だ円体介在物を含む材料の剛塑性変形*

永山 則之^{*1}, 阿部 武治^{*2}, 長岐 滋^{*2}

Plastic Deformation of Inhomogeneous Material with Ellipsoidal Inclusions

Noriyuki NAGAYAMA, Takeji ABE, and Shigeru NAGAKI

The rigid-plastic finite element method which is based on the upper bound theorem in plasticity is applied to the study of deformation behaviour of inhomogeneous materials with inclusions. The axisymmetric inclusion problem is studied in the present paper. The penalty method and the Newton-Raphson's repeated calculation is adopted to minimize a functional and to obtain the solution. Characteristics of the deformation behaviour of inhomogeneous material are discussed based on the calculated results. The effects of the aspect ratio, the volume fraction and the yield stress ratio of inclusions on the deformation behaviour are investigated. The mean yield stress of inhomogeneous material is estimated based on microscopic deformation in the inclusion and the matrix.

Key Words: Plasticity, Ellipsoidal Inclusion, Inhomogeneous Material, Strain Distribution, Mean Flow Stress, Rigid-Plastic FEM

1. 緒 言

本研究の目的は介在物を含む材料が塑性変形するときの変形挙動, 二相材料の平均降伏応力などが, 材料の形状比, 介在物の体積率などによってどのように影響されるかを剛塑性有限要素法を用いて調べることにある。

実用の金属材料の多くはなんらかの形で複数以上の相からなる混合組織を有している。すなわち, 不均質体であることが多い。また, 複合材料のように目的に応じて強度差のある材料を組合せて用いることもある。例えば粒子分散形強化金属や繊維強化金属, ポリマーブレンドなども, 今後ますますその重要性を増すと予測されている。したがって, このような内部に強度差をもつ材料の変形解析を行うことは, 材料設計の基礎としても重要であると考えられる。

介在物を含む材料の変形挙動の理論的解析としては, 無限母相中のだ円体介在物に対する Eshlby の弾性解析⁽¹⁾, 不適合ひずみを転位におきかえる Ashby

の理論⁽²⁾, Avitzur による円筒母相中に円筒介在物を含む材料の上解法による解析⁽³⁾, 大矢根らによる剛塑性体中のだ円体介在物問題の上解法による解析⁽⁴⁾などがある。

一方, 剛塑性有限要素法は塑性力学における上界法に基づいて, 有限要素法の離散化の手法を用い, 最適解としての速度場を求める手法である。小林-Lee らは塑性変形における非圧縮性条件を満足させるために, Lagrange 未定乗数法を用いた⁽⁵⁾。非圧縮性条件を満足するその他の方法として, 奏⁽⁶⁾, Price-Alexander⁽⁷⁾らは条件付き最適値問題の手法として知られているペナルティ法を, また小坂田-森らは, 材料にごくわずかの圧縮性を許容させることによって取扱う方法⁽⁸⁾⁽⁹⁾をそれぞれ用い, 近似的に非圧縮性条件を満足させている。剛塑性有限要素法は, 材料の弾性を無視し, 塑性変形を中心に解析する手法であり, 塑性加工の分野で広く用いられている。すなわち, 剛塑性有限要素法は材料の塑性変形挙動の特徴を調べる上に有効であると考えられる。

本報では介在物, 母相とも剛完全塑性体と仮定し, 介在物と母相の変形抵抗が異なる場合, すなわち, 介在物が硬い場合と, 逆に軟らかい場合について剛塑性有限要素法を用いて解析を行う。また, 非圧縮性条件

* 平成元年 1 月 25 日 第 955 回講演会において講演, 原稿受付 昭和 63 年 2 月 26 日。

^{*1} 正員, 岡山県工業技術センター (〒701-01 岡山市今保 661-2)。

^{*2} 正員, 岡山大学工学部 (〒700 岡山市津島 3-1-1)。

を満たす方法としては計算の容易さを考慮してペナルティ法を用いる。

先の報告では、平面応力状態⁽¹⁰⁾、平面ひずみ状態⁽¹¹⁾についてそれぞれ解析を行い、介在物を含む材料の変形挙動を明らかにした。本報では、軸対称の配置をとる場合について検討を加える。複合材料にも、繊維強化材料、粒子分散形強化材料などがあるが、本報は粒子分散形強化材料などの場合に対応している。

