有限変形における非圧縮性材料と残差仕事の変分原理*

渡 部

修^{*1}Variational Principles for Incompressible Material
and Residual Work in Finite Deformation

Osamu WATANABE

The present paper proposes variational principles in finite deformation for a metal alloy showing predominant plastic flow or nearly incompressible material in elastic range, in order to improve the accuracy of numerical analysis. The variational theorems are presented in total Lagrangian formulation in terms of second Piola-Kirchhoff symmetric stress tensor, which can be easily reduced in an updated Lagrangian one. Attention is also focused on the unified derivation of mixed variational principles for residual work related to unbalanced forces which have not been studied previously.

Key Words: Variational Principle, Incompressible Material, Elastoplasticity, Residual Work, Finite Deformation, Finite Strain, Locking Phenomena

1. 結 言

有限変形を受ける弾塑性体の速度形変分原理は従来広く検討されているが、増分理論を適用した有限要素法の精度向上にかかる変分原理上の課題として、さらに次の事項が挙げられる。

(1) 金属材料の塑性域が卓越するとき、弾性体積ひずみを正確に近似しないと解の精度が低下するロッキング現象が生ずること。

(2) 非圧縮性に近い挙動を示す材料に対し通常のポテンシャルエネルギー停留原理を適用すると、弾性体積ひずみによる仕事が増大に評価され誤差を含みやすいこと。

(3) 増分計算毎に残差仕事を考慮しないと、誤差の累積が増大になること。

塑性によるロッキング現象に対して、Nagtegaalら⁽¹⁾は微少変形理論においてひずみエネルギーを偏差成分と平均成分に分離し、変位と平均ひずみを変数とする仮想仕事の原理を導き解の精度を向上させた。また非圧縮性材料の精度低下に対して、Hermann⁽²⁾は

Lameの定数 λ_0 にかかるひずみエネルギーに対してLegendre変換を行い、変位と平均応力を変数とする混合形変分原理を微少変形において求めた。Taylorら⁽³⁾やKey⁽⁴⁾は熱ひずみがある場合についてHermannの原理を拡張し、Atluri⁽⁵⁾は更新する座標系において有限変形を受ける非圧縮性材料の変分原理を示した。また残差仕事は仮想仕事の原理において検討されているが⁽⁶⁾、混合形変分原理での取扱いを示した研究はない。

著者は前報⁽⁷⁾において、有限変形を受ける弾塑性体の速度形変分原理を更新しない座標系で示した。本研究はさらに上記の非圧縮性材料および残差仕事に対する変分原理を、第2種のPiola-Kirchhoffの応力を用い更新しない座標で示す。

2. 塑性の非圧縮性

金属材料において、塑性変形は通常非圧縮性を仮定するため偏差成分で表示でき、体積ひずみは弾性成分だけとなる。内部仕事は、塑性を伴う偏差成分と弾性体積による平均成分に分離できる。塑性変形が卓越した場合、弾性ひずみによる仕事を正確に考慮しないと、予想される値より剛な結果を与えるロッキング現象が生ずる。Nagtegaalら⁽¹⁾が求めた微少変形での変分原

* 平成元年1月25日 第955回講演会において講演、原稿受付 昭和63年7月1日。

^{*1} 正員、筑波大学構造工学系 (〒305 つくば市天王台1-1-1)。

理を有限変形のそれに拡張する。

2.1 テンソルの内積 A, B, C を 2 階のテンソル, I を単位テンソルとし, $\text{tr} A = A : I$ とすると, テンソルどうしの内積には次の性質がある。

$$(A \cdot B) : C = A : (C \cdot B^t) = B : (A^t \cdot C) \cdots (1)$$

ここで記号「 t 」は転置を表す。また

$$A : B = A^t : B^t \cdots (2)$$

であることから次のことが成立する。

$$A = A^t \text{ ならば } A : B = A : B_s \cdots (3)$$

$$A = -A^t \text{ ならば } A : B = A : B_a \cdots (4)$$

$$\text{一般に } A : B = A_s : B_s + A_a : B_a \cdots (5)$$

ここで記号「 $( )_s$ 」, 「 $( )_a$ 」は「 $( )$ 」内のテンソルの対称成分と反対称成分を表す。

$$B_s \equiv \frac{1}{2}(B + B^t) \cdots (6 \cdot a)$$

$$B_a \equiv \frac{1}{2}(B - B^t) \cdots (6 \cdot b)$$

2.2 構成方程式

2.2.1 変形後の状態 C における表示 Prager の移動硬化則に基づく弾塑性体の構成方程式は, 次のように表示できる⁽⁷⁾。

$$\begin{aligned} \dot{T}_G = \frac{1}{J} \left[2\mu_0 D + \lambda_0 (\text{tr} D) I - 2\mu_0 J^2 \frac{(T' - A')}{C(S_y^0)^2} \right. \\ \left. \times \langle (T' - A') : D \rangle \right] \cdots (7) \end{aligned}$$

ここで $\dot{T}_G$ は Green-Naghdi 速度で次式で与えられる。

$$\dot{T}_G \equiv \dot{T} - \Omega \cdot T + T \cdot \Omega + (\text{tr} D) T \cdots (8)$$

ここに, T は Cauchy の真応力, D はストレッチング, μ_0 と λ_0 は Lamé の定数, S_y^0 は降伏曲面の大きさ, A' は降伏曲面の中心, C は移動硬化にかかる材料定数である。また記号「 $\dot{}$ 」は物質微分を, 記号「 $\langle \rangle$ 」は偏差成分を表す。 J および Ω は次のように定義される。

$$J \equiv \frac{dV}{dV_0}, \quad \Omega \equiv \dot{R} \cdot R^t \cdots (9)$$

ここで, dV_0 と dV はそれぞれ変形前後の体積要素であり, R は変形こう配テンソル F の極分解 $F = R \cdot U$ における直交テンソルである。式(7)をまず偏差成分と平均成分に分離する。

$$\dot{T}_G = \frac{2\mu_0}{J} \left[D' - \frac{J^2(T' - A')}{C(S_y^0)^2} \langle (T' - A') : D \rangle \right] \cdots (10 \cdot a)$$

$$\dot{T}_{Gm} = \frac{3K_0}{J} D_m \cdots (10 \cdot b)$$

ここで

$$T = T' + T_m I \cdots (11 \cdot a)$$

$$D = D' + D_m I \cdots (11 \cdot b)$$

$$\dot{T}_G = \dot{T}'_G + \dot{T}_{Gm} I \cdots (11 \cdot c)$$

としている。式(11)の定義は次のとおりである。

$$T_m \equiv \frac{1}{3}(T : I), \quad T' \equiv T - T_m I \cdots (12 \cdot a)$$

$$D_m \equiv \frac{1}{3}(D : I), \quad D' \equiv D - D_m I \cdots (12 \cdot b)$$

$$\dot{T}_m \equiv \frac{1}{3}(\dot{T} : I), \quad \dot{T}' \equiv \dot{T} - \dot{T}_m I \cdots (12 \cdot c)$$

したがって, $\dot{T}'_G$ と $\dot{T}_{Gm}$ は次のようになる。

$$\dot{T}'_G = \dot{T}' - (\Omega \cdot T')' + (T' \cdot \Omega)' + 3D_m T' \cdots (13 \cdot a)$$

$$\dot{T}_{Gm} = \dot{T}_m - (\Omega \cdot T)_m + (T \cdot \Omega)_m + 3D_m T_m \cdots (13 \cdot b)$$

ここで式(1), (5)と $\Omega = -\Omega^t$, $T = T^t$ を用いると

$$(\Omega \cdot T)_m = \frac{1}{3}(\Omega \cdot T : I) = \frac{1}{3}(\Omega : T^t) = 0 \cdots (14)$$

となるので, 式(13)は次のように変形できる。

$$\dot{T}'_G = \dot{T}' - \Omega \cdot T + T \cdot \Omega + 3D_m T' \cdots (15 \cdot a)$$

$$\dot{T}_{Gm} = \dot{T}_m + 3D_m T_m \cdots (15 \cdot b)$$

また式(10・b)中の K_0 は体積弾性率で次式のとおる。

$$3K_0 = 3\lambda_0 + 2\mu_0 \cdots (16)$$

次に逆変換を求める。式(7)の逆変換は次のとおり⁽⁷⁾。

$$\begin{aligned} D = J \left[\frac{1}{2\mu_0} \dot{T}_G - \frac{\lambda_0}{6\mu_0 K_0} (\text{tr} \dot{T}_G) I \right. \\ \left. + \frac{J^2(T' - A')}{2\mu_0(C - I)(S_y^0)^2} \langle (T' - A') : \dot{T}_G \rangle \right] \cdots (17) \end{aligned}$$

したがって式(17)は次のように偏差, 平均成分に分離できる。

$$D' = \frac{J}{2\mu_0} \left[\dot{T}'_G + \frac{J^2(T' - A')}{(C - I)(S_y^0)^2} \langle (T' - A') : \dot{T}'_G \rangle \right] \cdots (18 \cdot a)$$

$$D_m = \frac{J}{3K_0} \dot{T}_{Gm} \cdots (18 \cdot b)$$

2.2.2 変形前の状態 C_0 での表示 式(7), (10), (17), (18)の構成方程式を変形前の状態 C_0 での量を用いて表す。応力速度 $\dot{T}_G$ は次のように変換する⁽⁷⁾。

$$\dot{T}_{G0} \equiv JF^{-1} \cdot \dot{T}_G \cdot F^{-t} \cdots (19)$$

$\dot{T}_{G0}$ は, $\dot{T}_G$ の偏差, 平均成分に対応させ, 次のように分解する。

$$\dot{T}_{G0} = \dot{T}'_{G0} + \dot{T}_{G0m} \cdots (20)$$

ここで

$$\dot{T}'_{G0} \equiv JF^{-1} \cdot \dot{T}'_G \cdot F^{-t} \cdots (21 \cdot a)$$

$$\dot{T}_{G0m} \equiv JF^{-1} \cdot \dot{T}_{Gm} \cdot F^{-t} \cdots (21 \cdot b)$$

