半だ円表面き裂の疲労き裂進展における確率論的寿命予測*

尹 漢 鏞^{*1}, 岡 村 弘 之^{*2}Probabilistic Prediction of the Fatigue Crack Propagation Life
of a Semielliptical Surface Crack

Han-Yong Yoon and Hiroyuki OKAMURA

Safety evaluation of components with crack-like defects must be treated probabilistically because the initial size of defects and other parameters are nondeterministic. In the case of an actual structure, such as a pressure vessel, the most important defect is the surface flaw. But life prediction involving surface flaws is not simple, as the aspect ratio of a crack may change gradually as the crack grows. Therefore, probabilistic analysis is also complicated. This paper presents a simple method of probabilistic life prediction for the fatigue crack propagation of a semielliptical surface crack, and the influence of several parameters on crack propagation life is discussed.

Key Words: Fatigue, Reliability, Crack Propagation, Life Distribution Probabilistic Life Prediction, Parameter Study

1. 緒 言

圧力容器などに存在する欠陥の安全性評価において最も重要なのは表面欠陥であり、その表面欠陥を対象にした安全性および信頼性評価に関する研究が多数なされている^{(1)~(4)}。しかし、き裂形状の三次元的変化が正しく扱われていない、あるいは、特定の数値に対する影響度評価に限られているなど、いまだ不十分な点も多い。また、多数の確率変数を扱っているため、かえって最も重視されるべき初期き裂寸法の寿命への影響が必ずしも明確に示されているとは言えない。

著者ら⁽⁵⁾は、二次元貫通き裂における疲労き裂進展寿命分布に及ぼす初期き裂寸法分布および材料係数の影響を論じ、その影響を基準化することにより総合的な確率論的寿命予測ができることを示した。表面き裂の場合は貫通き裂と違って、き裂の深さ方向および長手方向の寸法の比、すなわち形状比がき裂の進展に伴って次第に変化してゆくことと、表面欠陥が安全性評価の対象になる圧力容器などは、引張応力と曲げ応力

が同時に作用しているため、その割合によって寿命がどのように変化するかを考慮しなければならない。

確率論的寿命予測、もしくは、破壊確率の計算には通常モンテカルロシミュレーションなどが用いられているが、むしろ確率変数を主要なものに限定することにより、計算時間を節約して厳密な計算をするほうが、大局的にはより正しい結果が得られると考えられる。

本章は、この観点から表面き裂の疲労き裂進展における形状比および引張曲げ応力の割合の影響を考慮した評価を行い、さらに二次元貫通き裂と三次元表面き裂の疲労き裂進展寿命の関連を求め、前者から後者が予測可能であることを示す。また、寿命の確率分布を厳密に求めて、寿命分布に及ぼす初期き裂深さおよび形状比の変動の影響を示す。

2. 疲労き裂進展寿命予測

2.1 半だ円表面き裂における疲労き裂進展モデル
二次元き裂の疲労き裂進展速度の算出には一般に Paris-Erdogan の次式が用いられている。

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 a はき裂寸法、 N は荷重繰返し数、 ΔK は応力拡大係数変動幅、 C, m は材料係数である。図 1 に模式

* 昭和 62 年 12 月 2 日 第 1 回構造物の安全性および信頼性に関する国内シンポジウムにおいて講演、原稿受付 昭和 63 年 9 月 12 日。

^{*1} 准員、東京大学大学院 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)。

^{*2} 正員、東京大学工学部。

的に示す半だ円表面き裂を有する板厚 t の平板に引張りおよび曲げが加わる場合においては、Newman-Raju による進展則⁽⁶⁾

$$\frac{da}{dN} = C_A \cdot (\Delta K_A)^m, \quad \frac{dc}{dN} = C_B \cdot (\Delta K_B)^m \quad \dots\dots (2)$$

をここでは用いることにする。ただし、 a , c はそれぞれ板厚方向のき裂深さと長手方向のき裂長さの半分であり、 ΔK_A , ΔK_B はき裂の最深点 A と表面点 B における応力拡大係数の変動幅である。上式から

$$\frac{da}{dc} = \frac{C_A}{C_B} (\Delta K_A / \Delta K_B)^m \quad \dots\dots (3)$$

