高階層極性物質の概念とその薄肉部材への応用*

高 橋 邦 弘^{*1}

Higher Stage Polar Materials and the Application to Thin-Walled Members

Kunihiro TAKAHASHI

Polar materials or oriented media are typical examples of generalized continua. These materials, to some extent, are composed of particles that behave like rigid bodies or deformable particles, unlike the geometrical points of the classical continuum theory. Extending these theories in this paper, higher stage inner structures are further introduced successively in the microstructure. This continuum model can be called "higher stage polar materials". The kinematics of the 2nd stage polar materials are studied as an example of the n -th stage polar materials, and 2nd stage strain measures are obtained in addition to the conventional 1st stage strain measures. Applying this model, cross-sectional distortions of thin-walled open cross-section members are analyzed. Constitutive equations and balance equations are obtained, which have the same form as the conventional formula. We can regard the concept of "bimoment" in the theory of thin-walled structures as the couple-stress of the 2nd stage polar materials.

Key Words: Elasticity, Structural Analysis, Continuum Mechanics, Polar Material, Cosserat Continuum, Couple-Stress, Thin-Walled Member, Distortion

1. は じ め に

古典的な連続体理論に対して微細な内部構造を考慮した一般化連続体力学については従来多くの研究がなされてきた。なかでも極性物質あるいはマイクロポーラ弾性体と呼ばれる連続体に関しては、いくつかの定義が提案され、その性質が論じられてきている^{(1)~(7)}。

Eringen⁽¹⁾は極性物質の分類として、物質内の一点に剛体回転を許容するマイクロポーラ連続体(micropolar continua), 剛体回転のみでなく一様変形を考慮するマイクロモルフィック連続体(micromorphic continua), さらに一様変形でなく、任意の変形を一点に認めるという高次マイクロモルフィック連続体(higher-order micromorphic continua)をあげている。高次マイクロモルフィック連続体は他の2種類のモデルを包含している。また Green⁽⁶⁾らはこれらをディレクタ理論(theory of directors)と総称しており、さらにこれを拡張した概念として多ディレクタ理論(theory of a number of directors)をあげている。

このほかにも Green らは、一点にディレクタベクトル

ではなくテンソルを付随させたマルチポーラ(multipolar)連続体⁽⁷⁾を提案している。これらを図示すると図1のごとくなるが、いずれも物質内の一点に拡がりをもたせ、その部分の回転と変形を認めるところが特徴である。

これと類似の考え方であるが、もう一段階層を進め、一点に拡がりをもたせ、その内部にさらに内部構造が存在すると考えることも可能である。本論文ではその新たな連続体モデルを高階層極性物質と呼び、その性質、特に変形の幾何学について論ずる。この考えかたによれば従来の極性物質は階層1の極性物質に相当すると言うことができる。ここでは階層2の場合を考察

図1 極性物質

* 平成元年4月4日 第66期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和63年4月20日。

^{*1} 正員、慶応義塾大学理工学部(〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

図 2 階層 2 の極性物質

図 3 高階層極性物質の例

する。

階層 2 の極性物質の例として、断面の変形を伴う薄肉開き断面部材をとりあげ、バイモーメントなる概念は高階層極性物質の偶応力(高階層偶応力)に相当することを述べる。

2. 高階層極性物質の概念

連続体の内部の一点に拡がりを持たせ、さらにその中に内部構造を考える。またその中に内部構造を次々に考えていくことが可能である。従来の極性物質はその第一段階に相当するが、 n 段階までの内部構造も考え得る。従来の極性物質が図 1 で示されるのに対応して、もう一段階内部の構造を考えたモデルを図 2 で示すことができる。

このモデルの実際の例としては、部分的に集落を持った固体が浮遊している流体など、複雑な内部構造を有する連続体があげられる。とくに本論文では薄肉断面の部材をその例としてとりあげる。薄肉部材の断面の図心が一次元物質内の一点であり、この点に付随する一次元の内部構造として断面中央線が考えられ、さらにそれに付随する断面一般点が存在する。このようにすれば開き断面部材のそり拘束ねじりおよび断面変形を考慮することができる。これらの実例を図 3 に示

