり、本研究では主として銅の含有量の異なる 2 種類の焼結歯車（それぞれ、A 材、B 材と略記する）を用いた。これらの焼結歯車の化学成分、製造工程を表 1, 2 に示す。表 2 に示した焼結歯車においては、焼結材の化学成分の相違、仮焼結の有無、浸炭処理（処理条件は表 2 参照）の有無の相違があり、これらの歯車の疲労強度を比較することにより、疲労強度に及ぼす各因子の影響を検討した。なお、本焼結のみで製作した A, B 両材の歯車の密度は 6.8 g/cm^3 、焼結歯車中の平均空孔直径は約 $30 \mu\text{m}$ であり、一方、仮焼結と本焼結により製作した A, B 両材の歯車の密度は 7.2 g/cm^3 、平均空孔直径は約 $25 \mu\text{m}$ となっており、焼結歯車の疲労強度に及ぼす密度の影響は仮焼結の影響に含まれたものとなっている。また、金属組織は、非浸炭処理の A, B 両材とも、フェライトとパーライトの混合組織であり、ビッカース硬さは約 250 である。また浸炭処理した A, B 両材の歯車表面近傍には、仮焼結の有無によらず、ビッカース硬さ約 600、深さ約 1 mm 程度の硬化層が形成されている。本論文では以後、本焼結のみで製作したものには“1”、仮

* 昭和 63 年 11 月 18 日 第 954 回講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 6 月 13 日。

^{*1} 正員、長岡技術科学大学工学部 (〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)。

^{*2} 学生員、長岡技術科学大学大学院。

^{*3} 日本鋼管(株)新潟製造所 (〒950 新潟市上王瀬町 2-3)。

焼結と本焼結により製作したものには“2”の数字を付すことにより、また浸炭処理のあるものについては、“C”の記号を付すことによりそれぞれの歯車を表すことにする。たとえば、A-1-Cは、本焼結のみにより製作したA材に浸炭処理を施した歯車を表している。以上の工程によりでき上がった焼結歯車の諸元を表3に、その概観を図1に示す。

歯車の1歯のみに繰返し荷重を与えることができるように図2に示すジグを製作した。このジグは、疲労試験機に取付けた状態で常に一定の位置で歯面に垂直

な力が加わるよう、取付軸の中心線が歯車基礎円に接するように設計されている。歯車の疲労試験には、最大容量10tの電気油圧サーボ式試験機を使用し、荷重制御により試験を行った。疲労試験の際の荷重比は0.05の片振りとし、繰返し速度は10 Hzとした。

2.2 焼結試験片の疲労試験 表2に示したA-2、B-2材を対象として、図3に示すような試験片を採取し、2.1節と同様の試験機を用いて、片振り引張疲労試験、および図4に示すような四点曲げ片振疲労試験を行った。なお、焼結材の切欠強度を調べるため、試験片

表1 焼結材化学成分 (wt.%)

	Cu	Ni	C	Fe
A	1.5	4.0	0.6	bal.
B	0.3	3.0	0.5	bal.

Process Specimen	Compacting	Primary sintering	Coining	Final sintering	Sizing	Machining of bore	Carburizing*
A-2	○	○	○	○	○	○	—
A-1-C	○	—	○	○	○	○	○
A-2-C	○	○	○	○	○	○	○
B-2	○	○	○	○	○	○	—
B-1-C	○	—	○	○	○	○	○

○: Done —: None

*: 850°C x 60 min. Gas carburizing 160°C x 60 min. A.C.