であるから、これらの式を解くことによりき裂形状比(アスペクト比)の変化 a/c の変化が求められる。

応力拡大係数の解はいくつか発表されているが、次式に示す Newman-Raju の解が広く用いられており、本研究においてもこれを用いることにする。

$$K_I = (S_t + H \cdot S_b) F \cdot \sqrt{\pi a} / E(k) \quad \dots\dots (4)$$

ここで、 H , F はき裂深さ、き裂形状比 a/c 、き裂前縁上の離心角をパラメータとする修正係数であり、 $E(k)$ 、(ただし $k; \sqrt{1-a^2/c^2}$) は第2種完全だ円積分であり、 S_t , S_b は引張りおよび曲げ応力である。また、

$$S = S_t + S_b \quad \dots\dots (5)$$

とし、また引張曲げ応力の割合(以後、これを曲げ応力比と呼ぶことにする)を $B_r [S_b / (S_t + S_b) = S_b / S]$ とする。すなわち、 $B_r = 0$ で完全引張り、 $B_r = 0.5$ で引張りおよび曲げが同比率、 $B_r = 1$ で完全曲げである。この置き換えによって、

$$K_I = [1 - B_r(1 - H)] \cdot S \cdot F \cdot \sqrt{\pi a} / E(k) \quad \dots\dots (6)$$

になり、 B_r が与えられれば、式(2)、(3)よりき裂進展速度および形状変化が求められる。

Newman-Raju は式(3)により推定したき裂形状の変化と実験データとの比較により、き裂進展速度より逆算した実効的な応力拡大係数が計算によって求めた表面点の応力拡大係数より求めた表面点の応力拡大係数が最深点より 10 % 程度低いことに着目し、これ

に対応して応力拡大係数に換算して 0.9 の修正、すなわち式(2)における材料係数を、

$$C_B = 0.9^m C, \quad C_A = C \quad \dots\dots (7)$$

と修正し、またこのとき

$$\frac{da}{dc} = \left(\frac{\Delta K_A}{0.9 \Delta K_B} \right)^m \quad \dots\dots (8)$$

となるから、これを用いることにより、よい推定が可能であることを示している。

図2は、引張応力条件下の表面き裂のき裂形状変化をこの Newman-Raju の解を用いて計算し示したものであるが、縦軸はき裂形状比 a/c で、横軸はき裂深さ a を板厚 t で無次元化した a/t であり、図中に示した線の違いは初期き裂深さと初期アスペクト比(形状比)が異なることを意味しており、各々の起点が示す位置が初期き裂深さと初期アスペクト比の値である。この図からあらゆる形のき裂形状比の変化が予測できる。

ところで、高温構造安全技術研究組合の報告書⁽⁷⁾によれば、曲げに対しては表面点の実効的な応力拡大係数の値を過大評価する傾向があるため 0.8 倍、すなわち、 $C_B = 0.8^m C$, $da/dc = (\Delta K_A / 0.8 \Delta K_B)^m$ の修正をする必要があるとしている。ところで、曲げ応力に対して Newman-Raju の解の適用範囲はアスペクト比が 1 以下であるが、図2に示したような計算を行ってみると、無次元き裂深さが 0.1 以下ではアスペクト比が 1 より大きくなり、解の適用範囲を超えてしまう。そこで、本研究では、式(8)のように表面点の応力拡大係数に対しては、曲げに対しても Newman-Raju と同じく 0.9 倍の修正を行うことにする。

2.2 疲労き裂進展寿命評価線図 初期き裂が進展し、板厚を貫通するまでの時間を疲労き裂進展寿命(N)とすると、式(2)を積分することにより

図1 半だ円表面き裂の模式図

図2 引張応力条件下のアスペクト比の変化

$$N = \int_{a_i}^t C^{-1} \cdot \Delta K_A^{-m} da \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$N = \frac{t}{C \cdot (S \cdot \sqrt{\pi t})^m} \int_{X_i}^1 X^{m/2} \cdot f(X, R)^{-m} dX \quad \dots\dots\dots (10)$$

$X: a/t, R: a/c$

のように求められる。ただし、 a_i は初期き裂深さ、 $f(X, R)$ は X と R の関数で、Newman-Rajuの解によるものであり、また積分は前節に述べたき裂形状比の変化経路に沿ったものとする。