したがって, $\dot{T}_{G0m}$ は式(21・b)から次のように表示できる。

$$\dot{T}_{G0m} \equiv \dot{T}_{G0m} C^{-1} = J \dot{T}_{Gm} C^{-1} \cdots (22)$$

ここで, C は右 Cauchy-Green 変形テンソルで

$$C = F^t \cdot F \cdots (23)$$

である。ここで $\dot{T}'_{G0}$ と C との内積をとると,

$$\begin{aligned}\dot{T}'_{C_0} : C &= J(F^{-1} \cdot \dot{T}'_C \cdot F^{-t}) : (F^t \cdot F) \\ &= J \dot{T}'_C : I = 0 \dots\dots\dots (24)\end{aligned}$$

となる。式(21・a), (11・c), (1)を用いた。したがって、式(20), (22), (24)から次のことがわかる。

$$\dot{T}_{C_0m} = \frac{1}{3}(\dot{T}_{C_0} : C) \dots\dots\dots (25)$$

応力速度の平均値を求めるのに、変形後の状態 C では式(13・a)のように I との内積をとるのに対し、変形前では式(25)のように C との内積をとるほうが合理的である。式(22)を式(20)に代入して次の表示を得る。

$$\dot{T}_{C_0} = \dot{T}'_{C_0} + \dot{T}_{C_0m} C^{-1} \dots\dots\dots (26)$$

また、応力 T の変形前の量は次のように与えられる。

$$T_{(2)} = JF^{-1} \cdot T' \cdot F^{-t} \dots\dots\dots (27)$$

$T_{(2)}$ は第2種の Piola-Kirchhoff の応力である。 $T_{(2)}$ も $\dot{T}_{C_0}$ と同様に次のように分解できる。

$$T_{(2)} = T'_{(2)} + T_{(2)m} = T'_{(2)} + T_{(2)m} C^{-1} \dots\dots\dots (28)$$

ここで

$$T'_{(2)} \equiv JF^{-1} \cdot T' \cdot F^{-t} \dots\dots\dots (29\cdot a)$$

$$T_{(2)m} \equiv JF^{-1} \cdot (T_m I) \cdot F^{-t} = JT_m C^{-1} \dots\dots\dots (29\cdot b)$$

式(28), (29・b)から、 $T_{(2)m}$ は T_m と次の関係がある。

$$T_{(2)m} = JT_m \dots\dots\dots (30)$$

式(24), (25)と同様に、 $T_{(2)}$ においても次式が成立する。

$$T_{(2)m} = \frac{1}{3}(T_{(2)} : C) \dots\dots\dots (31\cdot a)$$

$$T'_{(2)} : C = 0 \dots\dots\dots (31\cdot b)$$

$A_{(2)}$ も $T_{(2)}$ と同様に定義できる。

次に、ひずみ速度 D の変形前の状態 C_0 での量を次のように求める。

$$\dot{E} = F^t \cdot D \cdot F \dots\dots\dots (32)$$

$\dot{E}$ は Green-Lagrange のひずみ速度である。 $\dot{E}$ の偏差、平均成分は D のそれらに対応させ次のように置く。

$$\dot{E} = \dot{E}' + \dot{E}_m \dots\dots\dots (33)$$

ここで

$$\dot{E}' \equiv F^t \cdot D' \cdot F \dots\dots\dots (34\cdot a)$$

$$\dot{E}_m \equiv F^t \cdot (D_m I) \cdot F = D_m C \dots\dots\dots (34\cdot b)$$

$\dot{E}_m$ は式(34・b)から次のように置くと

$$\dot{E}_m = \dot{E}_m C \dots\dots\dots (35)$$

式(34・b), (35)から、 D_m と $\dot{E}_m$ は一致することがわかる。

$$\dot{E}_m = D_m \dots\dots\dots (36)$$

また、 $\dot{E}'$ と C^{-1} との内積をとると

$$\begin{aligned}\dot{E}' : C^{-1} &= (F^t \cdot D' \cdot F) : (F^{-1} \cdot F^{-t}) = D' : I = 0 \\ &\dots\dots\dots (37)\end{aligned}$$

となる。ここで式(34・a), (1), (12・b)を用いた。したがって式(33), (35), (37)から次のことがわかる。

$$\dot{E}_m = \frac{1}{3}(\dot{E} : C^{-1}) \dots\dots\dots (38)$$

ひずみ速度の平均値を求めるのに、変形後の状態 C では式(12・b)のように I との内積をとるのに対し、変形前では式(38)のように C^{-1} との内積をとる。式(35)を式(33)に代入し次の表示を得る。

$$\dot{E} = \dot{E}' + \dot{E}_m C \dots\dots\dots (39)$$

以上の準備の下に、式(10)の構成方程式に対し、左側から JF^{-1} 、右側から F^{-t} をかけると、

$$\begin{aligned}\dot{T}'_{C_0} &= 2\mu_0 \left[C^{-1} \cdot \dot{E}' \cdot C^{-1} - \frac{(T'_{(2)} - A'_{(2)})}{C(S_y^0)^2} \right. \\ &\quad \left. \times \langle T'_{(2)} - A'_{(2)} : \dot{E}' \rangle \right] \dots\dots\dots (40\cdot a)\end{aligned}$$

$$\dot{T}_{C_0m} = 3K_0 C^{-1} \cdot \dot{E}_m \cdot C^{-1} \dots\dots\dots (40\cdot b)$$

となる。ここで式(21), (26), (34), (39), (29), (23)を用いた。また式(40・b)は式(22), (35)を用いると次のとおり。

$$\dot{T}_{C_0m} = 3K_0 \dot{E}_m \dots\dots\dots (41)$$

式(40・a), (40・b)を足し合せると次のとおり。

$$\begin{aligned}\dot{T}_{C_0} &= \left[2\mu_0 C^{-1} \cdot \dot{E} \cdot C^{-1} + 3\lambda_0 \dot{E}_m C^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\mu_0(T'_{(2)} - A'_{(2)})}{C(S_y^0)^2} \langle (T'_{(2)} - A'_{(2)}) : \dot{E} \rangle \right] \dots\dots\dots (42)\end{aligned}$$

また式(18)の逆変換の構成方程式に対し、左側から F^t 、右側から F をかけると、

$$\begin{aligned}\dot{E}' &= \frac{1}{2\mu_0} \left[C \cdot \dot{T}'_{C_0} \cdot C + \frac{C \cdot (T'_{(2)} - A'_{(2)}) \cdot C}{(C-1)(S_y^0)^2} \right. \\ &\quad \left. \times \langle C \cdot (T'_{(2)} - A'_{(2)}) \cdot C : \dot{T}'_{C_0} \rangle \right] \dots\dots\dots (43\cdot a)\end{aligned}$$

$$\dot{E}_m = \frac{1}{3K_0} C \cdot \dot{T}_{C_0m} \cdot C \dots\dots\dots (43\cdot b)$$

式(43・b)は式(22), (35)を用いると

$$\dot{E}_m = \frac{1}{3K_0} \dot{T}_{C_0m} \dots\dots\dots (44)$$

となる。式(43・a), (43・b)を足し合せると次のとおり。

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \left[\frac{1}{2\mu_0} C \cdot \dot{T}_{C_0} \cdot C - \frac{\lambda_0}{2\mu_0 K_0} \dot{T}_{C_0m} C \right. \\ &\quad \left. + \frac{C \cdot (T'_{(2)} - A'_{(2)}) \cdot C}{2\mu_0(C-1)(S_y^0)^2} \langle C \cdot (T'_{(2)} - A'_{(2)}) \right. \\ &\quad \left. \cdot C : \dot{T}_{C_0} \rangle \right] \dots\dots\dots (45)\end{aligned}$$

次に、第2種の Piola-Kirchhoff 応力速度 $\dot{T}_{(2)}$ を用いて構成方程式を表示する。 $\dot{T}_{(2)}$ は式(27)から

$$\dot{T}_{(2)} = JF^{-1} \cdot \dot{T}_T \cdot F^{-t} \dots\dots\dots (46)$$

となる。 $\dot{T}_T$ は Truesdell の応力速度で次のとおり⁽⁸⁾。

$$\dot{T}_T \equiv \dot{T} - L \cdot T - T \cdot L + (\text{tr} D) T \dots\dots\dots (47)$$

ここで L は速度こう配テンソルである。 $\dot{T}_T$ と $\dot{T}_C$ の関係は次のとおりである。

$$\dot{T}_T = \dot{T}_C - (L - \Omega) \cdot T - T \cdot (L^t + \Omega) \dots\dots\dots (48)$$

$\dot{T}_T$ を次のように偏差, 平均成分に分けると

$$\dot{T}_T = \dot{T}'_T + \dot{T}_{Tm} I \quad \dots\dots\dots (49)$$

$\dot{T}_{(2)}$ の偏差, 平均成分は式(46)から次のとおり.