表2 焼結歯車の製造工程

表3 焼結歯車の諸元

Type of teeth	Involute
Module	4
Pressure angle(rad.)	0.515
Number of teeth	8
Pitch circular diameter (mm)	32.0
Addendum circular diameter (mm)	39.67
Displacement over 2 teeth (mm)	17.87
Top clearance (mm)	0.12

図1 焼結歯車の概観

図2 焼結歯車の疲労試験に用いたジグ

(a) 片振り引張疲労

r (mm)	a _e	
	for tension	for bending
0.2	3.80	3.50
1.0	2.18	1.76
3.0	1.55	1.32

Detail of A

(b) 4点曲げ疲労

図3 焼結試験片形状

平行部中央に種々の応力集中係数 α_e を有する環状切欠を機械加工した (図 3)。また、疲労試験の際の荷重比は 0.05 とした。

3. 実験結果および考察

3.1 焼結歯車の疲労強度特性 A 材および B 材から製作した焼結歯車の荷重振幅と破断繰返し数の関係 (P - N 曲線と称する) をそれぞれ図 5, 6 に示す。図 5, 6 より、いずれの焼結歯車においても通常の鋼と同様の P - N 曲線を示すことがわかる。本研究に供した焼結歯車においては、A-2 を除き、破断繰返し数が約 10^6 サイクル程度で P - N 曲線の折れ曲がりを示したことから (2)~(5)、 2×10^6 サイクル以上の破断繰返し数を示す荷重振幅を疲労限度荷重 P_w として定義すると、 P_w に及ぼす仮焼結 (密度)、浸炭処理、焼結材化学成分の影響について、以下の特徴が見いだされる。

(1) 仮焼結 (密度) の影響について A 材においては、A-1-C ($P_w=5.1$ kN, $\rho=6.8$ g/cm³) と A-2-C ($P_w=5.6$ kN, $\rho=7.2$ g/cm³) の比較より、密度が高くなるにつれて P_w は高くなるが、その上昇の割合はわずかである。一方、B 材においては、密度が 6.8 g/cm³ である B-1-C の疲労限度荷重は、密度が 7.2 g/cm³ である B-2 のそれに比べ高く、密度の逆依存性が認められる。以上の結果より、A, B 両材とも密度の依存性はわずかに認められるが、本研究の範囲内ではその影響は特別大きいものではなく、むしろつぎに述べる浸炭の影響が大きいようである。同様の密度依存性が他の研究者によっても報告されている (3)~(5)。

(2) 浸炭処理の影響について A-2-C ($P_w=5.6$ kN, $\rho=7.2$ g/cm³) と、A-2 ($P_w=3.8$ kN, $\rho=7.2$ g/cm³) の疲労限度荷重の比較より、浸炭処理により P_w はかなり上昇していることがわかる。また、B-1-C ($P_w=7.2$ kN, $\rho=6.8$ g/cm³) の P_w は、2 回焼結・浸炭処理していない B-2 ($P_w=4.2$ kN, $\rho=7.2$ g/cm³) に比べ密度が小さいにもかかわらず、かなりの P_w の増加が認められる。以上の結果より、浸炭処理は疲労限度上昇にきわめて効果大きいと言える。

(3) 焼結材化学成分の影響について 浸炭処理をしていない場合には、A 材と B 材の相違は顕著でないが、浸炭処理をした場合には、B 材のほうが P_w が高い。

以上のことから、本研究で行った範囲内における焼結歯車の疲労限度向上には、浸炭処理の効果が最も大きく、仮焼結 (密度)、焼結材の化学成分の影響は副次

的な向上効果しか持たないと言える。

以上示した焼結歯車はすべて歯底の R 部から破損していた。これらの破損箇所は Hofer の 30° 接近法⁽⁶⁾⁽⁷⁾により推定される領域と良く対応していた。これらの焼結歯車の破壊形態を検討するため、破面観察および疲労限に達した焼結歯車の縦断面観察を行った。破面観察結果の代表例を図 7 に示す。図 7 より、歯底 R 部のき裂発生部近傍においては、擬へき開破面と焼結時に存在していた空孔との混合破面となっているが [図 7(a)], き裂が長くなるにつれてディンプル破面が支配的となっている [図 7(b)]。このような傾向はいずれの焼結歯車においても同様であった。なお、疲労破壊に特徴的なストライエーションは、いずれの歯車においてもまったく観察されなかった。疲労限に達した歯車において観察されたき裂の代表例を図 8 に示す。図 8 より、き裂は焼結時に形成されたフェライト粒中の空孔を起点として発生しており、このような