図3は、基準化寿命 N_0 と初期き裂深さとの関係を表式(10)から求めて示したものである。曲げ応力比 $B_r=0$ 、すなわち、引張応力条件下で、初期アスペクト比を変化させて示したものであり、初期き裂深さ、初期アスペクト比の寿命への影響が直観的にわかる。図中の R_i, B_r とは各々、初期アスペクト比、曲げ応力比を意味している。また、基準化した寿命とは、式(10)より、

$$N_0 = N \cdot t^{-1} \cdot C \cdot (S \cdot \sqrt{\pi t})^m \quad \dots\dots\dots (11)$$

である。

図3 寿命評価線図
(アスペクト比の影響、引張応力条件)

図4 寿命評価線図
(アスペクト比の影響、曲げ応力条件)

図4は、曲げ応力条件下の寿命を示したものであるが、引張応力の場合と違って、初期き裂深さが大きくなるにつれ、また、初期アスペクト比が1に近付くほど曲線の傾斜が急激になるのがわかる。図3におけるアスペクト比零の曲線は片側き裂の引張り(E. C. T; Edge Cracked Tension)の寿命の曲線と全く同じ軌跡をたどり、図4における初期アスペクト比零の曲線は片側き裂曲げ(E. C. B; Edge Cracked Bending)の曲線と全く同じ軌跡をたどる。また、図中の破線については次節で述べる。これらの図をここで寿命評価線図と呼ぶことにするが、この図には、二次元き裂から三次元き裂に至る全領域の寿命変化が表示されており、二次元き裂と三次元き裂の関連を示すとともに、二次元き裂疲労寿命の計算値より三次元き裂の寿命を推定できることになる。

この寿命評価線図を用いることにより、寿命に及ぼす各パラメータの影響がおおよそ把握できるので実用的に役に立つと考えられる。

2.3 寿命に及ぼすアスペクト比の影響の基準化

前節では、寿命に対する初期き裂深さ、初期アスペクト比の影響が把握できる寿命評価線図を示したが、材料係数 m 、曲げ応力比などによりその影響もまた変化するので、1枚の図だけで全パラメータの影響を評価することは難しい。ここで、なんらかの手法によりこれらパラメータを基準化することができれば、寿命に対するパラメータの影響の総合的評価が可能になる。

寿命に及ぼすアスペクト比の影響の適切な基準化は、各パラメータの影響が複雑に変化するので理論的にはかなり困難である。このためコンピュータのグラフィック機能を利用し、パラメータによるグラフの変化を見ながら試行(try and error)によりその変化が一致するように基準化の係数を決めることにする。図5は、このようにして求めた係数 Q_r を用い、さらに寿命を基準化して示したものである。図中の三つの線の

図5 係数 Q_r による寿命の基準化

違いは、 (R_i, B_r) を一組にして $(0, 0)$, $(0.5, 0.5)$, $(1, 1)$ であり初期アスペクト比および曲げ応力比の違いにもかかわらずよく一致しているのがわかる。初期アスペクト比が零ということは二次元の片側き裂を意味する。この基準化係数 Q_r を次式

$$Q_0 = \frac{[1 - 0.55 \exp(-5R_i)] \cdot (0.2 + 0.8R_i) [0.5(m-2)]^{(1.1-0.1(m-2))}}{0.45 \times 0.2^{0.4(m-2)}}$$

$$Q_1 = 1 + \{\exp[\log X_i + 2(1 + 0.55B_r)]\}^2 \cdot R_i \{1 + 20B_r \cdot \exp[(0.1 - R_i)/0.2]\}$$

$$Q_r = Q_0 \cdot Q_1 \dots \dots \dots (12)$$

に示すが、この Q_r を用いることにより二次元貫通き裂の疲労き裂進展寿命から簡単に表面き裂の疲労き裂進展寿命が予測できる。すなわち、 $R_i=0, B_r=0$ [二次元片側き裂引張り (E.C.T)] の寿命に基準化係数 Q_r をかけるだけで三次元表面き裂の寿命が簡単に予測できる。また、このようにして求めた寿命を図 3, 4 に破線で示すがだいたい一致しており、実用上十分な精度で三次元表面き裂の疲労き裂進展寿命を二次元貫通き裂から簡単に予測できると考えられる。なお、この基準化係数 Q_r の適用範囲は、 $3 \leq m \leq 5$, $X_i \leq 0.4$ とアスペクト比全範囲、曲げ応力比全範囲である。