図 4 階層 2 の極性物質の変形

す。

以上の概念による連続体を高階層極性物質(higher stage polar materials)と呼ぶことにする。図 2 に示した例は階層 2 の極性物質であるが、さらに内部構造を考えていけば階層 n の極性物質の例を考えることも可能である。

3. 高階層極性物質の変形とひずみ

変形前後の内部の点の位置を図 4 に示す。変形前を大文字、変形後を小文字で示す。このとき次の関係がある。

$$X' = X + E + A, \quad x' = x + \xi + \lambda \quad \dots \dots \dots (1)$$

変形前の微小線素 dX は変形により次のように変換される。

$$dx(X) = \nabla x dX(x) \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここで ∇x は変形勾配で、成分表示すれば $\partial x^i / \partial X^j (\equiv x^i_{,j})$ である。簡単のため内部構造においては一樣変形であるとみなす。このことは高次マイクロモルフィック連続体の高次項を考えないことに相当する。よって次の関係がある。

$$\xi(x, E) = x(X) E(x, \xi) \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$d\xi(x, E) = dx(X) E(x, \xi) + x(X) dE(x, \xi) \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここで次の関係がある。

$$x^i_{,a} = \partial \xi^i / \partial E^a |_{E=0} = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

なお本論文を通じ、大文字の指標は変形前の座標に関する成分を表し、小文字の指標は変形後の座標に関する成分を表すことにする。また X に関する微係数と E に関する微係数を区別する場合には、ローマ字の指標で X に関する微係数を示し、ギリシャ文字の指標で E に関する微係数を表すことにする。いずれも 1~3 の値をとり総和規約に従うものとする。

一方、次のステージの変形も一樣変形であるとする。と次の関係がある。

$$\lambda(X, E, A) = x(X, E) A(x, \xi, \lambda) \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$d\lambda(X, \Xi, \Lambda) = d\kappa(X, \Xi)\Lambda(x, \xi, \lambda) + \kappa(X, \Xi)d\Lambda(x, \xi, \lambda) \quad \cdots (7)$$

$$\text{ここで } x^i_p = \partial\lambda^i/\partial\Lambda^p|_{\Lambda=0} \quad \cdots (8)$$

である。

式(2), (3), (4), (6)および式(7)により式(1)₂の変化量は次のようになる。

$$\begin{aligned} dx' &= dx + d\xi + d\lambda \\ &= \nabla x dX(x) + d\chi(X)\Xi(x, \xi) + \chi(X)d\Xi(x, \xi) + d\kappa(X, \Xi)\Lambda(x, \xi, \lambda) + \kappa(X, \Xi)d\Lambda(x, \xi, \lambda) \quad \cdots (9) \end{aligned}$$

指標表示によれば、|で共変微分を表すとして、

$$\begin{aligned} dx^i &= x^i_{,I} dX^I + d\chi^i_a \Xi^a + \chi^i_a d\Xi^a + dx^i_p \Lambda^p + x^i_p d\Lambda^p \\ &= (x^i_{,I} + \chi^i_a |_{,I} \Xi^a + x^i_p |_{,I} \Lambda^p) dX^I + (\chi^i_a + x^i_p |_{,a} \Lambda^p) d\Xi^a + x^i_p d\Lambda^p \quad \cdots (10) \end{aligned}$$

