2 個のき裂を有する複合異方弾性体の縦せん断*

近 藤 俊 美^{*1}

Longitudinal Shear of Two Bonded Anisotropic Bodies with Two Cracks

Toshimi KONDO

This report deals with the interaction problem of two cracks in two bonded anisotropic elastic media under longitudinal shear. One crack is placed in one semi-infinite medium and the other in another semi-infinite medium. The singular point method is adopted to solve the problem. Numerical results are shown for the influences of the geometrical parameters of the crack arrangement and physical properties of the anisotropic bodies on the stress intensity factors.

Key Words: Elasticity, Anisotropic Body, Composite Materials, Interaction of Cracks, Singular Point Method, Stress Intensity Factor

1. 緒 言

き裂先端の応力拡大係数に及ぼすき裂間、あるいは複合材料における界面、ポイドや介在物などとの弾性干渉は、材料の破壊を理解する上で重要である。この種の問題に関して多くの研究がなされているが、そのほとんどが等方弾性体の場合であり^{(1)~(8)}、異方弾性体に関する知見は少ない^{(9)~(11)}。

本報は、二つの接合された異方性半無限体の接合面をはさんでその近傍に 1 個ずつき裂が存在する場合の縦せん断問題を特異点分布法を用いて解析し、き裂の応力拡大係数に及ぼす種々の因子の影響を明らかにしたものである。

2. 問題の呈示と解析

図 1 に示すように、弾性定数の異なる二つの異方性半無限体 (1) および (2) が接合境界 Γ_0 に完全に接合され、接合面近傍に長さの異なる 2 個のき裂 Γ_l (以後 $l=1$ は下半無限体, $l=2$ は上半無限体に関する量を表すものとする) が任意の角度 α_l で存在する。接合境界を x_f 軸とする直角座標系 (x_f, y_f) およびき裂 Γ_l と

Γ_2 にそれぞれ補助の座標系 (x_l, y_l) を定める。複合異方弾性体の無限遠方には一様な縦せん断応力 τ_0, τ_1 が作用するものとし、き裂の幾何学的配置についての諸元は図 1 のように定める。なお、本解析においては実用上重要な直交異方性体の場合にかぎり、異方性の弾性対称面は (x_f, y_f) 平面とし直線異方性を仮定した。本問題の境界条件は、2 個のき裂の縁は応力自由とし接合境界上で変位および対応する応力が連続とした。解析には、特異点分布法を用いる。複合弾性体の上半無限体と下半無限体にそれぞれ 1 個ずつらせん転位が

図 1 複合異方弾性体の接合境界近傍の 2 個のき裂と座標系

* 原稿受付 昭和 63 年 10 月 17 日。

^{*1} 正員, 長岡工業高等専門学校 (〒940 長岡市西片貝町 888)。

存在する場合の解から出発し、転位をき裂上に連続分布させ、問題をき裂上の未知密度関数に対する特異積分方程式⁽¹²⁾を解くことに帰着させる。詳細な解析の手順を略し密度関数 $b_l(s_l)$ に関する特異積分方程式のみを記せば次のようになる。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a_l}^{a_l} \frac{b_l(s_l)}{x_l - s_l} ds_l + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-a_l}^{a_l} m_{lj}(x_l, s_n) \times b_j(s_j) ds_j = C_l \quad (l=1, 2) \quad (1)$$

ここに

$$\begin{aligned} m_{11}(x_l, s_l) &= \text{Re} \left[\frac{(-1)^l k_l (k_1 - k_2) (K_{11} - K_{12})}{2k_l (k_1 + k_n) (1 + \gamma_{fl})} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{e^{ia_l l}}{\lambda_l e^{ia_l l} x_l - \lambda_l e^{-ia_l l} s_l - d_l - \bar{d}_l} \right] / K_l \\ m_{12}(x_l, s_n) &= \text{Re} \left[\frac{k_n (K_{11} - K_{12}) e^{ia_l l}}{(k_1 + k_2) (1 + \gamma_{fl})} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{\lambda_l e^{ia_l l} l - \lambda_n e^{ia_n l} s_n + d_l - \bar{d}_n} \right] / K_l \\ &\text{以上 } l=1, 2; n=2(l=2 \text{ の時}), n=1(l=1 \text{ の時}) \end{aligned} \quad (2)$$