$$\dot{T}_{(2)} = \dot{T}'_{(2)} + \dot{T}_{(2)m} \quad \dots\dots\dots (50)$$

ここで

$$\dot{T}'_{(2)} \equiv J F^{-1} \cdot \dot{T}'_T \cdot F^{-t} \quad \dots\dots\dots (51 \cdot a)$$

$$\dot{T}_{(2)m} \equiv J F^{-1} \cdot (\dot{T}_{Tm} I) \cdot F^{-t} = J \dot{T}_{Tm} C^{-1} \quad \dots\dots\dots (51 \cdot b)$$

特に $\dot{T}_{(2)m}$ は次のように置くと

$$\dot{T}_{(2)m} = \dot{T}_{(2)m} C^{-1} \quad \dots\dots\dots (52)$$

式(51・b), (52)から次のことがわかる.

$$\dot{T}_{(2)m} = J \dot{T}_{Tm} \quad \dots\dots\dots (53)$$

一方, 式(48)を偏差, 平均成分に分けると,

$$\dot{T}'_T = \dot{T}'_G - \{(L - \Omega) \cdot T\}' - \{T \cdot (L' + \Omega)\}' \quad (54 \cdot a)$$

$$\dot{T}_{Tm} = \dot{T}_{Gm} - \{(L - \Omega) \cdot T\}_m - \{T \cdot (L' + \Omega)\}_m \quad \dots\dots\dots (54 \cdot b)$$

ここで L をストレッチング D とスピン W に分解して

$$L = D + W \quad \dots\dots\dots (55)$$

とすると, $W = -W'$ であるから $(\Omega \cdot T)_m$ と同様にし

$$(W \cdot T)_m = \frac{1}{3} (W \cdot T : I) = \frac{1}{3} (W : T') = 0 \quad (56)$$

となり, $D = D'$ であるから次式が得られる.

$$(D \cdot T)_m = \frac{1}{3} (D \cdot T : I) = (D' \cdot T')_m + D_m T_m \quad \dots\dots\dots (57)$$

式(14), (56), (57)から

$$\{(L - \Omega) \cdot T\}' = (L - \Omega) \cdot T - (D \cdot T)_m I \quad \dots\dots\dots (58)$$

となる. 同様にして次式を得る.

$$\{T \cdot (L' + \Omega)\}' = T \cdot (L' + \Omega) - (T \cdot D)_m I \quad \dots\dots\dots (59)$$

式(58), (59)を式(54)に代入し, 式(52), (51)を用いると

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{(2)} &= \dot{T}'_{G0} - C^{-1} \cdot (L_0 - \Omega_0) \cdot T_{(2)} \\ &\quad - T_{(2)} \cdot (L'_0 + \Omega'_0) \cdot C^{-1} + 2(\dot{E} \cdot T_{(2)})_m C^{-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (60 \cdot a)$$

$$\dot{T}_{(2)m} = \dot{T}_{G0m} - 2(\dot{E} \cdot T_{(2)})_m \quad \dots\dots\dots (60 \cdot b)$$

ここで

$$\begin{aligned} J(D \cdot T)_m &= J(T \cdot D)_m = \frac{J}{3} (D \cdot T : I) \\ &= \frac{J}{3} (F' \cdot D \cdot F \cdot F^{-1} \cdot T \cdot F^{-t}) : I = (\dot{E} \cdot T_{(2)})_m \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (61)$$

を用いている. また L_0 と Ω_0 は $\dot{E}$ と同様に

$$L_0 = F' \cdot L \cdot F, \quad \Omega_0 = F' \cdot \Omega \cdot F \quad \dots\dots\dots (62)$$

とする. したがって, $\dot{T}_{(2)}$ を用いた構成方程式は, 式(60)を式(40)に代入して次のようになる.

$$\dot{T}_{(2)} + C^{-1} \cdot (L_0 - \Omega_0) \cdot T_{(2)} + T_{(2)} \cdot (L'_0 + \Omega'_0) \cdot C^{-1}$$

$$\begin{aligned} &- 2(\dot{E} \cdot T_{(2)})_m C^{-1} = 2\mu_0 \left[C^{-1} \cdot \dot{E}' \cdot C^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\dot{T}'_{(2)} - A'_{(2)})}{C(S_y^0)^2} \langle (\dot{T}'_{(2)} - A'_{(2)}) : \dot{E}' \rangle \right] \quad \dots\dots\dots (63 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\dot{T}_{(2)m} + 2(\dot{E} \cdot T_{(2)})_m = 3K_0 \dot{E}_m \quad \dots\dots\dots (63 \cdot b)$$

式(63・a), (63・b)を足し合せると次のとおりである.

$$\begin{aligned} \dot{T}_{(2)} + C^{-1} \cdot (L_0 - \Omega_0) \cdot T_{(2)} + T_{(2)} \cdot (L'_0 + \Omega'_0) \cdot C^{-1} \\ = 2\mu_0 C^{-1} \cdot \dot{E}' \cdot C^{-1} + 3\lambda_0 \dot{E}_m C^{-1} \\ - \frac{2\mu_0(\dot{T}'_{(2)} - A'_{(2)})}{C(S_y^0)^2} \langle \dot{T}'_{(2)} - A'_{(2)} : \dot{E}' \rangle \quad \dots\dots\dots (64) \end{aligned}$$

2.3 エネルギー関数 以上の構成方程式をエネルギーを用いて表示する. 式(42), (26)を用いると

$$U^p = \frac{1}{2} (\dot{T}_{G0} : \dot{E}) = \frac{1}{2} (\dot{T}'_{G0} + \dot{T}_{G0m} C^{-1}) : \dot{E} \quad (65)$$

となる. したがって, U^p の偏差成分は次のとおりである.

$$\begin{aligned} U^{p'} &= \frac{1}{2} \dot{T}'_{G0} : \dot{E}' = \frac{1}{2} \dot{T}'_{G0} : \dot{E}' \\ &= \mu_0 \left[(\dot{E}' \cdot C^{-1}) : (C^{-1} \cdot \dot{E}') \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{C(S_y^0)^2} \langle (\dot{T}'_{(2)} - A'_{(2)}) : \dot{E}' \rangle^2 \right] \quad \dots\dots\dots (66 \cdot a) \end{aligned}$$

ここで式(39), (37), (40・a)を用いている. 平均成分は

$$\begin{aligned} U^{p_m} &= \frac{1}{2} \dot{T}_{G0m} C^{-1} : \dot{E}' = \frac{3}{2} \dot{T}_{G0m} \dot{E}_m \\ &= \frac{9}{2} K_0 \dot{E}_m^2 \quad \dots\dots\dots (66 \cdot b) \end{aligned}$$

ここで式(22), (39), (37)を用いている. このとき

$$\frac{\partial U^p}{\partial \dot{E}} = \dot{T}_{G0}, \quad \frac{\partial U^{p'}}{\partial \dot{E}'} = \dot{T}'_{G0}, \quad \frac{\partial U^{p_m}}{\partial \dot{E}_m} = 3\dot{T}_{G0m} \quad \dots\dots\dots (67)$$

は明らかである. コンプリメンタリエネルギー U_0^c は Legendre 変換から求める. 偏差成分は

$$\begin{aligned} U_0^{c'} &= \dot{T}'_{G0} : \dot{E}' - U^{p'} = \frac{1}{2} \dot{T}'_{G0} : \dot{E}' \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \left[(\dot{T}'_{G0} \cdot C) : (C \cdot \dot{T}'_{G0}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle C \cdot (\dot{T}'_{(2)} - A'_{(2)}) \cdot C : \dot{T}'_{G0} \rangle^2}{(C-1)(S_y^0)^2} \right] \quad \dots\dots\dots (68 \cdot a) \end{aligned}$$

となる. ここで式(66・a), (43・a)を用いた. 平均成分は

$$\begin{aligned} U_0^c &= 3\dot{T}_{G0m} \dot{E}_m - U^{p_m} = \frac{3}{2} \dot{T}_{G0m} \dot{E}_m \\ &= \frac{1}{2K_0} (\dot{T}_{G0m})^2 \quad \dots\dots\dots (68 \cdot b) \end{aligned}$$

となる. ここで式(66・b), (44)を用いた. このとき,

$$\frac{\partial U_0^{c'}}{\partial \dot{T}'_{G0}} = \dot{E}', \quad \frac{\partial U_0^c}{\partial \dot{T}_{G0m}} = 3\dot{E}_m \quad \dots\dots\dots (69)$$

となる. 次に $\dot{T}_{(2)}$ に対するひずみエネルギー $U_{(2)}^p$ は, $\dot{E}$ の変分を $\delta \dot{E}$ として, 次のように定義できるので⁽⁷⁾,

$$\delta U_{(2)}^p \equiv \dot{T}_{(2)} : \delta \dot{E} \quad \dots\dots\dots (70)$$

式(28), (39)を式(70)に代入し, 式(31・b), (37)を用いると,

$$\begin{aligned}\delta U_{(2)} &= (\dot{T}_{(2)} + \dot{T}_{(2)m} C^{-1}) : (\delta \dot{E}' + \delta \dot{E}_m C) \\ &= \dot{T}_{(2)} : \delta \dot{E}' + 3 \dot{T}_{(2)m} \delta \dot{E}_m \cdots \cdots (71)\end{aligned}$$

となるので, ひずみエネルギーの偏差, 平均成分は次のように定義できる.