図 4 四点曲げ疲労試験方法

図 5 A 材焼結歯車における荷重振幅と破断繰返し数の関係

図 6 B 材焼結歯車における荷重振幅と破断繰返し数の関係

(a) 歯底近傍

(b) 歯底表面より深さ2mmの領域

図7 破面の代表例 (A-2材, 荷重振幅 $P_a=4.2$ kN)

図8 焼結時の空孔より発生したき裂の代表例 (A-2材, 荷重振幅=3.9 kN)

き裂は必ずしも表面と連結していない。図8と同様なき裂は、疲労限に達したいずれの焼結歯車においても観察された。したがって、焼結歯車においては、き裂は必ずしも表面から発生せず、焼結時に存在していた表面近傍の空孔から発生・伝ばし、破断にいたると考えられる。

3.2 焼結試験片の疲労強度特性 焼結歯車の疲労強度推定のための基礎情報を得るため、B-2, A-2から採取した切欠試験片を用いて、焼結材の切欠強度を調べた。B-2およびA-2における片振引張負荷に対する応力振幅と破断繰返し数の関係を図9, 10に、B-2における片振曲げに対する応力振幅と破断繰返し数の関係を図11に、これらの図から求めた平滑試験片の疲労限度に対する切欠材の疲労限度の比 σ_w/σ_{w0} と弾性応力集中係数 a_e との関係を図12, 13に示す。図12, 13より、いずれの焼結材および負荷条件に対しても、応力集中係数が約1.5程度までは切欠により疲労

図9 A-2材における応力振幅と片振引張りに対する破断繰返し数の関係

図10 B-2材における応力振幅と片振引張りに対する破断繰返し数の関係

図11 B-2材における応力振幅と曲げに対する破断繰返し数の関係

限度は低下しているが、それ以上の範囲ではほぼ一定の値となり、全体的に切欠感受性は弱い。

疲労限に達した試験片の観察結果によれば、図8と同様、焼結時に存在していた空孔から発生したき裂が観察された。前述のように、本研究に供した焼結試験片の切欠感受性は全体的に弱かったが、このことは上述のような焼結材特有のき裂発生形態によるものと考えられる。また、焼結試験片の破面は図7に示した歯車のそれと同様であった。一方、図10と図11において、曲げ疲労限度と引張疲労限度を比較すると a_e に

も依存するが、曲げ疲労限度は引張疲労限度より約1.6～1.8倍高くなっている。これらの相違は、両負荷条件下における応力分布の相違に起因していると考えられる。

3.3 焼結歯車の疲労強度推定 本研究では、有限要素法解析(FEM解析)により歯底R部の危険領域における弾性応力集中係数を求め、その値と3.2節で得られた焼結材の切欠強度特性および平滑焼結試験片の疲労限度を用いて、焼結歯車の疲労限度の推定を試みた。本研究では平滑焼結試験片の疲労限度として、図9から図11に示した引張負荷と曲げ負荷に対する値を用いた場合の2種類について検討した。本研究で検討した推定方法の詳細を以下に示す。

まず、FEM解析により歯底R部の危険領域における弾性応力集中係数を求めた。FEM解析には、本研究に供した歯車の対称性を考慮し、図14(a)に示すような解析モデルを使用した。なお、解析の際のポアソン比は0.30、ヤング率は 1.30×10^5 MPaとし、疲労試験の負荷方法と同様な方法で荷重振幅の2倍(疲労試験の際の最大荷重に相当する)の荷重を静的に加えた場合の計算を行った。また、計算にはマイクロコンピュータ(PC-9801)を用いた。負荷荷重を11 kNとしたときに得られた歯車の主応力分布図を図14(b)に示す。このような解析により得られた計算結果を用いて、Hoferの30°接近法により予想される歯底R部の破損領域(2.1節で示したように、この領域は、実際の