となる。つぎにこの線素 dx' の二乗をとる。

$$\begin{aligned} dx' \cdot dx' &= g_{ij} (x^i_{,I} x^j_{,J} + 2x^i_{,I} \chi^j_a |_{,J} \Xi^a + 2x^i_{,I} x^j_p |_{,J} \Lambda^p + \chi^i_a |_{,I} \Xi^a \chi^j_p |_{,J} \Xi^b + \\ &\quad + 2\chi^i_a |_{,I} \Xi^a \chi^j_p |_{,J} \Lambda^p + x^i_p |_{,I} \Lambda^p x^j_q |_{,J} \Lambda^q) dX^I dX^J \\ &\quad + g_{ij} (2x^i_{,I} \chi^j_a + 2x^i_{,I} x^j_p |_{,a} \Lambda^p + 2\chi^i_p |_{,I} \Xi^a \chi^j_a + 2\chi^i_p |_{,I} \Xi^a x^j_p |_{,a} \Lambda^p \\ &\quad + 2x^i_p |_{,I} \Lambda^p \chi^j_a + 2x^i_p |_{,I} \Lambda^p x^j_q |_{,a} \Lambda^q) dX^I d\Xi^a + g_{ij} (2x^i_{,I} x^j_p + 2\chi^i_a |_{,I} \Xi^a x^j_p + 2x^i_q |_{,I} \Lambda^q x^j_p) dX^I d\Lambda^p \\ &\quad + g_{ij} (\chi^i_a \chi^j_p + 2\chi^i_a x^j_p |_{,p} \Lambda^p + x^i_p |_{,a} \Lambda^p x^j_q |_{,p} \Lambda^q) d\Xi^a d\Xi^b + g_{ij} (2\chi^i_a x^j_p + 2x^i_q |_{,a} \Lambda^q x^j_p) d\Xi^a d\Lambda^p \\ &\quad + g_{ij} (x^i_p x^j_q) d\Lambda^p d\Lambda^q \quad \cdots (11) \end{aligned}$$

ここで g_{ij} は計量テンソルである。上式中の座標成分の係数を抜き出すと次の 21 種類となる。

$$\begin{aligned} &g_{ij} x^i_{,I} x^j_{,J} \quad g_{ij} x^i_{,I} \chi^j_a |_{,J} \quad g_{ij} x^i_{,I} x^j_p |_{,J} \quad g_{ij} \chi^i_a |_{,I} \chi^j_p |_{,J} \quad g_{ij} \chi^i_a |_{,I} x^j_p |_{,J} \quad g_{ij} x^i_p |_{,I} x^j_q |_{,J} \\ &g_{ij} x^i_{,I} \chi^j_a \quad g_{ij} x^i_{,I} x^j_p |_{,a} \quad g_{ij} \chi^i_p |_{,I} \chi^j_a \quad g_{ij} \chi^i_p |_{,I} x^j_p |_{,a} \quad g_{ij} x^i_p |_{,I} \chi^j_a \quad g_{ij} x^i_p |_{,I} x^j_q |_{,a} \\ &g_{ij} x^i_{,I} x^j_p \quad g_{ij} \chi^i_a |_{,I} x^j_p \quad g_{ij} x^i_q |_{,I} x^j_p \quad g_{ij} \chi^i_a \chi^j_p \quad g_{ij} \chi^i_a x^j_p |_{,p} \quad g_{ij} x^i_p |_{,a} x^j_q |_{,p} \\ &g_{ij} \chi^i_a x^j_p \quad g_{ij} \chi^i_q |_{,a} x^j_p \quad g_{ij} x^i_p x^j_q \quad \cdots (12) \end{aligned}$$

このうち独立なものは 6 種類である。上の中から 6 種類をとりだし、変位零でひずみが零になるようにし、かつ従来のひずみの定義と同じ形になるように整理すると、次のひずみを定義することができる。

$$[E]_{IJ} = E_{IJ} = (1/2)(g_{ij} x^i_{,I} x^j_{,J} - G_{IJ}) \quad \cdots (13)$$

$$[\Phi]_{ia} = \Phi_{ia} = g_{ij} x^i_{,I} \chi^j_a - G_{ia} \quad \cdots (14)$$

$$[\hat{\Phi}]_{ip} = \hat{\Phi}_{ip} = g_{ij} x^i_{,I} x^j_p - G_{ip} \quad \cdots (15)$$

$$[\Gamma]_{iaj} = \Gamma_{iaj} = g_{ij} x^i_{,I} \chi^j_a |_{,J} \quad \cdots (16)$$

$$[\hat{\Gamma}]_{ipj} = \hat{\Gamma}_{ipj} = g_{ij} x^i_{,I} x^j_p |_{,J} \quad \cdots (17)$$

$$[\hat{\Gamma}]_{ra} = \hat{\Gamma}_{ra} = (1/2) \varepsilon_{pqr} x^i_{,I} x^j_p |_{,a} x^k_q \quad \cdots (18)$$