$$\delta U_{(2)} \equiv \dot{T}_{(2)} : \delta \dot{E}', \quad \delta U_{(2)m} \equiv 3 \dot{T}_{(2)m} \delta \dot{E}_m \cdots (72 \cdot a)$$

すなわち, 式(72・a)から次の関係式が成立する.

$$\frac{\partial U_{(2)}}{\partial \dot{E}'} = \dot{T}_{(2)}, \quad \frac{\partial U_{(2)m}}{\partial \dot{E}_m} = 3 \dot{T}_{(2)m} \cdots \cdots (72 \cdot b)$$

$\dot{T}_{(2)}$ と $\dot{T}_{G0}$ の関係式(60)を用いると, $U_{(2)}'$ と $U_{(2)m}$ は

$$\begin{aligned}U_{(2)}' &= U_{(2)}' - \{C^{-1} \cdot (L_0 - \Omega_0) \cdot T_{(2)}\} : \dot{E}' \\ &\quad - \{T_{(2)} \cdot (L_0 + \Omega_0) \cdot C^{-1}\} : \dot{E}' \cdots \cdots (73 \cdot a)\end{aligned}$$

$$U_{(2)m} = U_{(2)m} - 6(\dot{E} \cdot T_{(2)})_m \dot{E}_m \cdots \cdots (73 \cdot b)$$

なる関係がある. ここで式(37), (38)を用いている. 式(73)から, $U_{(2)}'$ と $U_{(2)m}$ は次の変数の関数である.

$$U_{(2)}' = U_{(2)}'(\dot{E}'), \quad U_{(2)m} = U_{(2)m}(\dot{E}_m) \cdots \cdots (74)$$

またコンプリメンタリエネルギーは Legendre 変換から求めると, 次の関係がある.

$$U_{(2)}' = \dot{T}_{(2)} : \dot{E}' - U_{(2)}' = U_{(2)}'(\dot{T}_{(2)}) \cdots \cdots (75 \cdot a)$$

$$U_{(2)m} = 3 \dot{T}_{(2)m} \dot{E}_m - U_{(2)m} = U_{(2)m}(\dot{T}_{(2)m}) \cdots (75 \cdot b)$$

式(75・a)に対し式(73・a), (60・a)を用い, 式(75・b)に対し式(73・b), (60・b)を用いて変形した. 式(75)中の $U_{(2)}'$ は式(60・a)から $\dot{T}_{(2)}$ を用い, $U_{(2)m}$ は式(60・b)から $\dot{T}_{(2)m}$ を用いて表示する. このとき次式は明らかである.

$$\frac{\partial U_{(2)}'}{\partial \dot{T}_{(2)}} = \dot{E}', \quad \frac{\partial U_{(2)m}}{\partial \dot{T}_{(2)m}} = 3 \dot{E}_m \cdots \cdots (76)$$

2.4 変分原理 前報において求めた⁽⁷⁾ Hu-Washizu の原理の変数を偏差, 平均成分に分離して表示する. 変形前のスピン $\dot{S}$ は W と同様に平均成分が零であるので次のように表示できる.

$$\begin{aligned}\Pi_{(2)}^{HW}(\dot{u}, \dot{E}', \dot{E}_m, \dot{S}, \dot{T}_{(2)}, \dot{T}_{(2)m}) &= \int [U_{(2)}'(\dot{E}') \\ &\quad + U_{(2)m}(\dot{E}_m) + T_{(2)}' : (\dot{F}^t \cdot \dot{u} \nabla_0) - (\dot{T}_{(2)}' \\ &\quad + \dot{T}_{(2)m} C^{-1}) \\ &\quad : \{\dot{E}' + \dot{E}_m C + \dot{S} - (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)' - (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_m C\} \\ &\quad - \rho_0 \dot{\alpha}_0 \cdot \dot{u}] dV_0 - \int \dot{t}_0 \cdot \dot{u} dS_{t_0} - \int \dot{t}_0 \cdot (\dot{u} - \dot{u}) dS_{u_0} \\ &\cdots \cdots (77)\end{aligned}$$

ここで, $\dot{u}$ は変位速度, ∇_0 は変形前の形状に対するこの配演算子, $\dot{\alpha}_0$ は物体力速度, ρ_0 は密度, $\dot{t}_0$ は表面力速度で, 記号, 「 $\cdot$ 」は与えられた量であることを表す. S_{t_0} は力学的境界, S_{u_0} は幾何学的境界を表す. また

$$(F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_m = \frac{1}{3} (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0) : C^{-1} \cdots \cdots (78 \cdot a)$$

$$(F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)' = (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0) - (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_m C \cdots (78 \cdot b)$$

である. 式(77)の付帯条件は $\dot{E}'$ が対称テンソル, $\dot{S}$ が反対称テンソルである. ここで

$$\dot{E}' = \{(F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)\}_s = (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_s - (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_m C \cdots \cdots (79 \cdot a)$$

$$\dot{S} = \{(F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)'\}_a = (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_a \cdots \cdots (79 \cdot b)$$

として, 偏差成分については変位形, 平均成分については混合形のそのままにして式(77)を変形すると,

$$\begin{aligned}\Pi_{(2)}^N(\dot{u}, \dot{E}_m, \dot{T}_{(2)m}) &= \int [U_{(2)}'(\dot{u}) \\ &\quad + \frac{1}{2} T_{(2)} : (\nabla_0 \dot{u} \cdot \dot{u} \nabla_0) \\ &\quad + \frac{9}{2} K_0 \dot{E}_m^2 - 6(\dot{E} \cdot T_{(2)})_m \dot{E}_m \\ &\quad - 3 \dot{T}_{(2)m} \{\dot{E}_m - (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_m\} \\ &\quad - \rho_0 \dot{\alpha}_0 \cdot \dot{u}] dV_0 - \int \dot{t} \cdot \dot{u} dS_{t_0} \cdots \cdots (80)\end{aligned}$$

となる. 式(80)中の $(\dot{E} \cdot T_{(2)})_m$ は式(57), (61)から

$$(\dot{E} \cdot T_{(2)})_m = (\dot{E}' \cdot T_{(2)})_m + \dot{E}_m T_{(2)m} \cdots \cdots (81)$$

として, 式(81)中の $\dot{E}'$ は式(79・a)を用いる. さらに, 式(63・b)を用いて, $\dot{T}_{(2)m}$ を消去すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}\Pi_{(2)}^N(\dot{u}, \dot{E}_m) &= \int [U_{(2)}'(\dot{u}) + \frac{1}{2} T_{(2)} : (\nabla_0 \dot{u} \cdot \dot{u} \nabla_0) \\ &\quad - \frac{9}{2} K_0 \{\dot{E}_m^2 - 2 \dot{E}_m (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_m\} \\ &\quad - 6(\dot{E} \cdot T_{(2)})_m (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_m \\ &\quad - \rho_0 \dot{\alpha}_0 \cdot \dot{u}] dV_0 - \int \dot{t} \cdot \dot{u} dS_{t_0} \cdots \cdots (82)\end{aligned}$$

式(82)は Nagtegaal らが求めた変分原理の有限変形での表示である. また式(82)から Updated 形の表示も容易に得ることができる.

3. 弾性の非圧縮性

ロケットの固体燃料などのように, 弾性においても非圧縮性に近い挙動を示す材料がある. このときのポアソン比 ν_0 は 0.5 に近くなるため, 構成方程式中の Lamé の定数 λ_0 が無限大に近づき計算条件が悪くなる. ここでは Hermann⁽²⁾が求めた混合形変分原理の有限変形での定式化を示す.

3.1 構成方程式 変形後の状態 C における構成方程式(7)を, 塑性の項を省略し, λ_0 にかかる項とそうでない項に次のように分離する.

$$\dot{T}_G = \dot{T}_{G\mu} + \dot{T}_{G\lambda} \cdots \cdots (83)$$

ここで

$$\dot{T}_{G\mu} = \frac{2\mu_0}{J} D \cdots \cdots (84 \cdot a)$$

$$\dot{T}_{G\lambda} = \frac{\lambda_0}{J} (\text{tr} D) I = \frac{3\lambda_0}{J} D_m I \cdots \cdots (84 \cdot b)$$

式(10・b)を式(84・b)に代入すると

$$\dot{T}_{G\lambda} = \frac{\lambda_0}{K_0} \dot{T}_{Gm} I \quad \dots\dots\dots (85)$$

となる。式(84)を式(83)に代入し次式を得る。

$$\dot{T}_{G\mu} = \dot{T}_G - \dot{T}_{G\lambda} = \dot{T}_G - \frac{\lambda_0}{K_0} \dot{T}_{Gm} I \quad \dots\dots\dots (86)$$

2章と同様に、これらの構成式を変形前の状態 C_0 について求める。 $\dot{T}_{G0}$ および $\dot{T}_{(2)}$ を、式(83)と同様にして次の二つの項に分離する。

$$\dot{T}_{G0} = \dot{T}_{G0\mu} + \dot{T}_{G0\lambda} \quad \dots\dots\dots (87\cdot a)$$

$$\dot{T}_{(2)} = \dot{T}_{(2)\mu} + \dot{T}_{(2)\lambda} \quad \dots\dots\dots (87\cdot b)$$

