円板状剛体介在物により開口する無限体中の円形き裂*

原 利 昭^{*1}, 坂 本 信^{*2}
渋谷 寿 一^{*3}, 小 泉 堯^{*3}

Indentation of a Penny-Shaped Crack by a Disc-Shaped Rigid Inclusion in an Infinite Elastic Solid

Toshiaki HARA, Makoto SAKAMOTO,
Toshikazu SHIBUYA, and Takashi KOIZUMI

A solution is presented to a three-part mixed boundary-value problem for an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack indented by a disc-shaped rigid inclusion. The problem is reduced to a solution of infinite systems of simultaneous equations in which the normal displacement on the crack surface is expressed as appropriate series. Numerical results are given for the contact stress and the stress intensity factor at the crack tip. The effect of the inclusion on the stress field is studied.

Key Words: Elasticity, Contact Problem, Stress Concentration, Stress Intensity Factor, Computational Mechanics, Penny-Shaped Crack, Infinite Elastic Solid, Rigid Inclusion

1. 緒 言

近年, 材料の疲労や破壊の研究に関連して, き裂を含む弾性体の応力解析が重要視されている。中でも介在物によって開口するき裂を有する材料の力学的挙動を明らかにすることは, 実用材料等における強度評価の基礎資料を得るとともに複合材料の界面機構を解明することにも関連して重要と思われる。

例えば, Tsai⁽¹⁾は横等方性無限体中の円形き裂が偏平回転円板状剛体介在物によって開口する場合をハンケル変換法を用いて解析し, 介在物と無限体間の接触応力や応力拡大係数を求めている。Selvaduraiらは円形き裂内に円板状介在物を有する等方性および横等方性無限体の問題⁽²⁾⁽³⁾に対してCookeの手法⁽⁴⁾を適用し, これらの問題を第2種フレドホルム形積分方程式を解く問題に帰着して解析するとともに介在物とき裂の半径比の級数形で応力拡大係数等を与えているが, き裂が介在物より十分大きい場合を除いて数値精度的

に不利と思われる。

本研究では, この種の問題に対して解析的, 数値計算的に有利な一つの解法を示すために無限体内部の円形き裂が円板状剛体介在物によって開口する軸対称接触問題を解析した。数値計算によって変位や応力の分布および応力拡大係数等を詳細に示すとともにこれらに及ぼす介在物とき裂の半径比による影響を明示した。

2. 応 力 解 析

図1のように無限弾性体中の円形き裂(直径 $2c$)が円板状剛体介在物(直径 $2d$, 微小高さ $2\epsilon_0$)によって開口する場合を考える。円柱座標 (r, θ, z) を用いて介在物の中心を原点とすれば, ねじりのない軸対称応力状態の変位 (u_r, v_θ, w_z) および応力成分 $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta})$ はBoussinesqの調和応力関数 $\psi_i (i=0, 3)$ を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_3}{\partial r}, v_\theta = 0 \\ 2Gw_z &= \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \psi_3}{\partial z} - (3-4\nu)\psi_3 \\ \sigma_r &= \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

* 平成元年3月10日 東海支部第38期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和63年8月12日。

^{*1} 正員, 新潟大学工学部(〒950-21 新潟市五十嵐2の町8050)。

^{*2} 正員, 新潟工業短期大学(〒950-21 新潟市上新米町5-13-7)。

^{*3} 正員, 東京工業大学工学部(〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\partial \psi_0}{r \partial r} + z \frac{\partial \psi_3}{r \partial r} - 2\nu \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - 2(1-\nu) \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r \partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta z} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 G は横弾性係数、 ν はポアソン比である。

介在物と無限体が滑らかに接触する場合を考慮すれば本問題の境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad (w_z)_{z=0} &= \varepsilon_0 \quad (0 \leq r \leq d) \\ &= 0 \quad (c \leq r < \infty) \\ (ii) \quad (\sigma_z)_{z=0} &= 0 \quad (d < r < c) \\ (iii) \quad (\tau_{rz})_{z=0} &= 0 \quad (0 \leq r < \infty) \\ (iv) \quad &\text{無限遠方ですべての応力は消失。} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

境界条件(iii)と(iv)を考慮して応力関数 $\psi_i (i=0, 3)$ を次のように選ぶ。

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= (2\nu - 1) \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} A(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \\ \psi_3 &= \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $A(\lambda)$ は λ のみの未知関数、 $J_n(x)$ は n 次の第1種ベッセル関数である。