ここで添字付きの G は変形前の座標に関する計量テンソルである。式(13)は従来のマクロなひずみ、式(14)および(16)は階層 1 の従来のマイクロモルフィック連続体のひずみであり、式(15), (17)および(18)は新たに得られた階層 2 の極性物質のひずみである。

4. 薄肉開き断面部材への応用

4.1 変形とひずみ 以上の概念の具体例として、変形前に直線である薄肉開き断面部材をとりあげ、その微小変形を考えよう。図 3 では薄肉開き断面部材の一般的な断面を示した。以下では簡単のため断面は図 4 のごとくいくつかの折板から成るとし、各構成板は板ごとに各々せん断中心まわりの回転をすると考える。断面全体が剛体回転とした場合にはせん断中心はひとつで、ねじり中心に一致する。構成板が別々に回転する場合は断面変形を生じることになり、各構成板ごとにせん断中心が存在する⁽⁸⁾。そのせん断中心まわりに各構成板が剛体回転することにより第一種の

断面変形が表現される。もちろん、変位の連続性を満たすためにこれに付随する面外曲げ⁽⁸⁾も存在する。なおここでは文献(8)と同様、第二種の断面変形はその局所的な性質のゆえに無視することにする。

式(1)の位置ベクトルを図 5 のようにとる。座標系は X_1, X_2 を断面主軸方向にとり、 X_3 を軸方向にとる。また、 Y_1, Y_2 は図 5 に示すごとく断面中央線に沿う座標系とする。以下すべて直交直線座標を用いるのでテンソル指標はどれも下指標を用いる。また初めに述べたテンソル指標のほかに、断面変形の自由度に関する項の級数の指標として f, g, h を用いる。これら級数の指標のうち、 f, g に関しては $0 \sim m$ (m : 断面変形の自由度)にわたり総和規約を用いるが、 h に関し

ては総和規約を用いない。なお $[Q]$ は、 Y_i 座系から X_i 座系への変換行列である。

$$\left. \begin{aligned} [X] &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, [\Xi] = \begin{bmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [A_h] &= [Q] \begin{bmatrix} j_h \\ h_h - Y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} [x] &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + u_1 \\ X_2 + u_2 \\ X_3 + u_3 \end{bmatrix} \\ [\xi] &= \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} [\nabla x] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & u_1'(X_3) \\ 0 & 0 & u_2'(X_3) \\ 0 & 0 & 1 + u_3'(X_3) \end{bmatrix} \\ [x] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_1'(X_3) \\ 0 & 1 & u_2'(X_3) \\ -u_1'(X_3) & -u_2'(X_3) & 1 \end{bmatrix} \\ [x_h] &= [Q] \begin{bmatrix} 1 & \theta_h(X_3) & -\theta_h'(X_3)h_h \\ -\theta_h(X_3) & 1 & -\theta_h'(X_3)C_h \\ \theta_h'(X_3)h_h & \theta_h'(X_3)C_h & 1 \end{bmatrix} [Q]^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \theta_h(X_3) & -\theta_h'(X_3)H_h \\ -\theta_h(X_3) & 1 & -\theta_h'(X_3)D_h \\ \theta_h'(X_3)H_h & \theta_h'(X_3)D_h & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

た だ し $H_h = h_h \cos \alpha - C_h \sin \alpha$, $D_h = h_h \sin \alpha - C_h \cos \alpha$ であり, α は Y_1 軸と X_1 軸とのなす角である。式(21)において ' は X_3 に関する微係数を示す。式(21)_{2,3} は剛体回転を表す直交行列において微小回転を仮定したものに相当している。また本論文では、固有回転比⁽⁸⁾ μ_h を省略して記した。