2. 計算方法

2.1 剛塑性有限要素法⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾ 体積 V の剛塑性体が、任意の境界条件のもとで塑性変形をしている場合、極限定理によると、次の汎関数 Φ が速度場の正解に対して極小値をとる。

$$\Phi = \int_V \sigma_{eq} \dot{\epsilon}_{eq} dv - \int_{S_t} T_i U_i dS \quad (1)$$

ここに、 σ_{eq} は、相当応力であるが、Mises の降伏条件を用いると材料の降伏応力とみなすことができる。

ϵ_{eq} は相当塑性ひずみ速度で次式で表される。

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (2)$$

また、 T_i は物体 V の表面 S_t 上で与えられる応力の境界条件、 U_i は可容速度場である。

式(1)の汎関数に塑性変形における非圧縮性条件を付帯条件として加える必要がある。条件付き最適値問題の手法として知られるペナルティ法を用いると、非圧縮性条件を考慮に入れた汎関数は、

$$\Phi = \int_V \sigma_{eq} \dot{\epsilon}_{eq} dV + \frac{1}{2} \beta \int_V \dot{\epsilon}_{ii}^2 dV - \int_{S_t} T_i U_i dS \quad (3)$$

となる。ここに、 $\dot{\epsilon}_{ii}$ は体積ひずみ速度で非圧縮性条件が満足されれば $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$ となる。 β はペナルティ数と呼ばれる正の大きな数であり、本計算では $10^{10}(\text{MPa} \cdot \text{s})$ を用いた(ただし、 $\sigma_{eq} \approx 1$ 、 $\dot{\epsilon}_{eq} \approx 10^{-2}$)。なお、本計算で求められるひずみ速度の分布は、境界条件として与えるひずみ速度に比例する。また初期ひずみも 0 とみなせるので、以下では簡単のため単位時間を考え、ひずみ速度をひずみとみなすことにする。

このようにして得られた剛性方程式は非線形の連立方程式であるので、これを線形化するために、摂動法(Newton-Raphson 法)を用いる。節点変位速度ベクトル u の摂動量 Δu を導入し、 u に比べて Δu が非常に小さいという仮定から、その 2 次以上の項を省略し、剛性方程式を Δu の線形方程式とする。正解を得るには、速度分布の初期値 u_0 を仮定し、繰返し計算によって速度分布の収束値を求める。連続体全体について、剛性方程式を組み立てると、 (n) 回目の繰返しに対す

る Δu の関数を連続体全体について

$$S_{(n-1)} \Delta u_{(n)} = R_{(n-1)} \quad (4)$$

の形に表すことができる⁽⁵⁾。(n-1) 回めの $u_{(n-1)}$ がわかっているれば、 $S_{(n-1)}$ 、 $R_{(n-1)}$ が求められ、式(4)は未知量 $\Delta u_{(n)}$ について線形方程式となる。計算は、解が収束するまで繰返すが、収束の度合としては、変位速度の摂動量 $\Delta u_{(n-1)}$ に対して

$$\delta = \|\Delta u\| / \|u\| \quad (5)$$

で定義される収束判定値がある値(本計算では 10^{-3} とする)以下になったとき、解は十分収束したと判定する。ここに、 $\|u_{(n)}\| = \sqrt{\sum_i u_{(n)i}^2}$ であり、 i は全節点の x, y 方向について和をとる。

ところで、 $u_{(n)}$ は、 $u_{(n-1)}$ と $\Delta u_{(n)}$ の和として表されているが、この $\Delta u_{(n)}$ は、必ずしも適当な値とは言えず、一般に、

$$u_{(n)} = u_{(n-1)} + \theta \Delta u_{(n)} \quad (6)$$

のように修正係数と呼ばれる θ を $\Delta u_{(n)}$ に乗じて汎関数が最小になるような θ の値 ($0 < \theta \leq 1$) を選ぶと、収束解が得られるまでに要する繰返し数を少なくすることができる。本計算においては θ の値として 0.2~1 の値を用いた。