ここで

$$\dot{T}_{G0\lambda} \equiv \frac{\lambda_0}{K_0} \dot{T}_{G0m} \equiv \dot{T}_{G0\lambda} C^{-1} \quad \dots\dots\dots (88\cdot a)$$

$$\dot{T}_{(2)\lambda} \equiv \frac{\lambda_0}{K_0} \dot{T}_{(2)m} \equiv \dot{T}_{(2)\lambda} C^{-1} \quad \dots\dots\dots (88\cdot b)$$

式(40・b)を式(88・a)に代入すると

$$\dot{T}_{G0\lambda} = 3\lambda_0 C^{-1} \cdot \dot{E}_m \cdot C^{-1} = 3\lambda_0 \dot{E}_m C^{-1} \quad \dots\dots\dots (89)$$

となる。また式(87・a)に式(42), (89)を代入すると

$$\dot{T}_{G0\mu} = 2\mu_0 C^{-1} \cdot \dot{E} \cdot C^{-1} \quad \dots\dots\dots (90)$$

となる。 $\dot{T}_{(2)}$ については、式(63・b)を (λ_0/K_0) 倍し、式(89), (88・b)を代入すると次のとおり。

$$\dot{T}_{(2)\lambda} + \frac{2\lambda_0}{K_0} (\dot{E} \cdot T_{(2)})_m = 3\lambda_0 \dot{E}_m \quad \dots\dots\dots (91)$$

また式(87・b)に式(64), (91)を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{T}_{(2)\mu} + C^{-1} \cdot (L_0 - \Omega_0) \cdot T_{(2)} + T_{(2)} \cdot (L_0^t + \Omega_0) \cdot C^{-1} \\ - \frac{2\lambda_0}{K_0} (\dot{E} \cdot T_{(2)})_m C^{-1} = 2\mu_0 C^{-1} \cdot \dot{E} \cdot C^{-1} \quad \dots\dots\dots (92) \end{aligned}$$

また逆変換は、式(44), (45)に式(88・a)を代入して

$$\dot{E}_m = \frac{1}{3\lambda_0} \dot{T}_{G0\lambda} \quad \dots\dots\dots (93\cdot a)$$

$$\dot{E} = \frac{1}{2\mu_0} (C \cdot \dot{T}_{G0} \cdot C - \dot{T}_{G0\lambda} C) \quad \dots\dots\dots (93\cdot b)$$

となる。

3・2 エネルギー関数 2章と同様に、エネルギー関数を用いて構成方程式を表示する。式(87), (88)を用いて、 U^e を次の2項に分解する。

$$U^e = \frac{1}{2} \dot{T}_{G0} : \dot{E} = \frac{1}{2} (\dot{T}_{G0\mu} + \dot{T}_{G0\lambda}) : \dot{E} \quad \dots\dots\dots (94)$$

ここで式(89), (90)を用いると、次のようになる。

$$U_{G\mu}^e \equiv \frac{1}{2} \dot{T}_{G0\mu} : \dot{E} = \mu_0 (\dot{E} \cdot C^{-1} : C^{-1} \cdot \dot{E}) \quad (95\cdot a)$$

$$U_{G\lambda}^e \equiv \frac{1}{2} \dot{T}_{G0\lambda} : \dot{E} = \frac{3}{2} \dot{T}_{G0\lambda} \dot{E}_m = \frac{9}{2} \lambda_0 \dot{E}_m^2 \quad \dots\dots\dots (95\cdot b)$$

このとき次式が成立する。

$$\frac{\partial U_{G\mu}^e}{\partial \dot{E}} = \dot{T}_{G0\mu}, \quad \frac{\partial U_{G\lambda}^e}{\partial \dot{E}} = 3 \dot{T}_{G0\lambda} \quad \dots\dots\dots (96)$$

コンプリメンタリエネルギー U_0^e は Legendre 変換から次のように求める。

$$U_{0\mu}^e = \dot{T}_{G0\mu} : \dot{E} - U_{G\mu}^e \quad \dots\dots\dots (97\cdot a)$$

$$U_{0\lambda}^e = 3 \dot{T}_{G0\lambda} \dot{E}_m - U_{G\lambda}^e \quad \dots\dots\dots (97\cdot b)$$

式(95・b), (93・a)を式(97・b)に代入すると

$$U_{0\lambda}^e = \frac{3}{2} \dot{T}_{G0\lambda} \dot{E}_m = \frac{1}{2\lambda_0} (\dot{T}_{G0\lambda})^2 \quad \dots\dots\dots (98)$$

となる。同様にして、式(97・a)に式(95・a), (93・b), (87・a)を代入し整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} U_{0\mu}^e = \frac{1}{2} \dot{T}_{G0\mu} : \dot{E} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\mu_0} (\dot{T}_{G0} \cdot C : C \cdot \dot{T}_{G0}) \right. \\ \left. - \frac{3K_0}{2\mu_0\lambda_0} (\dot{T}_{G0\lambda})^2 - \frac{1}{\lambda_0} (\dot{T}_{G0\lambda})^2 \right] \quad \dots\dots\dots (99) \end{aligned}$$

$\dot{T}_{(2)}$ の場合のエネルギー関数は次のように定義する。

$$\frac{\partial U_{(2)\mu}^e}{\partial \dot{E}} = \dot{T}_{(2)\mu}, \quad \frac{\partial U_{(2)\lambda}^e}{\partial \dot{E}} = 3 \dot{T}_{(2)m} \quad \dots\dots\dots (100)$$

式(60), (88)を用いると

$$\begin{aligned} U_{(2)\mu}^e = U_{0\mu}^e - \{C^{-1} \cdot (L_0 - \Omega_0) \cdot T_{(2)}\} : \dot{E} \\ - \{T_{(2)} \cdot (L_0^t + \Omega_0) \cdot C^{-1}\} : \dot{E} \\ + \frac{2\lambda_0}{K_0} (\dot{E} \cdot T_{(2)})_m \cdot C^{-1} : \dot{E} \quad \dots\dots\dots (101\cdot a) \end{aligned}$$

$$U_{(2)\lambda}^e = U_{0\lambda}^e - \frac{6\lambda_0}{K_0} (\dot{E} \cdot T_{(2)})_m \dot{E}_m \quad \dots\dots\dots (101\cdot b)$$

となる。コンプリメンタリエネルギーの場合、Legendre 変換および式(60), (101)を用いると次式が成立する。

$$U_{(2)\mu}^e = \dot{T}_{(2)\mu} : \dot{E} - U_{(2)\mu}^e = U_{0\mu}^e(\dot{T}_{(2)}, T_{(2)\lambda}) \quad \dots\dots\dots (102\cdot a)$$

$$U_{(2)\lambda}^e = 3 \dot{T}_{(2)\lambda} \dot{E}_m - U_{(2)\lambda}^e = U_{0\lambda}^e(\dot{T}_{(2)\lambda}) \quad \dots\dots\dots (102\cdot b)$$

3・3 変分原理 速度形の Hu-Washizu の原理は、ひずみ速度を $\dot{E}$ と $\dot{E}_m$, 応力速度を $\dot{T}_{(2)}$ と $\dot{T}_{(2)\lambda}$ の変数に分けて表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_{(2)}^{HW}(\dot{u}, \dot{E}, \dot{E}_m, \dot{S}, \dot{T}_{(2)}, \dot{T}_{(2)\lambda}) = \int [U_{(2)\mu}^e(\dot{E}) \\ + U_{(2)\lambda}^e(\dot{E}_m) + T_{(2)}^t : (\dot{F}^t \cdot \dot{u} \nabla_0) \\ - (\dot{T}_{(2)}^t - \dot{T}_{(2)\lambda} C^{-1} + \dot{T}_{(2)\lambda} C^{-1}) \\ : (\dot{E} + \dot{S} - \dot{F}^t \cdot \dot{u} \nabla_0) - \rho_0 \dot{\alpha}_0 \cdot \dot{u}] dV_0 \\ - \int \dot{t}_0 \cdot \dot{u} dS_{t_0} - \int \dot{t}_0 \cdot (\dot{u} - \ddot{u}) dS_{u_0} \\ = \int [U_{(2)\mu}^e + U_{(2)\lambda}^e + T_{(2)}^t : (\dot{F}^t \cdot \dot{u} \nabla_0) - (\dot{T}_{(2)}^t \\ - \dot{T}_{(2)\lambda} C^{-1}) : (\dot{E} + \dot{S} - \dot{F}^t \cdot \dot{u} \nabla_0) - 3 \dot{T}_{(2)\lambda} \{\dot{E}_m \\ - (\dot{F}^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_m\} - \rho_0 \dot{\alpha}_0 \cdot \dot{u}] dV_0 - \int \dot{t}_0 \cdot \dot{u} dS_{t_0} \\ - \int \dot{t}_0 \cdot (\dot{u} - \ddot{u}) dS_{u_0} \quad \dots\dots\dots (103) \end{aligned}$$

ここで

$$\dot{E} = (\dot{F}^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_s, \quad \dot{S} = (\dot{F}^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_a \quad \dots\dots\dots (104)$$

として、式(103)の $U_{(2)\lambda}^e$ について Legendre 変換を行くと、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \Pi_{(2)}^L(\dot{u}, \dot{T}_{(2)\lambda}) = \int [U_{(2)\mu}^e(\dot{u}) + \frac{1}{2} T_{(2)} : (\nabla_0 \dot{u} \cdot \dot{u} \nabla_0) \\ - U_{(2)\lambda}^e(\dot{T}_{(2)\lambda}) + 3 \dot{T}_{(2)\lambda} (\dot{F}^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_m - \rho_0 \dot{\alpha}_0 \cdot \dot{u}] \end{aligned}$$

$$dV_0 - \int \dot{\mathbf{t}}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} dS_{t_0} \dots\dots\dots (105)$$

さらに, $U_{(2)\lambda}$ を具体的に求めると, 式(102・b), (98), (88・a), (60・b)から次のようになる.

$$U_{(2)\lambda} = \frac{1}{2\lambda_0} \left\{ \dot{T}_{(2)\lambda} + \frac{2\lambda_0}{K_0} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{T}_{(2)})_m \right\}^2 \dots\dots\dots (106)$$

式(105)は, Hermann の変分原理の有限変形での表示である.