3. 疲労き裂進展寿命分布

3.1 疲労き裂進展寿命の確率分布 2章で示した疲労き裂進展寿命評価線図を用いることによって大ざっぱなパラメータの影響を讀取ることができるが、寿命の確率分布を把握するためには疲労き裂進展寿命の確率分布を求める必要がある。疲労き裂進展寿命の確率分布は、初期き裂深さ、初期アスペクト比を確率変数とし、材料係数 m は確定値、 C の変動は著者ら⁽⁵⁾ が示したように分離して扱うことができるので現段階では確定値として求める。また、初期き裂深さと初期アスペクト比とは独立であると仮定する。

寿命の分布関数 $F(N_0)$ は次式より求められる。

図 6 等寿命線図

$$F(N_0) = \int_0^1 f_R(R_i) \int_{N_0 < N_0(X_i, R_i)}^1 f_X(X_i) dX_i \cdot dR_i \dots \dots \dots (13)$$

ここで、 $f_R(R_i)$ は初期アスペクト比 (R_i) の確率密度関数であり、 $f_X(X_i)$ は初期き裂深さ (X_i) の確率密度関数である。通常、寿命の分布はモンテカルロシミュレーションなどによって求められているが、この式 (13) により寿命の確率分布の厳密解が得られる。図 6 は、アスペクト比の変化と等寿命線の模様を示したものであるが、実線で示しているのがアスペクト比の変化であり、破線で示しているのが等寿命である。等寿命とは、その線上どこから出発しても貫通までかかる寿命が同じであるとのことである。この図と類似のものが栗原・川原⁽⁶⁾ によって発表されている。それは横軸のアスペクト比の代わりに表面のき裂長さをパラメータにしており、本質的には同じものであるが、一般に表面のき裂長さよりはアスペクト比が広く使われていることを考えるとパラメータをアスペクト比としたほうがよからう。

上述の式 (13) の意味をこの等寿命線図により示すことにするが、二重積分の右側の積分はこの線図において与えられた寿命 (寿命線) の右側に初期き裂深さが含まれる確率であり、これを初期アスペクト比の密度関数に乗じて初期アスペクト比の全範囲につき積分するのである。

3.2 寿命分布に及ぼすアスペクト比変動の影響

著者ら⁽⁵⁾ は、二次元貫通き裂の疲労き裂進展寿命分布に対する初期き裂の寸法分布 (表面き裂の深さ分布と同値) の影響を示したが、表面き裂の場合は、さらに初期アスペクト比の影響を加えれば良い。そこで、前項で示した寿命の確率分布の計算式により解析する。

アスペクト比の分布に対する情報は十分ではなく正規分布⁽⁹⁾、対数正規分布⁽¹¹⁾、指数分布⁽¹¹⁾、などの研究報告がある。ここでは、まず、正規分布として扱い、次節で分布形状の影響も調べる。

図 7 は、初期き裂深さの分布は対数正規分布、初期アスペクト比の分布は正規分布として、引張応力条件下の寿命の確率分布を求めたものであり、初期アスペクト比の標準偏差と初期き裂深さの中央値を変化させ

て示したものである。縦軸は、累積確率であり、横軸は寿命をその中央値で基準化したものである。図中の B_r , $\bar{X}_i$, $\bar{R}_i$ は、曲げ応力比、初期き裂深さ中央値、初期アスペクト比中央値である。図からわかるようにアスペクト比の変動の影響は、初期き裂深さの大きさによっても異なり、初期き裂深さが大きいほどその影響も大きい。

図 8 は、図 7 と同じで、応力条件を曲げにした場合であるが、傾向が引張応力の場合と全く違うのがわかる。すなわち、初期き裂深さが大きいほど初期アスペクト比の変動の影響は小さくなる。ただし、初期き裂深さが大きく初期アスペクト比の変動が大きいときには確率が小さいところ、すなわち、左裾野で分布形状が大きく広がることは注意すべきであろう。

3.3 寿命の変動に及ぼす確率分布形状の影響

本節では、パラメータの分布の裾野の形によって寿命の分布がどのように変化するかを調べる。

図 9 は、初期き裂の確率分布が、正規分布 (N), 対数正規分布 (L), 2 母数ワイブル分布 (W), 2 母数最

大値の第 2 漸近分布 (E) につき寿命の変動を示したものであるが、各々の分布パラメータは、対数標準偏差が同じになるように定めた。図からわかるように、寿命の分布は、初期き裂の分布形状の影響を大きく受ける。