剛塑性有限要素法では、非変形域が生ずると解が収束しにくい。ここでは、小坂田-森の提案⁽⁸⁾⁽⁹⁾に従って、非変形域が生じた場合、すなわち、相当ひずみ ϵ_{eq} が零に近くなった場合これに微小量 e を加え

$$\epsilon_{eq} \approx \sqrt{\epsilon_{eq}^2 + e^2} \quad (7)$$

と近似する。本報告では、 $e = 5\bar{\epsilon}_z/1000$ とした ($\bar{\epsilon}_z$ は z 方向に与える平均ひずみ)。

計算手順としては、まず材料を均質体とした場合の変位速度を初期値として、徐々に介在物と母相の降伏応力比を変化させ最終的な降伏応力比まで繰返し計算を行った⁽¹²⁾。なお、数値計算には倍精度計算を用いた。

2.2 不均質体のモデル 母相中に周期的に介在物が分布する材料のモデルとしては、本来図 1(a)に示すように直方体の母相中にだ円体介在物が含まれる三次元的なモデルを考えるのが望ましい。しかしながらこのような三次元の問題は、数値計算も極めて複雑となり取扱いにくいので本報では近似的に図 1(b)に示すように円筒形の母相中にだ円体介在物が含まれる軸対称のモデルを用いることにする。外力としては z 軸方向に引張応力が負荷される場合を考える。対称性を考慮して領域 OACB を考え、境界 OACB は変形後も直線を保つと仮定する。境界条件としては OA は z 方向に固定、CB には平均ひずみ $\bar{\epsilon}_z$ に相当する変位を z 方向に与える。また、OB は r 方向に固定し、AC には $-\bar{\epsilon}_z/2$ に相当する変位を r 方向に与える。有限要

素解析を行うために図2に示すように領域OACBを741節点, 352要素に分割する。図2中に示すように, 収束性の良い6節点をもつ三角形二次要素を用い, 数値積分には2次のガウスの積分を用いる⁽¹³⁾。また, 介在物, 母相の境界ではなく離はないものとする。

2.3 変形挙動を支配する種々のパラメータ 計算結果の整理のため, 以下では次のようなパラメータを定義する。

(a) 形状比 R 介在物の形状比 R を

$$R = b/a \quad \dots\dots\dots (8)$$

によって表す。ここに, a, b はそれぞれ図1に示すように z 方向, r 方向の長さである (ξ は体積率 V_f によって定まる定数)。今回の計算では R を変化させると, 介在物の形状と介在物の間隔が同時に変化する。

(b) 降伏応力比 α 介在物と母相の降伏応力比 α を

$$\alpha = \sigma_I / \sigma_M \quad \dots\dots\dots (9)$$

とおく。ここに, σ_I, σ_M はそれぞれ介在物, 母相の降伏応力である。

(c) 体積率 V_f 図1(b)から材料全体に占める介在物の体積率 V_f を次のように定義する。

$$V_f = \frac{(\text{だ円体状の}) \text{介在物の体積}}{(\text{円柱状の}) \text{材料全体の体積}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

なお, 図1(a)の場合に介在物の大きさが図1(b)と同じであるとし, その体積率を V_f' とすると, 式(10)の V_f との間に幾何学的に $V_f \approx 1.27 V_f'$ の関係がある。

(d) ひずみの多軸性パラメータ χ ひずみ分布の多軸性を表すパラメータ χ を

$$\chi = \bar{\epsilon}_{eq} / \epsilon^* \quad \dots\dots\dots (11)$$

によって定義する。ここに, $\bar{\epsilon}_{eq}$ は有限要素計算によ

て得られた材料全体の平均相当ひずみ, ϵ^* は外部から加えた相当ひずみである。外部から加えたひずみが単軸引張りの場合にも, 介在物を含んでいるため, 材料内部ではより複雑な変形を起こし, 一般に $\chi \geq 1$ である。ひずみの多軸性や不均一性が大きくなるほど, χ は1より大きくなる。