4. 残 差 仕 事

増分理論を適用した変位形有限要素法では, 増分ごとに全体の不平衡力による残差仕事を考慮することが, 解の精度向上に役立つことが指摘されている⁽⁶⁾. ここでは, 従来十分に検討されていない混合形変分原理での残差仕事について考察する.

4.1 エネルギー方程式 変形前の状態 C_0 における平衡方程式は, $\mathbf{T}_{(2)}$ を用いると, モーメントの平衡則を含め次のように表示できる.

$$\nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{0} \dots\dots\dots (107 \cdot a)$$

$$(\mathbf{T}_{(2)}^t)_a = \mathbf{0} \dots\dots\dots (107 \cdot b)$$

速度形では次のようになる.

$$\nabla_0 \cdot (\dot{\mathbf{T}}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t + \mathbf{T}_{(2)} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{0} \dots\dots (108 \cdot a)$$

$$(\dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t)_a = \mathbf{0} \dots\dots\dots (108 \cdot b)$$

式(107・a)に変位ベクトル $\mathbf{u}$ をかけ, 式(107・b)にスピテンソル $\mathbf{S}$ をかけ, 全領域に対し積分した次の量を考える.

$$\int [\{ \nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{T}_{(2)}^t)_a : \mathbf{S}] dV_0 = 0 \dots\dots\dots (109)$$

ここでスピン $\mathbf{S}$ はその速度 $\dot{\mathbf{S}}$ を現在の時刻 t まで積分して得る.

$$\mathbf{S} = \int_0^t \dot{\mathbf{S}} ds = \int_0^t (\mathbf{F}^t \cdot \dot{\mathbf{u}} \nabla_0)_a ds \dots\dots\dots (110)$$

式(109)は, 前報⁽⁷⁾において求めた速度形のエネルギー方程式中の速度を全体の量で置換したもので, 本研究の定式化の基礎となる.

$\mathbf{S}$ は積分しても反対称の性質は変わらないので, 式(109)中の第2項は式(4)を用いると次のように変形できる.

$$(\mathbf{T}_{(2)}^t)_a : \mathbf{S} = \mathbf{T}_{(2)}^t : \mathbf{S} \dots\dots\dots (111)$$

現在の時刻 t から, 時間が Δt だけ経た後のエネルギー方程式は, 式(109)から Δt の降幅の順に示すと,

$$E_{(2)}^0 + \Delta t E_{(2)}^1 + (\Delta t)^2 E_{(2)}^2 = 0 \dots\dots\dots (112)$$

となる. ここで

$$E_{(2)}^0 = \int [\{ \nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T}_{(2)}^t : \mathbf{S}] dV_0 \dots\dots\dots (113 \cdot a)$$

$$E_{(2)}^2 = \int [\{ \nabla_0 \cdot (\dot{\mathbf{T}}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t + \mathbf{T}_{(2)} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t : \dot{\mathbf{S}}] dV_0 \dots\dots\dots (113 \cdot b)$$

$E_{(2)}^1$ はさらに次の二つの項に分解する.

$$E_{(2)}^1 = E_{(2)}^{1f} + E_{(2)}^{1s} \dots\dots\dots (114)$$

ここで

$$E_{(2)}^{1f} = \int [\{ \nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{T}_{(2)}^t : \dot{\mathbf{S}}] dV_0 \dots\dots\dots (115 \cdot a)$$

$$E_{(2)}^{1s} = \int [\{ \nabla_0 \cdot (\dot{\mathbf{T}}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t + \mathbf{T}_{(2)} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \} \cdot \mathbf{u} + \dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t : \mathbf{S}] dV_0 \dots\dots\dots (115 \cdot b)$$

前報⁽⁷⁾で求めた速度形のエネルギー方程式 $E_{(2)}^2$ か², 式(109)を基礎にして自然な形で導出できた. さらに

$$\begin{aligned} \{ \nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) \} \cdot \mathbf{u} &= \nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{u}) \\ &\quad - (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) : \nabla_0 \mathbf{u} \\ (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) : \nabla_0 \mathbf{u} &= (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{T}_{(2)}^t) : \mathbf{u} \nabla_0 \\ &= \mathbf{T}_{(2)}^t : (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{u} \nabla_0) \dots\dots\dots (116) \end{aligned}$$

などの変形を行い, Gauss の発散定理を用いると,

$$\begin{aligned} E_{(2)}^0 &= \int \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} dS_0 + \int \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \cdot \mathbf{u} dV_0 \\ &\quad - \int \mathbf{T}_{(2)}^t : (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{u} \nabla_0 - \mathbf{S}) dV_0 \dots\dots\dots (117 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{(2)}^{1f} &= \int \mathbf{t}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} dS_0 + \int \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} dV_0 \\ &\quad - \int \mathbf{T}_{(2)}^t : \dot{\mathbf{E}} dV_0 \dots\dots\dots (117 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{(2)}^{1s} &= \int \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} dS_0 + \int \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \cdot \mathbf{u} dV_0 \\ &\quad - \int [\dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t : (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{u} \nabla_0 - \mathbf{S}) + \mathbf{T}_{(2)}^t : (\dot{\mathbf{F}}^t \cdot \mathbf{u} \nabla_0)] dV_0 \dots\dots\dots (117 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{(2)}^2 &= \int \mathbf{t}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} dS_0 + \int \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} dV_0 \\ &\quad - \int [\dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t : \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{T}_{(2)}^t : (\dot{\mathbf{F}}^t \cdot \dot{\mathbf{u}} \nabla_0)] dV_0 \dots\dots\dots (117 \cdot d) \end{aligned}$$

ここで, 表面力 $\mathbf{t}_0$ とその速度 $\dot{\mathbf{t}}_0$ は次のとおり.

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t \dots\dots\dots (118 \cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot (\dot{\mathbf{T}}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t + \mathbf{T}_{(2)} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t) \dots\dots\dots (118 \cdot b)$$

$\mathbf{n}_0$ は表面での外向き単位法線ベクトルである.

4.2 仮想仕事・補仮想仕事の原理 力学的境界条件と幾何学的境界条件を, 全体の量およびその速度について次のように設定する.

$$\mathbf{t}_0 = \bar{\mathbf{t}}_0, \dot{\mathbf{t}}_0 = \dot{\bar{\mathbf{t}}}_0 : S_{t_0} \text{ 上で} \dots\dots\dots (119 \cdot a)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}} = \dot{\bar{\mathbf{u}}} : S_{u_0} \text{ 上で} \dots\dots\dots (119 \cdot b)$$

時刻によらず境界 S_{t_0}, S_{u_0} は変化しないものとする.

4.2.1 仮想仕事の原理 S_{u_0} 上の幾何学的境界条件を乱さない速度 $\dot{\mathbf{u}}$ の変分を $\delta \dot{\mathbf{u}}$ とする. 式(112)に $\dot{\mathbf{u}}$ の代わりに $(\dot{\mathbf{u}} + \delta \dot{\mathbf{u}})$ を代入した式から式(112)自身を差引いて, 次の仮想仕事を得る.

$$\delta E_{(2)}^1 + \Delta t \delta E_{(2)}^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (120)$$

ここで

$$\begin{aligned} \delta E_{(2)}^1 &= \int \bar{t}_0 \cdot \delta \dot{u} dS_{t_0} + \int \rho_0 \bar{a}_0 \cdot \delta \dot{u} dV_0 \\ &\quad - \int T_{(2)}^1 : \delta \dot{E} dV_0 \quad \dots\dots\dots (121 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta E_{(2)}^2 &= \int \bar{t}_0 \cdot \delta \dot{u} dS_{t_0} + \int \rho_0 \bar{a}_0 \cdot \delta \dot{u} dV_0 \\ &\quad - \int \{ \dot{T}_{(2)}^1 : \delta \dot{E} + T_{(2)}^1 : (\dot{F}^t \cdot \delta \dot{u} \nabla_0) \} dV_0 \\ &\quad \dots\dots\dots (121 \cdot b) \end{aligned}$$

付帯条件は次のとおりである。

$$\delta \dot{E} = (F^t \cdot \delta \dot{u} \nabla_0)_s : V_0 \text{ 内で } \dots\dots\dots (122 \cdot a)$$

$$\delta \dot{u} = 0 : S_{u_0} \text{ 上で } \dots\dots\dots (122 \cdot b)$$

本来この原理は、 $\delta E_{(2)}^1$ と $\delta E_{(2)}^2$ を一緒に考慮するものであるが、 $\delta E_{(2)}^2$ についてはすでに前報⁽⁷⁾において考察しており、表示を簡単にするため、残差仕事に関する項だけを示すことにする。すなわち

$$\delta E_{(2)}^1 = 0 \quad \dots\dots\dots (123)$$

とする。また $\delta E_{(2)}^1$ において、ひずみ速度変分による内部仕事変分を $\delta V_{(2)}^1$ とすると

$$\delta V_{(2)}^1 \equiv T_{(2)}^1 : \delta \dot{E} \quad \dots\dots\dots (124)$$