また、定数等に関しては

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{2}{k_{11}^2 - k_{12}^2} \{ \tau_l \text{Im}[(k_{11} - k_{12}) \\ &\quad \times (K_{11} - K_{12}) e^{ia_l l} + \tau_0 \text{Re}[(k_{11} + k_{12}) \\ &\quad \times (K_{11} - K_{12}) e^{ia_l l}] \} / K_l \\ K_l &= \text{Re}[(K_{11} - K_{12}) / 2(1 + \Gamma_l)] \\ k_{111} &= C_{155} - C_{144}, \quad k_{112} = C_{155} + C_{144} \\ k_{11} &= k_{111} + \gamma_{fl} k_{12}, \quad k_{12} = k_{112} + \gamma_{fl} k_{122} \\ K_{11} &= k_{11} e^{-2ia_l l}, \quad K_{12} = k_{12} \\ k_l &= -(k_{11} - k_{12}) / 2(1 + \gamma_{fl}), \quad \gamma_{fl} = \Gamma_l e^{2ia_l l} \\ \lambda_l &= (1 + \Gamma_l) / (1 + \gamma_{fl}) \\ \tau_l (1 + \gamma_{fl}) / (k_{11} + k_{12}) &= \tau_2 (1 + \gamma_{f2}) / (k_{21} + k_{22}) \\ &\text{以上 } l=1, 2; n=2(l=2 \text{ の時}), n=1(l=1 \text{ の時}) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 C_{155} , C_{144} は異方性半無限体の弾性定数であり、 γ_{fl} は特性根⁽¹⁰⁾である。また、き裂の幾何学的位置を表すパラメータ d_l は

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= -ih_1(1 - \gamma_{f1}) / (1 + \gamma_{f1}) \\ d_2 &= w_2 + ih_2(1 - \gamma_{f2}) / (1 + \gamma_{f2}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

さらに、密度関数 $b_l(s_l)$ は次の条件を満たす。

$$\int_{-a_l}^{a_l} b_l(s_l) ds_l = 0 \quad (l=1, 2) \quad (5)$$

3. 数値計算結果

き裂の応力拡大係数に及ぼす種々の因子の影響を明らかにする。具体的には、異方性、接合面、き裂相互の幾何学的位置やき裂長さの比等の影響を検討した。表1は本解析において使用した弾性定数および複合弾性体の略号を表している。A は等方弾性体であり、B と

C は直交異方弾性体に相当する。これらの弾性定数を組合せた複合弾性体を表1のように表すことにした。表で A-A, B-B 等は均質弾性体を示している。き裂端 a_l , $-a_l$ の応力拡大係数 $k_3(a_l)$, $k_3(-a_l)$ の無次元量およびき裂の位置を表す l_1 , w_2 の無次元量は次のように定めた。

$$\left. \begin{aligned} K_3^*(\pm a_l) &= k_3(\pm a_l) / \tau_1 \sqrt{a_l} \\ &(\tau_1 \text{ と } \tau_2 \text{ のみが作用する場合}) \\ K_3^*(\pm a_l) &= k_3(\pm a_l) / \tau_0 \sqrt{a_l} \\ &(\tau_0 \text{ のみが作用する場合}) \\ L_1 &= l_1 / a_1, \quad W_2 = w_2 / a_1, \quad R = a_2 / a_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

表 1 弾性定数および複合弾性体の略号

	C_{55}	C_{45}	C_{44}	Lower Elastic Constants	Upper Elastic Constants	Symbols
A	1	0	1	A	A	A-A
					B	A-B
					C	A-C
B	1	0	2	B	B	B-B
C	1	0	0.5	C	C	C-C

(a)

(b)

図 2 2 個の平行き裂の応力拡大係数に及ぼす異方性、 R の影響

図 2 (a), (b) は, τ_0 のみが作用する場合について長さの異なる対称な二平行き裂の応力拡大係数に及ぼす異方性, $L_1 (=L_2)$ および R の影響を調べた一例である。図 2 (a) より, $K_3^*(a_2)$ は R に強く依存し, またどの R に対しても異方性の影響が顕著となる $L_1 (=L_2)$ の領域が存在することがわかる。図 2 (b) は $K_3^*(a_1)$ についての例である。 $R \neq 1.0$ の場合に $K_3^*(a_1)$ の極小値が存在している。

図 3 (a), (b) は, τ_0 のみが作用する場合について接合境界近傍の平行き裂の応力拡大係数に及ぼす接合面, R , W_2 および異方性の影響を調べた一例である。図 2 (a) より, $K_3^*(a_1)$ は両き裂の近接する部分 ($W_2 < 3.0$) で複雑に変化し, 接合面, 異方性および R の影響が顕著である。図 3 (b) は $R=1.0$ に固定して, $K_3^*(a_2)$ について調べたものだが, $K_3^*(a_2)$ の極大値は異方性, 接合境界に大きく依存している。