(e) ひずみ集中係数 A_I, A_M 介在物と母相の平均的な変形挙動を調べるために, Hill⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾ によって提案されたひずみ集中テンソルを簡単化した形として, 介在物と母相の平均ひずみ集中係数 A_I, A_M を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\epsilon}_{eq})_I &= A_I \bar{\epsilon}_{eq} \\ (\bar{\epsilon}_{eq})_M &= A_M \bar{\epsilon}_{eq} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに, $(\bar{\epsilon}_{eq})_I, (\bar{\epsilon}_{eq})_M, \bar{\epsilon}_{eq}$ はそれぞれ介在物, 母相および材料全体の平均相当ひずみである。例えば, 介在物の変形しない場合には, A_I が0に近づくことになる。

3. 計算結果と考察

以下では, 介在物が母相よりも硬い例として降伏応力比 $\alpha=2$ の場合と, 介在物が母相より軟らかい例として $\alpha=1/2$ の場合の計算結果について述べる。

(a) 形状比の影響 図3, 4に形状比 R が $1/2, 1, 2$ のときの相当塑性ひずみの分布を示す。図3は降伏応力比 $\alpha=2$, 図4は $\alpha=1/2$ に対する結果である。図中の破線は境界である。図3(b), (c)の場合には, 介在物のひずみは小さく0に近い。以後の計算では境界に与える変位として $\epsilon_z=0.01$ について計算を行い, 計算結果は ϵ_z を単位として整理する(なお, 与えるひずみの大きさは計算結果に本質的な影響を与えな

図1 不均質体のモデル

図2 要素分割

い⁽¹⁰⁾).

次に、式(12)で定義したひずみ集中係数と形状比との関係を図5に示す。横軸は R の対数である。

まず硬い介在物の場合、図3、5(a)より、 $R=1$ のとき介在物はほとんど変形しないが、 R が大きくなっても、また小さくなくても介在物に対する母相の拘束が大きくなり介在物も変形することがわかる。相当塑性ひずみの最大値はすべての R について介在物と母相の境界付近の母相側に現れている。その位置は R の増加とともに辺OB近傍から辺OA近傍へと移動している。 R が1より遠ざかるにつれ材料全体としては比較的均一に変形している。介在物が軟らかい場合に

は、図4、5(b)に示されるように、相当塑性ひずみの最大と最小の差は小さく、材料は比較的均一に変形している。この場合には、ひずみの最大値は介在物と母相の境界近傍の介在物側に生じている。

図3、4のひずみ分布を、先に報告した平面ひずみの場合⁽¹¹⁾と比較すると、本報告の軸対称の場合にはせん断帯の発生が少なくなる傾向が認められる。

なお、計算に要した時間は形状比 $R=2$ の場合CPU時間で約3600s、 $R=10$ で同じく2200sである(NEC ACOS 1000)。

(b) 体積率の影響 図5には V_f を0.2, 0.3とした場合のひずみ集中係数の計算結果も示してい

図3 相当塑性ひずみ分布 ($\alpha=2$, $V_f=0.1$)

図4 相当塑性ひずみ分布 ($\alpha=1/2$, $V_f=0.1$)

(a) $\alpha=2$

(b) $\alpha=1/2$

図5 ひずみ集中係数 A_I , A_M と形状比 R の関係

る。まず、硬い介在物の場合 V_f が 0.1 の場合と比較すると、体積率が増加しても変形の傾向は似ている。しかしながら $V_f=0.3$ の結果に認められるように、介在物の体積率が大きい場合には、 $R=1$ 近傍でも介在物に変形が生じている。これは実験結果⁽¹⁶⁾の傾向とも一致している。先に報告した平面ひずみ介在物問題⁽¹¹⁾では、 $R=1$ 近傍では $V_f=0.3$ においても介在物の変

形は認められなかった。この差異は、三次元の場合、二次元よりも介在物の変形に対する母相からの拘束が大きくなることによると考えられる。

図 6 は体積率 V_f と母相のひずみ集中係数 A_M の関係をまとめて示している。介在物が硬い場合 [図 6(a)] には、体積率の増加とともに A_M は増加する。これは、介在物に変形しにくいいため V_f の増加とともに、母相の変形割合が増加するためである[なお、図 6(a) 中の実線は後に述べる式(16)の関係を示している]。