である。すなわち、式(124)から次式が成立する。

$$\frac{\partial V_{(2)}^1}{\partial \dot{E}} = T_{(2)}^1 \quad \dots\dots\dots (125)$$

4.2.2 補仮想仕事の原理 速度形の平衡方程式(108)と S_{t_0} 上の速度形力学的境界条件(119・a)を乱さない応力速度の変分を $\delta \dot{T}_{(2)}$ とする。式(112)に $\dot{T}_{(2)}$ の代わりに $(\dot{T}_{(2)} + \delta \dot{T}_{(2)})$ を代入した式から式(112)自身を差引くと、次の補仮想仕事の原理を得る。

$$\delta E_{(2)}^1 + \Delta t \delta E_{(2)}^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (126)$$

ここで

$$\begin{aligned} \delta E_{(2)}^1 &= \int \delta \bar{t}_0 \cdot \bar{u} dS_{u_0} - \int \delta \dot{T}_{(2)}^1 : (F^t \cdot u \nabla_0 - S) dV_0 \\ &\quad \dots\dots\dots (127 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\delta E_{(2)}^2 = \int \delta \bar{t}_0 \cdot \bar{u} dS_{u_0} - \int \delta \dot{T}_{(2)}^1 : \dot{E} dV_0 \quad \dots\dots\dots (127 \cdot b)$$

ここに付帯条件は次のとおりである。

$$\nabla_0 \cdot (\delta \dot{T}_{(2)} \cdot F^t) = 0 : V_0 \text{ 内で } \dots\dots\dots (128 \cdot a)$$

$$(\delta \dot{T}_{(2)})_a = 0 : V_0 \text{ 内で } \dots\dots\dots (128 \cdot b)$$

$$\delta \bar{t}_0 = n_0 \cdot \delta \dot{T}_{(2)} \cdot F^t = 0 : S_{t_0} \text{ 上で } \dots\dots\dots (128 \cdot c)$$

仮想仕事の原理と同様、残差仕事の項のみ表示して

$$\delta E_{(2)}^1 = 0 \quad \dots\dots\dots (129)$$

とする。応力速度変分による内部仕事変分 $\delta V_{(2)}^1$ は

$$\delta V_{(2)}^1 \equiv \delta \dot{T}_{(2)}^1 : (F^t \cdot u \nabla_0 - S) \quad \dots\dots\dots (130)$$

とする。すなわち、式(130)から次式が成立する。

$$\frac{\partial V_{(2)}^1}{\partial \dot{T}_{(2)}^1} = F^t \cdot u \nabla_0 - S \quad \dots\dots\dots (131)$$

4.3 エネルギー関数 応力とひずみが共に速度形で表示された仕事式 $E_{(2)}^1$ において、ひずみエネルギー $U_{(2)}^1$ とコンプリメンタリエネルギー $U_{(2)}^2$ の関係は次のように表示できた。

$$U_{(2)}^1(\dot{E}) + U_{(2)}^2(\dot{T}_{(2)}) = T_{(2)}^1 : \dot{E} \quad \dots\dots\dots (132)$$

残差仕事式 $E_{(2)}^1$ においては、式(125)の $V_{(2)}^1$ と式(131)の $V_{(2)}^2$ の和は、式(117・b)(117・c)の $\dot{T}_{(2)}$ と $\dot{E}$ にかかる内部仕事式になると考えられる。すなわち

$$\begin{aligned} V_{(2)}^1(\dot{E}) + V_{(2)}^2(\dot{T}_{(2)}) &= T_{(2)}^1 : \dot{E} \\ &\quad + \dot{T}_{(2)}^1 : (F^t \cdot u \nabla_0 - S) \quad \dots\dots\dots (133) \end{aligned}$$

式(125)、(131)、(133)から次式が成立する。

$$V_{(2)}^1(\dot{E}) = T_{(2)}^1 : \dot{E} \quad \dots\dots\dots (134 \cdot a)$$

$$V_{(2)}^2(\dot{T}_{(2)}) = \dot{T}_{(2)}^1 : (F^t \cdot u \nabla_0 - S) \quad \dots\dots\dots (134 \cdot b)$$

4.4 各種の変分原理

4.4.1 ポテンシャルエネルギー停留原理 式(121・a)の仮想仕事の原理に基づく。式(125)の $V_{(2)}^1$ を用いて、

$$\begin{aligned} \Pi_{(2)}^1(\dot{u}) &= \int \{ V_{(2)}^1(\dot{E}) - \rho_0 \bar{a}_0 \cdot \dot{u} \} dV_0 \\ &\quad - \int \bar{t}_0 \cdot \dot{u} dS_{t_0} \quad \dots\dots\dots (135) \end{aligned}$$

ここで $\Pi_{(2)}^1$ の左肩の記号「 Π 」は速度形と区別するためのものである。また付帯条件は次のとおりである。

$$\dot{E} = (F^t \cdot \dot{u} \nabla_0)_s : V_0 \text{ 内で } \dots\dots\dots (136 \cdot a)$$

$$\dot{u} = \bar{u} : S_{u_0} \text{ 上で } \dots\dots\dots (136 \cdot b)$$

4.4.2 コンプリメンタリエネルギー停留原理 式(127・a)の補仮想仕事の原理に基づく。式(131)の $V_{(2)}^1$ から

$$\Pi_{(2)}^2(\dot{T}_{(2)}) = \int V_{(2)}^2(\dot{T}_{(2)}) dV_0 - \int \bar{t}_0 \cdot \bar{u} dS_{u_0} \quad (137)$$

となる。付帯条件は次のとおりである。

$$\nabla_0 \cdot (\dot{T}_{(2)} \cdot F^t) = 0 : V_0 \text{ 内で } \dots\dots\dots (138 \cdot a)$$

$$(\dot{T}_{(2)})_a = 0 : V_0 \text{ 内で } \dots\dots\dots (138 \cdot b)$$

$$\bar{t}_0 = n_0 \cdot \dot{T}_{(2)} \cdot F^t = 0 : S_{t_0} \text{ 上で } \dots\dots\dots (138 \cdot c)$$

4.4.3 Hu-Washizu の原理 適合条件式と応力との内積を $\Pi_{(2)}^3$ に付加した次式を提案する。

$$\begin{aligned} \Pi_{(2)}^3(\dot{u}, \dot{E}, \dot{S}) &= \int [V_{(2)}^1(\dot{E}) - T_{(2)}^1 : (\dot{E} + \dot{S} - F^t \cdot \dot{u} \nabla_0) \\ &\quad - \rho_0 \bar{a}_0 \cdot \dot{u} - \rho_0 \bar{a}_0 \cdot u + T_{(2)}^1 : (\dot{F}^t \cdot u \nabla_0)] dV_0 \\ &\quad - \int (\bar{t}_0 \cdot \dot{u} + \bar{t}_0 \cdot u) dS_{t_0} \\ &\quad - \int \{ \bar{t}_0 \cdot \dot{u} + \bar{t}_0 \cdot (u - \bar{u}) \} dS_{u_0} \quad \dots\dots\dots (139) \end{aligned}$$

ここに付帯条件は $\dot{S}$ が反対称テンソルであることである。 V_0 内の $\{-\rho_0 \bar{a}_0 \cdot u + T_{(2)}^1 : (\dot{F}^t \cdot u \nabla_0)\}$ 、 S_{t_0} 上の $(\bar{t}_0 \cdot u)$ および S_{u_0} 上の $\{\bar{t}_0 \cdot (u - \bar{u})\}$ はいずれも本原理では定数項として変分計算では省略することができる

が、次に示す Hellinger-Reissner の原理においてそれぞれの役割を果たす。式(139)の変分をとると、

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{(2)}^{HR} = & \int \left[\left(\frac{\partial V_{(2)}}{\partial \mathbf{E}} - \mathbf{T}_{(2)}^t \right) : \delta \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{T}_{(2)}^t : \delta \dot{\mathbf{S}} \right. \\ & - \{ \nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} \} dV_0 \\ & - \int (\bar{\mathbf{t}}_0 - \mathbf{t}_0) \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dS_{t_0} \dots \dots \dots (140) \end{aligned}$$

得られた停留条件は次のとおりである。

$$\frac{\partial V_{(2)}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{T}_{(2)}^t \quad : V_0 \text{ 内で } \dots \dots \dots (141 \cdot a)$$

$$(\mathbf{T}_{(2)}^t)_a = \mathbf{0} \quad : V_0 \text{ 内で } \dots \dots \dots (141 \cdot b)$$

$$\nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{0} \quad : V_0 \text{ 内で } \dots \dots (141 \cdot c)$$

$$\mathbf{t}_0 = \bar{\mathbf{t}}_0 \quad : S_{t_0} \text{ 上で } \dots \dots \dots (141 \cdot d)$$

4・4・4 Hellinger-Reissner の原理 式(139)において、 $\dot{\mathbf{E}}$ を消去するため式(133)を用いると

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{(2)}^{HR}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{S}}, \dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t) = & \int [-V_{(2)}(\dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t) + \dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t : (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{u} \nabla_0 \\ & - \mathbf{S}) - \mathbf{T}_{(2)}^t : (\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{F}^t \cdot \dot{\mathbf{u}} \nabla_0 - \dot{\mathbf{F}}^t \cdot \mathbf{u} \nabla_0) - \rho_0 \\ & \times (\bar{\mathbf{a}}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\bar{\mathbf{a}}}_0 \cdot \mathbf{u})] dV_0 - \int (\bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\bar{\mathbf{t}}}_0 \cdot \mathbf{u}) dS_{t_0} \\ & - \int \{ \mathbf{t}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{t}}_0 \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \} dS_{u_0} \dots \dots \dots (142) \end{aligned}$$