式(1)と(3)によるき裂面($z=0$)の変位 w_z と応力 σ_z を求め、境界条件(i)と(ii)を適用すれば、次のような $A(\lambda)$ に関する連立積分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (w_z)_{z=0} &= -\chi \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \varepsilon_0 \quad (0 \leq r \leq d) \\ &= 0 \quad (c \leq r) \\ (\sigma_z)_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (d < r < c) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\chi = (1-\nu)/G$ である。

式(4)を直接数値的に解いて $A(\lambda)$ を決定する方法も考えられるがここでは $(w_z)_{z=0}$ の条件を恒等的に満足するような未知係数を含む形で $A(\lambda)$ を与え、次いで $(\sigma_z)_{z=0}$ の条件を適用して未知係数を定める方法を利用する。そこで、次の変数変換式を利用すれば解析

図1 無限体中の円形き裂と剛体介在物

が容易になる。

$$\left. \begin{aligned} 2a &= c + d, \quad 2b = c - d \\ r^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

いま、 $F(\chi)$ を χ に関する連続関数として未知係数 $A(\lambda)$ を

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) &= \int_0^\pi F(\chi) J_1(\lambda q) d\chi \\ q^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \chi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

と置いて式(4)の第1式に代入し、積分順序を変えれば次式を得る。

$$(w_z)_{z=0} = -\chi \int_0^\pi \frac{H(q-r)}{q} F(\chi) d\chi \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $H(q-r)$ はヘビサイドのステップ関数である。式(5)、(6)のともに第2式より次の関係が得られる。

$$H(q-r) = \begin{cases} 1 & (r \leq d \leq q, d < r < q \leq c) \\ 0 & (q \leq c \leq r, d \leq q < r < c) \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

従って、式(7)、(8)より任意の $F(\chi)$ に対して境界条件(i)が成立することから $F(\chi)$ を未知係数 $a_n' (n=0, 1, \dots)$ を含む次のようなフーリエ級数で表示する。

$$\pi F(\chi) = q \sum_{n=0}^\infty a_n' \cos n\chi \dots\dots\dots (9)$$

式(9)を式(7)に代入すれば $(w_z)_{z=0}$ は次式で表示される。

$$-\frac{(w_z)_{z=0}}{\chi a_0'} = \begin{cases} 1 & (0 \leq r \leq d) \\ 1 - \frac{\phi}{\pi} - \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n' \sin n\phi}{\pi a_0' n} & (d < r < c) \\ 0 & (c \leq r) \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

次に、 $(\sigma_z)_{z=0}$ の条件を考慮して a_n' を定める。式(9)を式(6)に代入し、積分公式⁽⁵⁾および次の関係式

$$\partial J_0(\lambda q) / \partial \lambda = -q J_1(\lambda q) \dots\dots\dots (11)$$

を考慮すれば次式を得る。

$$A(\lambda) = - \sum_{n=0}^\infty a_n' M_n(\lambda) \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$M_n(\lambda) = \partial \{ J_n(\lambda a) J_n(\lambda b) \} / \partial \lambda \dots\dots\dots (13)$$

式(12)を式(4)の第2式に代入し、式(11)および

$$\partial \{ r J_1(\lambda r) \} / \partial r = \lambda r J_0(\lambda r) \dots\dots\dots (14)$$

を考慮するとともに両辺を r で積分すれば次式を得る。

$$\sum_{n=0}^\infty a_n' \int_0^\infty M_n(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} J_0(\lambda r) d\lambda = \alpha \quad (d \leq r \leq c) \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 α は積分定数である。

式(15)において、未知係数 a_n' を

$$a_n' = \alpha a_n \dots \dots \dots (16)$$

と置き換え、ゲーゲンバウアの加法定理⁽⁵⁾を適用するとともに両辺の $\cos m\phi$ の係数を等置すれば次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} M_n(\lambda) M_m(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} \quad (m=0, 1, \dots) \dots \dots (17)$$

ここで、 δ_{0m} はクロネッカデルタである。

式(17)を解いて a_n を求めれば、式(12)と(16)より $\alpha = -\varepsilon_0/\chi a_0$ となり、最終的に $A(\lambda)$ は次式によって与えられる。

$$A(\lambda) = -\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(\lambda) \dots \dots \dots (18)$$