歯車の破損領域と、また、FEM計算により得られた主応力が最大となる領域〔図14(b)〕とも良く対応していた)における応力集中係数 α_e を次式により評価した。

$$\alpha_e = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{nom}} \cdots \cdots (1)$$

ここで $\sigma_{\max}$ はFEM計算により得られた主応力の最大値であり、 σ_{nom} はHoferの30°接近法⁽⁶⁾⁽⁷⁾で求められる公称応力である。

$$\sigma_{\text{nom}} = 6P \cdot \cos \alpha_x \cdot h_x / b \cdot S_x^2 \cdots \cdots (2)$$

$P \cdot \cos \alpha_x$: 歯面垂直荷重の歯の中心線に直角方向の分力

S_x : 30°接近法で推定される危険断面部の歯厚 ($S_x \approx 7.13$ mm)

h_x : 荷重作用線と歯形中心線の交点から危険断面までの距離 ($h_x \approx 5.20$ mm)

b : 歯幅 ($b = 18$ mm)

以上の計算により本研究に供した歯車の危険断面部における応力集中係数は1.50と求まった。

つぎに、上述のように求めた歯車の応力集中係数 α_e を焼結試験片の切欠強度特性図(図12, 13)に導き、切欠による強度低下の割合を求め、この情報と平滑試験片の疲労限度の実測結果(図9～11)を用いて歯車の許容公称応力を計算した。また、疲労限度荷重 P_w は式(2)より計算した。

図12 A-2焼結試験片における切欠効果

図13 B-2焼結試験片における切欠効果

(a) 要素分割図

(b) 主応力の分布図

図14 歯車の弾性応力解析に用いた要素分割図と計算結果

表 4 焼結歯車の疲労限度荷重の実験結果と推定結果の比較

Specimen	Fatigue limit used for prediction	Experimental fatigue limit load (kN)	Predicted fatigue limit load (kN)
B-2	for bending	4.20	3.88
	for tension		2.39 (3.83)
A-2	for tension	3.80	2.36 (3.78)

以上の手順により得られた歯車の疲労限度荷重の推定結果と実測結果との比較を表 4 に示す。表 4 より、片振曲げに対する焼結試験片の疲労限度の実測値を用いて推定した場合には、推定疲労限度荷重と実測値は比較的良い精度で一致している。一方、片振引張りに対する疲労限度の実測値を用いた場合には、かなり安全側に推定されている。これは、本研究で行った歯車の疲労試験における荷重状態が曲げが支配的であったことによるものと考えられる。図 10, 11 に示したように、本研究に供した焼結試験片の引張負荷に対する疲労限と曲げ負荷に対する疲労限との比率は約 1.6 である。試みに、この比率を用いて表 4 に示した引張負荷に対する疲労限を用いた推定結果を補正すると、表 4 中の () 内の値となり、実測した疲労限度と比較的良く一致する。以上のことから、本研究で検討した焼結歯車の疲労限度に対する推定方法はほぼ妥当なものだと考えられる。

4. 結 論

焼結歯車の疲労強度に及ぼす浸炭処理、仮焼結の影響を検討するとともに、焼結試験片の疲労強度特性か

ら焼結歯車の疲労強度推定を試みた。

その結果、以下の結論を得た。

(1) 焼結歯車の疲労強度向上には浸炭処理の効果が最も大きい。一方、本研究で行った範囲内では密度、仮焼結、焼結材化学成分のわずかな変化は副次的な向上効果しか持たなかった。

(2) 焼結歯車および焼結試験片の疲労破壊においては、き裂は必ずしも表面から発生せず、焼結時に存在していた表面近傍の空孔から発生・成長した。

(3) 本研究に供した焼結材の切欠による疲労限度は、弾性応力集中係数が約 1.5 までは減少したが、それ以上の範囲では弾性応力集中係数によらずほぼ一定の値を示し、全体的に切欠感受性は弱かった。このような挙動には、(2) で示した焼結材特有のき裂発生形態が寄与していると考えられる。