断面変形の全自由度を有限級数の形で表現するため, $\lambda = x_f A_f$ (f について $0 \sim m$ まで総和をとる)の形をとる必要がある。このことは多ディレクタ理論の考えかたを導入することに相当する。しかしこれによってひずみの定義, 式(13)~(18)を大きく変更する必要はない。例えば式(18)を例にとれば, 次のように修正すればよい。

$$\bar{\gamma}_{RQ} = (1/2) \epsilon_{PQR} x_i^{(P)} \lambda_i^{(Q)}, \quad (h, f = 0 \dots m)$$

h や f の記号は断面変形の第 h および第 f 自由度の量であることを意味している。実際に計算を行うと, 上の式のうち第 f 自由度に関する x の成分は, 対角項

の定数1のみが必要となり, 第 h 自由度の成分のみが残ることになる。

さて式(21)を式(13)~(18)に代入すると次のようになる。

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3' \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3' \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

$$[\hat{\Phi}_h] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u_1' + \theta_h' H_h & u_2' + \theta_h' D_h & u_3' \end{bmatrix} \dots\dots (24)$$

$$[\Gamma]_{(I=3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -u_1'' \\ 0 & 0 & -u_2'' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

$$[\hat{\Gamma}_h]_{(I=3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\theta_h' H_h)' \\ 0 & 0 & (\theta_h' D_h)' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

$$[\hat{\Upsilon}_h] = \begin{bmatrix} (\theta_h' D_h)_{,1} & (\theta_h' D_h)_{,2} & (\theta_h' D_h)' \\ -(\theta_h' H_h)_{,1} & -(\theta_h' H_h)_{,2} & -(\theta_h' H_h)' \\ -\theta_{h,1} & -\theta_{h,2} & -\theta_h' \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

式(27)の_{,1} および_{,2} は各々 Ξ_1, Ξ_2 による微係数を示す。式(24), (26)および式(27)の左辺の指標 h は, 断面変形の第 h 自由度に対するひずみであることを示している。また式(25)および(26)の $\Gamma, \hat{\Gamma}_h$ は式(16)および式(17)に示したごとく, 3階のテンソルであるが, 指標 I が3のとき以外の成分は零になるので, $I=3$ とし2階のテンソルとして成分表示した。

式(13)~(18)の幾何学的意味を考えながら式(22)~(27)を見ると, 階層零のマクロなひずみ E には軸方向の伸縮 u_3' が関係しており, 階層1の従来の極性

図5 薄肉開き断面部材

物質のひずみ Γ には曲げのひずみに対応する軸線の曲率 u_1'', u_2'' が関係している。

これに対し階層2のひずみである $\hat{\Phi}_h$ には θ_h' が関係している (u_1' と u_2' は剛体回転そのものであるのでひずみとしては不適当である)。また同じく階層2のひずみである $\hat{r}_h$ は θ_h'' が関係している。また、やはり階層2のひずみである $\hat{r}_h$ には $\theta_{h,1}$ および $\theta_{h,2}$ が含まれているが、これらは隣接する構成板同志の相対回転角に対応しており、文献(8)を参照することにより、いずれも θ_h そのものに比例する項であることがわかる。またここには $\theta_{h,1}$ および $\theta_{h,2}$ も含まれているが、これらは単に上の量を X_3 で微分したものであるから、 θ_h' に比例する量とみなすことができる。

最後に述べた θ_h に比例する項は、式(18)の $\hat{r}$ の定義によれば、微小体積内の座標 E^a による微係数の存在により生ずるものであり、これが階層2の極性物質の一つの特徴である。つまり階層2の微小要素同志の相対回転角を表現するのがこのひずみである。

結局、棒の伸縮を表現するには階層零の物質、曲げを表現するには階層1の極性物質、断面変形までを考慮するには階層2の極性物質の考えかたを導入することが適当であるということが出来る。

4.2 構成式 式(22)~(27)のひずみを構成する要素、ならびにその後に記した考察によって、ひずみは次の量により表されることがわかる。

$$\begin{aligned} u_3' &: \text{階層零のひずみ} \\ u_1'', u_2'' &: \text{階層1のひずみ} \\ \theta_h'', \theta_h', \theta_h (h=0 \sim m) &: \text{階層2のひずみ} \end{aligned}$$