3. き裂面の変位と応力 および応力拡大係数

き裂面 ($z=0$) における変位は文献(6)と同様に、積分公式を利用して容易に数値計算可能である。他方、応力は以下の様に $M_n(\lambda)$ の漸近性を考慮するとともに特異項を分離した形で表示すれば、いずれも精度良く計算可能である。

いま、十分大きな λ に対して次の関係が成立する。

$$M_n(\lambda) \approx \frac{(-1)^n c \cos \lambda c - d \sin \lambda d}{\pi (ab)^{1/2} \lambda} \dots \dots \dots (19)$$

式(19)を用いて、例えば $(\sigma_z)_{z=0}$ を表示すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_{z=0} = & -\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\int_0^{\infty} \lambda M_n(\lambda) \right. \\ & \left. - \frac{(-1)^n c \cos \lambda c - d \sin \lambda d}{\pi (ab)^{1/2}} \right] J_0(\lambda r) d\lambda \\ & + \frac{1}{\pi (ab)^{1/2}} \left\{ \frac{(-1)^n c}{(r^2 - c^2)^{1/2}} H(r - c) - d \right. \\ & \left. \times \frac{H(d - r)}{(d^2 - r^2)^{1/2}} \right\} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

式(20)より、 $(\sigma_z)_{z=0}$ は介在物端部 ($r=d-$) およびき裂縁 ($r=c+$) で特異性を有する。そこで、き裂縁および介在物端部に対して無次元化した応力拡大係数および応力特異場の強さを表す係数 K_{ix} ($x=c, d$) をそれぞれ次式のように定義し、評価する⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$K_{ix} = \lim_{r \rightarrow x \pm} [2\pi(r-x)/c]^{1/2} \beta |(\sigma_z)_{z=0}| \dots \dots \dots (21)$$

ここで、 $\beta = (1-\nu)c/G\varepsilon_0$ である。

式(20)、(21)より応力拡大係数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_{ic} &= \frac{c}{a_0 (\pi ab)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \\ K_{id} &= \frac{1}{a_0} \left(\frac{cd}{\pi ab} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

4. 数 値 結 果

無限連立一次方程式(17)を解いて a_n を決定するた

めにはベッセル関数を含む無限積分形で与えられる係数を求める必要があり、文献(9)と同様にこれらを直接数値積分する項とベッセル関数の漸近展開式を利用する項とに分離して計算を行った。

なお、以下で論ずる“ $-$ ”を付した変位と応力は ε_0 および β に基づく無次元量であり、介在物とき裂の半径比を $\zeta (=d/c)$ 、ポアソン比を $\nu=0.3$ とした。

図2は $\zeta=0.5$ の場合における $\bar{w}_z$ の半径方向分布図である。 $\bar{w}_z$ は常に正で、 z/c が大きくなってき裂面から離れるとともにその値は減少する。また、いずれの $z/c (>0)$ の場合にも r/c が大きくなって介在物から離れるとともに $\bar{w}_z$ は単調に減少するが、 z/c が小さいほどその減少割合は大きく、 $r/c=0.8$ 近傍において z/c に関する $\bar{w}_z$ の大小関係は逆転し、傾向は逆になる。他方、き裂面における $(\bar{w}_z)_{z=0}$ は式(10)から明らかのようにポアソン比、すなわち無限体の材質には無関係で、 ζ のみに依存する。 $(\bar{w}_z)_{z=0}$ の半径方向こう配は介在物端部 ($r \rightarrow d+$) およびき裂縁 ($r \rightarrow c-$) でともに無限大になる。

図3は図2の場合に対応した $\bar{\sigma}_z$ の半径方向分布図である。 $\bar{\sigma}_z$ は $(\bar{w}_z)_{z=0}$ と同様に無限体の材質には無関係で、 ζ のみに依存する。 $z/c (>0)$ に関する $\bar{\sigma}_z$ はき裂面近傍で介在物の影響を強く受けるが、き裂面から離れるとともに滑らかな分布となり、 $z/c > 2$ においてそ

図2 $\bar{w}_z$ の分布 ($\zeta=0.5$)

図3 $\bar{\sigma}_z$ の分布 ($\zeta=0.5$)