介在物が軟らかい場合 [図 6(b)] には、体積率が変化しても A_M はほとんど変化しない。

(c) 降伏応力比の影響 図 7 に介在物のひずみ集中係数 A_I に及ぼす降伏応力比 α の影響を示す。図 7(a) からわかるように、硬い介在物の場合には α の増加とともに A_I の値はほぼ比例的に減少している。

軟らかい介在物の場合 [図 7(b)] には、 α の減少(あるいは $1/\alpha$ の増加)とともに A_I の値は増加している。

(d) 平均変形応力 次に介在物および母相のそれぞれの変形挙動と、材料全体としての平均変形応力との関係について考える⁽¹¹⁾。二相材料の平均変形応力を σ^* 、加えた相当塑性ひずみを ϵ^* とおくと、外部から加えられる塑性仕事と材料内部で消費される塑性仕事等しいことから

$$\sigma^* \epsilon^* = V_f \sigma_I (\epsilon_{eq})_I + (1 - V_f) \sigma_M (\epsilon_{eq})_M \quad \cdots (13)$$

と表される。一方、材料全体の平均相当ひずみは

図 6 母相のひずみ集中係数 A_M と体積率 V_f の関係

図 7 介在物のひずみ集中係数 A_I と降伏応力比 α の関係 ($V_f=0.1$)

図 8 ひずみの多軸性を表すパラメータ χ と形状比 R の関係

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = V_f(\bar{\varepsilon}_{eq}) + (1 - V_f)(\bar{\varepsilon}_{eq})_M \quad (14)$$

で与えられる。式(12), (14)から

$$1 = V_f A_I + (1 - V_f) A_M \quad (15)$$

を得る。ここで、介在物がほとんど変形せず、変形が主として母相で生ずる場合には、 $A_I = 0$ とおくと、

$$A_M = 1/(1 - V_f) \quad (16)$$

となる。式(16)の関係を図6(a)中の実線で示している。

式(13)に式(9), (11), (15)を代入すると

$$\sigma^*/\sigma_M = \{1 + A_I(\alpha - 1)V_f\}\chi \quad (17)$$

が得られる。式(17)が材料の平均降伏応力を与える式である。材料全体がひずみ一定で変形をする場合には、 $A_I = 1, A_M = 1, \chi = 1$ となるから、式(17)は

$$\sigma^* = \sigma_I V_f + \sigma_M(1 - V_f) \quad (18)$$

と表される。これは複合材料の分野でよく知られてい

る複合則である。

図8にひずみの多軸性を表すパラメータ χ と形状比 R との関係を示す。介在物が硬い場合、図8(a)に示されるように、形状比 $R=1$ 付近で χ の値は最も大きくなり、 $R=0.1$, あるいは10では χ は1に近づいている。ただし、 $V_f=0.1$ では、形状比 $R=1 \sim 1.4$ で χ はいったん減少している。体積率が大きくなると χ も増加する。

介在物が軟らかい場合には、図8(b)に示されるように、形状比 $R=1$ 近傍で χ が最大値をとり、 $R=0.1$, あるいは10近傍では χ は1に近づいている。

図9は、式(17)から計算した平均応力 σ^* と母相の降伏応力 σ_M の比と形状比 R との関係を示している(黒印)。同時に z 方向、 r 方向の節点荷重から求めた変形応力の値も示している(白印)。両者はよく一致しており、式(17)による変形応力の推定が妥当であることを示している。一点鎖線は複合則[式(18)]から得られる値を示している。

図10は変形応力と体積率の関係を示している。図中の一点鎖線は複合則[式(18)]を示している。硬い介在物の場合、図10(a)に示されるように形状比が0.1あるいは5の場合には、ほぼこの線上に位置しており、体積率と平均変形応力はほぼ比例関係にある。

(e) ひずみのばらつき 塑性変形にともなって不均質体内部に生ずるひずみのばらつきは、自由表面の粗さの増加などとも関連しており、重要である⁽¹⁷⁾。そこで以下では、このひずみのばらつきについて検討する。

図9 平均変形応力と形状比 R の関係

図10 平均変形応力と体積率 V_f の関係

図 11 に、介在物および母相の各要素のひずみ分布の最大値および最小値と形状比の関係を示している。次に、ひずみのばらつきの傾向を示すため、ひずみの標準偏差を S としたとき、次式によって変動係数 V を定義し、求めた例を図 12 に示す。

$$V = \frac{S}{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{\bar{\epsilon}} \sqrt{\frac{\sum_i [(\epsilon_{eq})_i - \bar{\epsilon}_{eq}]^2 \Delta V_i}{\sum_i \Delta V_i}} \quad \dots (19)$$