線形な構成式を考えるので、ひずみエネルギーはこれらの二次形式で与えられる。ただし、後にひずみの意味を考察することによっていくつかの項が消えるので、ここでは手続きを省略して、結果的に後に有用になる項のみを残しておく。このことは、ねじりおよび断面変形のそり関数を直交化することなどに対応している。よってひずみエネルギー U は、 X_3 方向の単位長さ当たりのひずみエネルギー密度を u として次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U &= \int_{X_3} u dX_3 \\ &= (1/2) \int_{X_3} (I_3 u_3'^2 + I_1 u_1''^2 + I_2 u_2''^2 \\ &\quad + J_f \theta_f'^2 + J_{f\theta} \theta_f' \theta_g' + M_{f\theta} \theta_f \theta_g) dX_3 \quad \dots (28) \end{aligned}$$

ここで添字付きの I, J, M は比例係数であり、この極性物質の弾性定数である。

また、各々のひずみに対応する応力は次のようになる。

$$\begin{aligned} P_3 &= \partial u / \partial u_3' = I_3 u_3' &: \text{階層零の応力} \\ M_2 &= \partial u / \partial u_1'' = I_1 u_1'' &: \text{階層1の偶応力} \\ M_1 &= -\partial u / \partial u_2'' = -I_2 u_2'' &: \text{階層1の偶応力} \\ B_h &= \partial u / \partial \theta_h'' = J_h \theta_h'' &: \text{階層2の偶応力} \\ T_h &= \partial u / \partial \theta_h' = J_{hf} \theta_f' &: \text{階層2の偶応力} \\ N_h &= \partial u / \partial \theta_h = M_{hf} \theta_f &: \text{階層2の偶応力} \\ &\dots (29) \end{aligned}$$

式(28)および(29)では、前述のごとく指標 h については総和せず、 f, g については $0 \sim m$ にわたり総和規約を適用する。

階層1の応力は従来の偶応力に対応する。これにならって階層2の応力も偶応力と呼んでおこう。のちに従来の式と比較してわかることであるが、式(29)₁は軸直接力、式(29)_{2,3}は曲げモーメント、式(29)₄はそり拘束ねじり ($h=0$) および断面変形 ($h=1 \sim m$) のバイモーメント、式(29)₅は拡張された St. Venant のねじりモーメント⁽⁸⁾にそれぞれ対応している。式(29)₆はバイモーメントの一種であるが、これまで定義されていないものである。周知のごとくはりの曲げモーメントは一次元極性物質の偶応力に相当するが、これに対応し、バイモーメントなる概念は階層2の極性物質の偶応力として理解することができる。

4.3 釣合い式 仮想仕事の原理を用いてひずみで表現した釣合い式を求める。

外力のなす仮想仕事 δW は、一点に加わる力を $[F] = [F_1 F_2 F_3]^T$ とすると

$$\delta W = \int_A \mathbf{F} \cdot \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{X}') dA \quad \dots (30)$$

で表される。ただし外力ははりの両端面 ($X_3=0, l$) にのみ加わるとした。 A は両端面の表面積である。このとき式(19)~(21)より次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta[(\mathbf{x}' - \mathbf{X}')] &= \delta \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\ &+ \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_1' E_1 - u_2' E_2 \end{bmatrix} + [\mathbf{Q}] \delta \begin{bmatrix} \theta_f h_f \\ -\theta_f j_f \\ \theta_f' \omega_f \end{bmatrix} \quad \dots (31) \end{aligned}$$

ここで $h_f = h_f - Y_2$, $\omega_h = h_h j_h$ とおいた。

式(30), (31)より

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_A \{ F_i \delta u_i - F_3 (E_1 \delta u_1' + E_2 \delta u_2') \\ &\quad + S_1 h_f \delta \theta_f + F_3 \omega_f \delta \theta_f' \} dA \quad \dots (32) \end{aligned}$$