となる。ここに付帯条件は $\dot{\mathbf{S}}$ が反対称テンソルであることである。式(142)の変分をとると

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{(2)}^{HR} = & \int \left[- \left\{ \frac{\partial V_{(2)}}{\partial \dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t} - (\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{u} \nabla_0 - \mathbf{S}) \right\} : \delta \dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t \right. \\ & - \mathbf{T}_{(2)}^t : \delta \dot{\mathbf{S}} - \{ \nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} \} dV_0 \\ & - \int (\bar{\mathbf{t}}_0 - \mathbf{t}_0) \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dS_{t_0} - \int \delta \dot{\mathbf{t}}_0 \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dS_{u_0} \\ & \dots \dots \dots (143) \end{aligned}$$

得られた停留条件は次のとおり。

$$\frac{\partial V_{(2)}}{\partial \dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{u} \nabla_0 - \mathbf{S} \quad : V_0 \text{ 内で } \dots \dots \dots (144 \cdot a)$$

$$(\mathbf{T}_{(2)}^t)_a = \mathbf{0} \quad : V_0 \text{ 内で } \dots \dots \dots (144 \cdot b)$$

$$\nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{0} \quad : V_0 \text{ 内で } \dots \dots (144 \cdot c)$$

$$\mathbf{t}_0 = \bar{\mathbf{t}}_0 \quad : S_{t_0} \text{ 上で } \dots \dots \dots (144 \cdot d)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad : S_{u_0} \text{ 上で } \dots \dots \dots (144 \cdot e)$$

また S_{u_0} 上の変分は $\delta \dot{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \delta \dot{\mathbf{T}}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t$ である。式(142)において、 $\dot{\mathbf{S}}$ を式(104)を用いて消去し、変形すると

$$\begin{aligned} -\delta \Pi_{(2)}^{HR}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t) = & \int [V_{(2)} + \dot{\mathbf{T}}_{(2)}^t : \mathbf{S} + \{ \nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t \\ & + \mathbf{T}_{(2)} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T}_{(2)}^t : (\mathbf{F}^t \cdot \dot{\mathbf{u}} \nabla_0)_a \\ & + \{ \nabla_0 \cdot (\mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t) + \rho_0 \bar{\mathbf{a}}_0 \} \cdot \dot{\mathbf{u}}] dV_0 \\ & + \int \{ (\bar{\mathbf{t}}_0 - \mathbf{t}_0) \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\dot{\bar{\mathbf{t}}}_0 - \dot{\mathbf{t}}_0) \cdot \mathbf{u} \} dS_{t_0} \\ & - \int \dot{\mathbf{t}}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} dS_{u_0} \dots \dots \dots (145) \end{aligned}$$

となる。 S_0 上の表面力とその速度は $\mathbf{t}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t$,

$\dot{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot (\dot{\mathbf{T}}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t + \mathbf{T}_{(2)} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t)$ として計算する。平衡方程式(107)とその速度形(108)および力学的境界条件(119・a)を満足するとき、コンプリメンタリエネルギー停留原理(137)に帰着できることは容易にわかる。また $\Pi_{(2)}^{HR}$ に付加した V_0 内の $\{-\rho_0 \dot{\bar{\mathbf{a}}}_0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T}_{(2)}^t : (\dot{\mathbf{F}}^t \cdot \mathbf{u} \nabla_0)\}$ および S_{t_0} 上の $(\dot{\bar{\mathbf{t}}}_0 \cdot \mathbf{u})$ は、速度形平衡方程式を満足させるためのもので、速度形変分原理の Hellinger-Reissner の原理からコンプリメンタリエネルギー停留原理への移行の条件⁽⁷⁾と整合性がとれる。 S_{u_0} 上の $\{\dot{\mathbf{t}}_0 \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\}$ は S_{u_0} 上の幾何学的境界条件を導くためのものである。

4・5 更新座標系での表示 変位 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, スピン $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ と設定できるため、基礎となるエネルギー方程式は式(112)から

$$(\Delta t) E_{(2)}^t + (\Delta t)^2 E_{(2)}^t = 0 \dots \dots \dots (146)$$

となる。このため補仮想仕事の原理に対応するものがないとなり、 $V_{(2)} = 0$ となる。また $\mathbf{T}_{(2)} = \mathbf{T}$, $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ と置けるため、各種の変分原理は次のように表示できる。

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{(2)}^t(\dot{\mathbf{u}}) = & \int [V_{(2)} - \rho \bar{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{u}}] dV - \int \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS_t \\ & \dots \dots \dots (147 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{(2)}^{HR}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{S}}) = & \int [V_{(2)} - \mathbf{T}^t : (\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{u}} \nabla) \\ & - \rho \bar{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{u}}] dV - \int \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS_t - \int \dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS_u \quad (147 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{(2)}^{HR}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{S}}) = & \int [-\mathbf{T}^t : (\dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{u}} \nabla) - \rho \bar{\mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{u}}] dV \\ & - \int \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS_t - \int \dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS_u \dots \dots \dots (147 \cdot c) \end{aligned}$$

5. 結 論

塑性が卓越する金属材料や非圧縮性に近い弾性体には通常のポテンシャルエネルギー停留原理に基づく変位形有限要素法を適用すると、その精度が低下する。このため従来提案された Nagtegaal らや Hermann の変分原理を有限変形の場合に拡張した。また残差仕事の影響を混合形変分原理に取り入れ、速度形変分原理との対応関係を示した。

文 献

- (1) Nagtegaal, J. C., ほか 2 名, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 4 (1974), 153.
- (2) Hermann, L. R., *AIAA J.*, 3-10 (1965), 1896.
- (3) Taylor, R. L., ほか 2 名, *Int. J. Solids Struct.*, 4 (1968), 875.
- (4) Key, S. W., *Int. J. Solids Struct.*, 5 (1969), 951.
- (5) Atluri, S. N., *J. Struct. Mech.*, 8-1 (1980), 61.
- (6) Hofmeister, L. D., ほか 2 名, *AIAA J.*, 9-7 (1971), 1248.
- (7) 渡部, 機論, 55-510, A (1989), 257.
- (8) Truesdell, C. and Noll, W. *The Nonlinear Field Theories of Mechanics, Encyclopedia of Physics*, III/3 (1965), (Flügge, S. ed.), Springer-Verlag.

討 論

〔質問〕 富田 佳 宏

〔神戸大学工学部機械系教室〕

非圧縮性材料のシミュレーションのための基礎研究をされたことに敬意を表します。以下、二、三ご教示願いたい。

(1) 非圧縮性材料の変分原理を対象とした本論文で、特に移動硬化則を導入された理由はなにか。

(2) 弾性の構成式として、式(83)のような Hypo elasticity の構成式を用いられているが、Hyper elasticity の構成式では記述できない材料を考えているのか。Hyper elasticity の構成式の数値形の場合は、ひずみの主軸の回転に伴う付加的な項が必要と考えられるがどうか。

(3) 数値シミュレーションへの適用を重視する立場から考えると、混合形の変分原理を直接用いるより、いわゆる、Reduced Integration 的な手法を用いて混合形の変分原理を用いたと同等の効果を期待するほうがなじみやすく、かつ取扱いが容易であると考えられる。提案された、変分原理もこのような形式での使用が期待できるか。

〔回答〕 (1) 繰返し塑性等の記述において Chaboche^(付1)らの非線形移動硬化則が有用であることが知られており、Prager の線形移動硬化則はその特別の場合である。先に著者が示したポテンシャル理論に基づく塑性構成則の有限変形への定式化は(付2)より記述能力の高い非線形移動硬化則にも適用できるも

のであり、Prager の線形移動硬化則はそのひとつの例として取りあげた。

(2) 弾性体の構成式として式(83)に示したものは、客観性の原理を満足するほか、Hyper elasticity の要件と応力不変量の停留性を満足する^(付3)。構成式中で展開したひずみ尺度として、履歴依存が考慮できる Stören-Rice の非回転ひずみを用いた点が、従来の Green-Lagrange ひずみで展開する Hyper elasticity 理論と異なる。また式(83)の構成則はひずみの1次関数で展開する線形体であり、2次式まで用いる非線形体と異なる。Hermann の用いた構成式は、あらかじめ非圧縮性を仮定した Mooney-Rivlin の非線形体ではなく Hooke 則を満足する線形体である。本研究でも Hermann と同様に線形体を仮定し、有限変形での定式化を示した。従来の Hyper elasticity との対応関係や非線形体での扱いについては、今後の研究課題とさせていただきます。貴重なご指摘に感謝する。

(3) Nagtegaal らは、微小変形でのロッキング現象を回避するため、低減積分法、混合法、要素形状と分割について検討している。これらのいずれもロッキングに対して有効であると報告していることから、有限変形でもこれらを併用することは可能と思われる。

(付1) Chaboche, J. L. and Rousselier, G., *Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol.*, 105-2(1983), 153.

(付2) 渡部, 機論, 54-501 A(1988), 992.

(付3) 渡部, 機論, 54-497 A(1988), 100.