図4 $(w_z)_{z=0}$ および $(\sigma_z)_{z=0}$ の分布

の影響は消失する。 $2 > z/c > 0$ に関する σ_z は $0.8 < r/c < 1.1$ において圧縮から引張応力に転じ、 $\sigma_z = 0$ を与える r/c 値は z/c とともに大きくなる。これに対して、 $(\sigma_z)_{z=0}$ は介在物接触域で圧縮応力、き裂外側領域で引張応力になる。介在物接触部ではその中心 $r=0$ で接触応力は最小になり、介在物端部に近づくとともに急激に増加する。また、接触応力は介在物端部およびき裂縁で特異性を有し、それぞれ負および正の無限大になる。き裂縁より外側の $(\sigma_z)_{z=0}$ は、 r の増加とともに急激に減少し、 $r/c \geq 1.6$ でほぼ零になって介在物の影響は消失する。

この種の問題で特に注目されるのはき裂面の变形や接触応力等である。中でもき裂面の变形は、 $(u_r)_{z=0} + (w_z)_{z=0}$ で与えられるが、本研究における $(u_r)_{z=0}$ は十分に小さいため近似的に $(w_z)_{z=0}$ がき裂面の变形を表すと考えられる。そこで、種々の ζ に対するき裂面の $(w_z)_{z=0}$ (破線) および $(\sigma_z)_{z=0}$ (実線) の分布を図4に示す。 $(w_z)_{z=0}$ の半径方向こう配はいずれの ζ に対しても介在物端部およびき裂縁で無限大になる。一方、介在物接触部の $(\sigma_z)_{z=0}$ はいずれの ζ に対しても圧縮応力であり、介在物の中心で最小になるが、その最小値は介在物半径が小さいほど大きくなる。また、き裂外側領域における $(\sigma_z)_{z=0}$ はいずれの ζ の場合にも引張応力であり、 ζ が小さいほど無限大への漸近のし方は急激になり、き裂先端部の $(\sigma_z)_{z=0}$ に及ぼす介在物の影響は局所的になる。

図5には式(22)に基づく係数 $K_{Ic}(x=c, d)$ の ζ による変化を示した。介在物端部の応力特異場の強さを表す係数 K_{Id} はいったん減少して $\zeta=0.6$ 近傍で最小になり、その後 ζ とともに増加する下に凸の曲線で与えられる。これに対して、無次元化した応力拡大係数 K_{Ic} は ζ とともに単調に増加する。Selvadurai ら⁽²⁾は

図5 K_I と ζ の関係

K_{Ic} の算出式を ζ の級数形で与え、さらに文献(10)で修正式を提案している。図中の○印はその修正式に基づく結果であり、 $\zeta \leq 0.35$ では本結果に一致するが、 $\zeta \geq 0.4$ においては本結果より常に小さく、 $\zeta=0.5$ では約1%、 $\zeta=0.8$ では約16%の差異を生ずる。

5. 結 言

無限体内部に存在する円形き裂が円板状剛体介在物によって開口する問題を三次元弾性論に基づいて解析し、変位と応力の分布および応力拡大係数等に及ぼす介在物とき裂の半径比による影響を明らかにした。これらを要約すれば以下のとおりである。

- (1) き裂面の $(w_z)_{z=0}$ および σ_z はともにポアソン比に無関係で、 $\zeta (=d/c)$ のみに存在する。 $(\sigma_z)_{z=0}$ は介在物接触部で圧縮応力であり、介在物の中心で最小になる。また、き裂外側領域の $(\sigma_z)_{z=0}$ は引張応力である。
- (2) K_{Ic} は ζ とともに単調に増加するが、 K_{Id} は $\zeta=0.6$ 近傍で最小となる下に凸の曲線で与えられる。

文 献

- (1) Tsai, Y., M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 51-4 (1984), 811.
- (2) Selvadurai, A. P. S. and Singh, B. M., *Int. J. Fract.*, 25 (1984), 69.
- (3) Selvadurai, A. P. S., *Mechanics of Material Interfaces*, Elsevier, Amsterdam, (1986), 157.
- (4) Cooke, J. C., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 16 (1963), 193.
- (5) 森口・ほか2名, 数学公式(III), (1963), 岩波書店.
- (6) 渋谷・ほか2名, 機論, 40-339 (1974), 2986.
- (7) 進藤, 機論, 46-402, A (1980), 150.
- (8) 野田・阿部, 機論, 49-444, A (1983), 952.
- (9) 渋谷, 機論, 41-347 (1975), 1957.
- (10) Selvadurai, A. P. S. and Singh, B. M., *Int. J. Fract.*, 29 (1985), R 19.