ここに、 $\bar{\epsilon}_{eq}$ は介在物に対しては $(\epsilon_{eq})_i$ 、母相に対しては $(\epsilon_{eq})_M$ である。一方、材料全体 (Total) に対しては $\bar{\epsilon}_{eq}$ をとる。なお、 ΔV_i は各リング状要素の体積であり、 $(\epsilon_{eq})_i$ は要素の平均相当ひずみである。

図 3, 4 あるいは図 11, 12 からわかるように、母相が塑性の場合、一般にはひずみは介在物中では一定ではない。このことは、母相が弾性変形をする場合、介在物中のひずみが一定となるという Eshelby の結果⁽¹⁾とは対照的であり、Eshelby の結果を塑性の問題に拡張して適用する場合には注意が必要である。

以上、本報の計算にはすべて図 1(b) の軸対称のモデルを用いた。図 1(a) の三次元的モデルを用いた場合には、外周の境界条件から受ける変位の拘束が多少弱くなる傾向を示すと予想されるが、介在物の変形挙動は類似であると考えられる。

(a) $\alpha = 2$

(b) $\alpha = 1/2$

図 11 ひずみ分布の最大値、最小値と形状比 R の関係 ($V_f=0.1$)

4. 結 言

円筒形母相中にだ円体介在物を含む軸対称不均質体のモデルの塑性変形挙動について、介在物が硬い場合と、軟らかい場合を想定して、剛塑性有限要素法を用いて解析を行った。得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 介在物を含む材料の変形は形状比、体積率によって変化する。硬い介在物の場合、形状比が 1 に近いと介在物が変形しにくい。形状比が 1 に比べて小さいかあるいは大きいときには、材料全体の変形はひずみ一定に近づく。

(2) 二相材全体としての平均変形応力は、単に複合則に従うものではなく、形状比の影響を強く受ける。すなわち、形状比が 1 に近い場合、複合則からのずれが最も大きい。

(3) 軸対称形だ円体介在物の場合も、先に報告した平面だ円形介在物の場合と類似の変形挙動を示すが、相違点として、せん断帯の発生が少ないこと、および硬い介在物の場合、体積率が大きくなると形状比 $R=1$ 近傍においても、介在物に変形が生ずる傾向があることが認められる。

(a) $\alpha = 2$

(b) $\alpha = 1/2$

図 12 変動係数 V と形状比 R の関係 ($V_f=0.1$)

終わりに、本研究に協力を受けた三洋電機㈱、林孝明氏、および数値計算に利用した岡山大学総合情報処理センターに謝意を表す。

文 献

- (1) Eshelby, J. D., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **241**(1957), 376; *Ser. A*, **252**(1959), 561.
- (2) Ashby, M. F., *Phil. Mag.*, **14**(1966), 1157; **21**(1970), 399.
- (3) Avitzur, B., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, **95**(1973), 39.
- (4) Oyane, M., Tada, Y., Shima, S., Sato, T. and Omura, M., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, **105**(1983) 39.
- (5) 小林, Lee, C., Shah, S., 塑性と加工, **14**-153(1973), 770.
- (6) 奏・石川・山本, 塑性と加工, **15**-167(1974), 1003.
- (7) Price, J. W. H. and Alexander, J. M., *Proc. 4th North*

- America, Metal working Res. Conf.*, (1976), 46.
- (8) 小坂田・森, 第15回塑性加工研究会, 剛塑性有限要素法, (1982), 1, 日本塑性加工学会.
- (9) 小坂田, 機械の研究, **35**(1983), 56.
- (10) 阿部・長岐・林, 機論, **52**-473, A (1986), 215.
- (11) Nagayama, N., Abe, T. and Nagaki, S., *Int. J. Computational Mech.*, to be published.
- (12) 阿部・長岐・古野, 機論, **51**-468, A (1985), 2042.
- (13) Zienkiewicz, O. C., (吉識, 山田訳)マトリックス有限要素法(三訂版), (1977/84), 189, 培風館.
- (14) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **11**-5(1963), 357.
- (15) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **12**-2(1965), 9.
- (16) Clarebrough, L. M. and Perger, G. R., *Aust. J. Sci. Res.*, **A5**(1952), 144.
- (17) 阿部・長岐・前田・岡部, 機論, **51**-468, A (1985), 2036.