図 4 (a), (b) は, τ_1 と τ_2 のみが作用している場合について, 接合境界に垂直な平行二き裂の応力拡大係数に及ぼす接合面, R , W_2 , および異方性の影響を調べた一例である。図 4 (a) より, $K_3^*(a_1)$ は W_2 の小さ

いところで接合面, 異方性の影響が顕著であり, W_2 の増加とともに急激に減少し一定値に漸近することがわかる。図 4 (b) は, $R=1.0$ に固定し均質異方性体の場合を加えて示した例である。

図 5 (a), (b) は, τ_1 と τ_2 のみが作用する場合について $\alpha_1=90^\circ$, $R=1.0$, $L_1=L_2=0.05$ に固定し, 応力拡大係数に及ぼす α_2 , 接合面および異方性の影響を調べた一例である。 $K_3^*(a_1)$ および $K_3^*(-a_2)$ ともに α_2 の変化に強く依存し, 特に $K_3^*(a_1)$ は接合面異方性の影響が大きい。

図 6 (a), (b) は, τ_0 のみが作用する場合について $\alpha_1=0^\circ$, $L_1=L_2=0.05$ に固定し, 応力拡大係数に及ぼす α_2 , R , 接合面および異方性の影響を調べた一例である。図 6 (a) は, $R=1.0$ の場合が α_2 の変化に対して最も敏感であり, 接合面の影響も大きいことを示している。また, 図 6 (b) は, α_2 の変化に対して $K_3^*(-a_2)$ はどの R に対しても極値をとり, α_2 の増加とともに

(a)

(b)

図 3 接合面に平行な二き裂の応力拡大係数に及ぼす W_2 , R および異方性の影響

(a)

(b)

図 4 接合面に垂直な二き裂の応力拡大係数に及ぼす W_2 , R および異方性の影響

(a)

(b)

図 5 接合面近傍の 2 個のき裂の応力拡大係数に及ぼす α_2 , R および異方性の影響

接合面の影響が顕著となることを示している。なお図 5 と図 6 では、き裂先端 a_1 と $-a_2$ を結ぶ直線が接合境界と直交するものとした。

本報に対し、東北大学、関根英樹教授より有益なご教示をいただいた。ここに記してお礼申し上げる。

文 献

- (1) Sih, G. C., Boundary Problems for Longitudinal Shear Cracks, *Proc. Second Conf. Theo. Appl. Mech.*, (1964), 117, Pergamon Press.
- (2) Yokobori, T., Ohashi, M. and Ichikawa, M., The Interaction of Two Asymmetrical Elastic Cracks, *Rep. Res. Inst. Strength and Fracture of Materials.*, 1-2 (1965), 33.
- (3) 玉手・山田, 2 直線割れを有する弾性体の縦せん断応力, 機論, 37-303 (1971), 2107.
- (4) Ishida, M. (Sih, G. C 編), *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problem.*, (1973), 56, Noordhoff.
- (5) 玉手, 表面層を有する半無限体内の直線き裂端における縦せん断応力拡大係数について, 機論, 40-335 (1974), 1871.
- (6) Bassani, J. L. and Erdogan, F., Stress Intensity Factors

(a)

(b)

図 6 接合面近傍の 2 個のき裂の応力拡大係数に及ぼす α_2 , R および異方性の影響

in Bonded Half Planes Containing Inclined and Subjected to Antiplane Shear Loading, *Int. J. Fract.*, 15-2 (1979), 145.

- (7) Theocaris, P. S. and Demalos, C. B., Antiplane Shear Crack in an Infinite Plate with a Circular Inclusion, *Ing. Arch.*, 55-3 (1985), 295.
- (8) Chen, Y. Z., Multiple Crack Problems for Two Bonded Half-Plane and Antiplane Elasticity, *Eng. Fract. Mech.*, 25-1 (1986), 1.
- (9) Sih, G. C., Paris, P. C., and Irwin, G. R., On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies, *Int. J. Fract. Mech.*, 1-3 (1965), 189.
- (10) 近藤・関根・玉手, 縦せん断を受ける複合異方弾性体の接合面近傍の周期き裂群, 機論, 51-464, A (1985), 1235.
- (11) 近藤・関根・玉手, 縦せん断応力状態下にある異方性半無限体内のき裂と弾性補強板の干渉, 機論, 51-465, A (1985), 1367.
- (12) Erdogan, F. and Gupta, G. D., On the Numerical Solution of Singular Integral Equation, *Q. Appl. Math.*, 29-4 (1972), 525.