となる。ここで $[\mathbf{F}] = [\mathbf{Q}] [S_1 \ 0 \ F_3]^T$ とした。

式(32)を積分し書き換えると

$$\begin{aligned} \delta W &= (P_i \delta u_i + M_2 \delta u_1' - M_1 \delta u_2' \\ &\quad + Q_f \delta \theta_f + B_f \delta \theta_f')|_0^l \quad \dots (33) \end{aligned}$$

を得る。ここで P_i ははりのせん断力と軸圧縮力, M_1, M_2 は曲げモーメント, Q_f は断面変形の横方向バイモーメント, B_f は縦方向バイモーメントである。

$\delta(U-W)=0$ に式(28), (33)を代入し, Euler-Lagrange の式を求めると次式が得られる。

$$u_1''''=0 \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$u_2''''=0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

$$u_3''=0 \quad \dots\dots\dots(36)$$

$$J_h \theta_h'''' - J_{hf} \theta_f'' + M_{hf} \theta_f = 0, (h=0 \sim m) \quad \dots\dots\dots(37)$$

境界条件の一般形として部材の両端末で次の形を得る。

$$(I_1 u_1'' - M_2) \delta u_1' = 0 \quad \dots\dots\dots(38)$$

$$(-I_1 u_1'''' - P_1) \delta u_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(39)$$

$$(I_2 u_2'' + M_1) \delta u_2' = 0 \quad \dots\dots\dots(40)$$

$$(-I_2 u_2'''' - P_2) \delta u_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(41)$$

$$(J_h \theta_h'' - B_h) \delta \theta_h' = 0 \quad \dots\dots\dots(42)$$

$$(-J_h \theta_h'''' + J_{hf} \theta_f' - Q_h) \delta \theta_h = 0 \quad \dots\dots\dots(43)$$

これらの釣合い式と境界条件式は文献(8)の式と同じ形をしている。式(34), (35)が曲げ, (36)が軸方向伸縮, (37)が曲げねじり ($h=0$) を含む断面変形 ($h=1 \sim m$) の式である。なおここでは分布外力の項は省いてある。応力で釣合い式を書くと式(34)~(37)および(29)より,

$$M_2''=0 \quad \dots\dots\dots(44)$$

$$M_1''=0 \quad \dots\dots\dots(45)$$

$$P_3'=0 \quad \dots\dots\dots(46)$$

$$B_h'' - T_h' + N_h = 0, (h=0 \sim m) \quad \dots\dots\dots(47)$$

となる。

式(34)~(43)の中の添字付きの I, J, M は極性物

質の弾性定数であるので、一般には実験等によらねば求めることが困難であるが、文献(8)の式と見比べることによって、各種の剛性であることがわかる。また同様に添字付きの P, M, B, Q が各種の一般化力に対応していることも確認できる。

5. ま と め

極性物質の内部構造の階層を進め、高階層極性物質なる概念を導入した。この連続体においては6種類のひずみが定義できる。

薄肉の部材がこの連続体の一例となることを示し、薄肉構造理論におけるバイモーメントなる概念は、高階層極性物質の偶応力として理解し得ることを示した。

終わりに、ご助言をいただいた慶応義塾大学理工学部 水野正夫名誉教授、久納孝彦教授、ならびにご討論いただいた志澤一之博士に深甚なる謝意を表す。

文 献

- (1) Eringen, A. C. and Kafadar, C. B., (Eringen, A. C. 編) *Continuum Physics IV*, (1976), 1, Academic Press.
- (2) Kröner, E. (編), *Mechanics of Generalized Continua*, (1968), Springer.
- (3) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S., *Int. J. Eng. Sci.*, 2 (1964), 189.
- (4) Eringen, A. C., *Int. J. Engng. Sci.*, 2 (1964), 205.
- (5) Suhubi, E. S. and Eringen, A. C. *Int. J. Eng. Sci.*, 2 (1964), 389.
- (6) Green, A. E. and Rivlin R. S., *ZAMP*, 18(1967), 208.
- (7) Green, A. E., and Rivlin R. S., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17(1964), 113.
- (8) 高橋・水野, 機論, 45-400, A(1979), 1545.