討 論

〔質問〕 東郷 敬一郎〔静岡大学工学部〕

介在物を含む材料の変形挙動に関する一連の研究に敬意を表す。以下の2点についてお教えいただきたい。

(1) 本論文のような二相材料のモデルを解析する場合、剛塑性有限要素法の長所、短所および精度を、通常の弾塑性有限要素法と比較して教えていただきたい。

(2) 粒子分散形強化材料の破壊・強度を論ずる時、ひずみだけでなく、粒子、マトリックス、界面の微視的応力が重要であると思う。粒子、マトリックスの微視的主応力の分布はどのようになっていたか。特に、変形拘束が大きいと思われる $\alpha=2, R=1$ の場合について示していただきたい。

〔回答〕 ご討論に感謝する。

(1) 一般に、剛塑性有限要素法による解析は、塑性力学における上界定理に基づいており、すべり線場解などと同様に材料の塑性変形の特徴をよく表しており、ひずみの大きな場合の計算に適していると考えられる。二相材料の場合にも、弾性の影響を除いた塑性変形の特徴を知ることができる利点がある。一方、弾塑性有限要素法は弾性-塑性の遷移域における現象の解析には不可欠と考えられる。また、弾塑性有限要素法では繰返し計算を行った場合の計算誤差の累積があるため、各ひずみ段階における最適解を求める剛塑性有限要素法のほうがひずみが大きい場合に誤差が少ないと言われている。

(2) 本論文では残念ながら応力を求めることはできていない。本解析では塑性変形における体積一定条件を仮定しているが、このために応力の静水圧成分の計算に工夫が必要となる。この点今後の計算手法を改

良して応力を求めたいと考えている。また、応力については、弾塑性有限要素法による計算結果とも比較検討する必要があると思われる。

〔質問〕 田 中 學〔秋田大学鉱山学部〕

二相材料の変形について数値解析をされている点、興味深く拝見させていただいた。下記の点についてお教えいただければ幸いです。

Eshelbyの方法を拡張し応用して、田中(紘)、森は塑性変形しない第二相を含む金属材料の変形を、系の全自由エネルギーに関する議論に基づいて解析している(付1)。また、討論者らの弾塑性有限要素法を用いた解析結果では、田中(紘)と森の理論において母相中の塑性ひずみが場所によらず一定とした仮定がだいたい成立することが確認されている(付2)。実際の二相材料は母相、第二相とも弾塑性変形し加工硬化するのが一般的であるが、このような材料の変形についても、本研究の解析結果が適用できるか。

〔回答〕 ご討論に感謝する。

本解析は剛完全塑性体を仮定して計算をしており、降伏応力は一定としている。しかしながら、材料が加工硬化する場合について拡張することは、繰返し計算をする必要がある点を除けば、特に困難はないと考えられる。

本計算の結果(図3, 4)では、形状比などの条件によっては、介在物あるいは母相にひずみ分布を生じ、特にせん断帯を生ずる条件ではその傾向が著しいようである。例えば、硬い介在物の場合(図3)にはAB方向に、軟らかい介在物の場合(図4)にはOC方向にひずみの集中する領域が認められる。これは、ご指摘の討論者らの計算が、弾塑性有限要素法による比較的ひ

ずみの小さい領域についての結果であると思われるの
 に対して、本報の場合には剛完全塑性体を仮定してい
 ることから、よりひずみの集中が生じやすくなってい
 ることによると考えられる。

なお、Eshelby の解析は、介在物は弾性、非弾性変

形とも適用できるが、母相は弾性体の場合を取扱って
 いると考えられる。

-
- (付1) Tanaka, K. and Mori, T., *Acta Met.*, 18(1970), 931.
 (付2) 藤田・ほか3名, 機論, 45-400, (1979)1451 の討論。