(4) 非浸炭材を対象にして、FEM により解析した歯底 R 部の弾性応力集中係数と焼結試験片の切欠強度特性をもとに、焼結歯車の疲労強度推定を試みた結果、ある程度の精度で推定可能であった。

文 献

- (1) 西口, 特殊鋼, 34 (昭 60), 46.
- (2) 松木・ほか 3 名, 日本鉄鋼協会第 113 回講演概要集, 87-S462 (1987), 74.
- (3) Sonsino, C. M. and Huppmann, W. J., *Int. J. Vehicle Des.*, 6 (1985), 297.
- (4) Lindskog, P., *Powder Metall.*, 16 (1973), 374.
- (5) Kravic A. F., *Int. J. Powder Metall.*, 5 (1969), 45.
- (6) 例えば, 仙波, 歯車, 3 (昭 31), 96, 日刊工業新聞社.
- (7) 例えば, 会田・寺内, 機論, 27 (昭 36), 868.

討 論

〔質問〕 吉 田 彰 (岡山大学工学部)

下記の点ご教示願いたい。

(1) 図 5, 6 に関する焼結材成分の影響について、浸炭処理のない場合には A 材と B 材で P_w にあまり差はなく、浸炭処理した場合には、両材とも硬さは約 H_v600 であるのに、なぜ B 材の P_w が高くなったのか。

(2) 図 5 で、A-2 の P_w は他より低くなっているが、時間強度は他のものとほぼ同じなのはなぜか。

(3) 図 8 の説明で、焼結歯車においてき裂は必ずしも表面の空孔から発生、伝ばせず、表面下の空孔から発生、伝ばすると記述されているが、応力的に考えると、空孔が一様に分布している場合、表面の空孔か

らき裂が発生、伝ばするとしたほうが考えやすいが、焼結後の加工により、表面の空孔の密度が著しく小さくなったことと加工硬化が主に影響してき裂は表面に発生しなかったのか。

〔回答〕 (1) 焼結材化学成分のみが異なる A-1-C と B-1-C における歯車表面から内部に向かう硬さ分布の測定結果を付図 1 に示す。図より、両材において、表面近傍にビッカース硬さが約 600 程度の硬化層が深さ約 1 mm の領域まで存在すること、内部の硬さがほぼ 250 程度となっていることは共通しているが、B-1-C の場合には内部の硬さのばらつきが大きく、見方によっては内部まで浸炭による硬化層が形成されているとも考えられる。なお、両材の金属組織には大き

付図 1 A-1-C, B-1-C における硬さ分布

な相違は見られない。また、本文に示したとおり、両材中の空孔の大きさには有意な差は認められない。浸炭処理による硬化特性や機械的性質の向上に Cu がどのような影響を及ぼしているかは明らかではないが、B-1-C の P_w が A-1-C より高いのは、上述のような硬さ分布の相違から推定して、浸炭処理による両材の残留応力の相違によるものと考えられる。

(2) ご指摘の意味は、高荷重振幅領域で A-2 の寿命曲線と A-1-C, A-2-C のそれらとが交差し、この領域では 3 者間に疲労強度の差が顕著でないのはなぜかという内容と考える。この点については著者らも疑問に考えている。焼結材の疲労強度には、焼結材内部の空孔の大きさ、形状、分布状態、浸炭処理による残留応力等種々の因子が影響していると考えられるが、今後これらの因子を定量評価し、検討を加えていきたい。

(3) 図 8 のようなき裂発生形態になったのは、ご指摘のとおりだと考える。現状では、実機における焼結歯車の使用に際してはサイジング等焼結後の機械加工が不可欠と考えられることから、図 8 のようなき裂発生形態は、検査・点検の観点から重要な問題と考える。