図 10 は、同様に、初期アスペクト比の分布形状の影響を示したものであり、初期アスペクト比の対数標準偏差が同じになるように各分布のパラメータを定めた。図からわかるように、初期き裂分布形状の影響の場合と違って右側裾野、すなわち、確率が高いところではその影響がほとんどなく、左側裾野の場合も初期き裂分布の場合よりずいぶん小さい。

3.4 寿命の変動に及ぼす曲げ応力比の影響 前述したように、寿命の変動に及ぼす初期アスペクト比の影響は、曲げ応力比によっても異なり、その影響も考慮しなければならない。ここでは、他パラメータは固定し、曲げ応力比だけを変化させてみる。図 11 は、初期き裂の深さが 0.005 とかなり小さいところと 0.1 のところで、曲げ応力比 (B_r) を変化させて示したものであり、破線で示したのが 0.005 でほとんど影響が

図 7 寿命分布に対する初期アスペクト比変動の影響 (引張応力条件)

図 9 寿命分布に対する初期き裂深さ分布形状の影響

図 8 寿命分布に対する初期アスペクト比変動の影響 (曲げ応力条件)

図 10 寿命分布に対する初期アスペクト比分布形状の影響

図 11 寿命分布に対する曲げ応力比の影響

なく、実線のほうの 0.1 では影響が大きくなるのがわかる。すなわち、初期き裂深さが小さいときには、曲げ応力比が寿命の変動に影響しないが、初期き裂深さが大きくなると曲げ応力比の影響も大きくなる。

4. 結 言

著者らは二次元貫通き裂を対象として簡単に寿命予測ができる手法を示した⁽⁵⁾が、三次元半だ円表面き裂の場合は、貫通き裂の場合と違ってき裂進展に伴うき裂形状の変化も考慮しなければならないので複雑であり、寿命分布に対する各種パラメータの影響も明らかにされていない。本論文においては、三次元半だ円表面き裂における疲労き裂進展寿命に対する各種パラメータの影響を明らかにするとともにその総合的予測手法を述べた。得られた主な結果としては、

(1) 寿命評価線図により、初期き裂深さ、初期アスペクト比の影響を具体的に示した。

(2) 初期き裂深さ、初期アスペクト比、曲げ応力比の影響を総合的に評価できる基準化式を示した。この式を用いると、簡単に二次元貫通き裂の疲労き裂進展寿命から三次元表面き裂の疲労き裂進展寿命が予測できる。

(3) 引張応力条件下で、初期アスペクト比の変動が寿命分布に及ぼす影響は、初期き裂深さが大きくなるにつれて大きくなるが、曲げ応力条件下では、反対に初期き裂深さが大きくなるにつれて小さくなる。ただし、初期き裂深さが大きく、さらにアスペクト比の変動が大きい場合には確率がかなり小さいところで、その裾野が大きく広がる傾向を示している。

(4) 初期アスペクト比の分布形状の影響は、右側の裾野、すなわち、確率が高いところではほとんどなく、左側の裾野においては初期き裂の分布形状の影響に比べて小さい。

(5) 引張応力と曲げ応力の割合(曲げ応力比)の寿命の変動に及ぼす影響は、初期き裂深さが小さいところではあまりなく、初期き裂深さが大きくなるにつれて大きくなる。

文 献

- (1) Haris, D. O., ほか 2 名, NUREG/CR-2189, 5 (1981).
- (2) 北川・久田, 機論, 45-397, A (1979), 1033.
- (3) Bruckner, A. and Munz, D. *Reliability Engineering*, 5 (1983), 139.
- (4) 島田・ほか 2 名, 第 5 回設計における信頼性解析に関するシンポジウム, (1983), 6, 材料学会.
- (5) 尹・岡村, 材料, 37-419 (1988), 922.
- (6) Newman, Jr. J. C. and Raju, I. S., *NASA Technical paper*, 1578 (1979).
- (7) 高温構造安全技術研究組合編, ISES. 8218, (1982).
- (8) 栗原・川原, 機講論, No. 810-7, (1981), 201.