〔質問〕 幡 中 憲 治〔山口大学工学部〕

(1) 歯車の表面層と内部で顕著な硬度差があるということである。一方、試験片は平滑材も切欠材も機械加工により作製されるので表面層は除去されている。このように両者の表面層の機械的性質が異なるので試験片データから歯車の寿命予測を実施することに問題を生じないか。

(2) この材料の疲労強度のばらつきはいかがなものか。

〔回答〕 (1) ご指摘の対象歯車は、①『歯車の表面層と内部で硬度差がある…』という文意から推定して、浸炭処理歯車の疲労強度推定に関するもの、あるいは、②非浸炭処理歯車の疲労強度推定に関するもの、

の、双方に解釈される。①の場合、本研究における疲労強度推定は、表面と内部の硬さの相違がほとんどない非浸炭処理歯車のみを対象に行っている。なお、ご指摘のとおり、歯車と試験片の表面層の機械的性質が著しく異なる場合には、試験片の疲労強度から歯車のそれを推定するには無理があると考えている。②の場合、表 2 に示したとおり、焼結歯車の製造工程でサイジングと呼ばれる機械加工を行っており、これらの加工による歯車表面の機械的性質は、機械加工により作成した試験片表面のそれと大差がないと考えられることから、試験片の疲労強度から歯車のそれを推定するには大きな問題はないと考える。

(2) 実験データ数がそれほど多くないことから、統計学的なばらつき範囲は明記できないが、図 9, 10, 11 に示したように、焼結材の疲労強度のばらつきは比較的大きい。したがって、図 9 等においては疲労強度の下限值近傍を選んで S-N 曲線を作成している。このようなばらつきには、焼結材内部の空孔の大きさ、形状、分布状態等が大きな影響を及ぼしていると考えられ、より正確な疲労強度の評価・推定のためには信頼性工学的な検討も必要と考えている。

〔質問〕 猿 木 勝 司〔豊田中央研究所〕

(1) 試験片の結果と歯車の結果とを結びつけるのに、応力集中率のみで考えておられるが、疲労の場合は応力集中のみではなく、応力こう配によっても影響を受ける。応力こう配に対しては、どのように考えておられるか。

(2) 浸炭した場合は、当然残留応力が発生している。残留応力に対しては、どのように配慮がなされているか。

〔回答〕 (1) ご指摘のように、疲労強度には応力こう配が大きな影響を及ぼす。図 10, 11 に示した引張疲労強度と曲げ疲労強度の比が約 1:1.6 程度になったのもそのような現れと考えている。したがって、より正確には試験片と歯車における応力こう配の相違を考慮した推定を行うのが望ましいが、本研究では簡便な寿命推定という点に主眼を置いた。表 4 において、焼結試験片の引張強度から推定した歯車の疲労強度を上述の比率を用いて単純な補正を試みたのもこのような理由によるものである。なお、本文中にも示したとおり、焼結材における疲労き裂は表面近傍の空孔から発生し、その伝ば寿命が疲労強度に大きな影響を及ぼしていると考えられることから、試験片レベルでき裂伝ば速度を応力拡大係数等の関数で破壊力学的に評価し、一方で FEM 解析等により応力こう配を加味して実際の歯車中のき裂に対する応力拡大係数を評価し、

これらの情報を組合せることにより、歯車の寿命を破壊力学的に推定することも可能と考える。

(2) 幡中氏の質問(1)に対する回答にも示すとおり、本研究における寿命推定は、残留応力が大きくな

い非浸炭処理歯車のみを対象にしており、残留応力の影響は考慮していない。残留応力が大きい浸炭処理材に対しては今後検討を進めたいと考えている。

55 巻 511 号, A 編 (1989-3) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
大 滝 誠 一	578	右	式 6	$+\frac{1-\nu}{2}t_{\xi\eta}^2]$	$+\frac{1-\nu}{2}\gamma_{\xi\eta}^2$
合 田 公 一 ほか	610		4	$\beta D_{k-1} + \beta D_{k-1}$	$D_{k-2} + \beta D_{k-1}$