2個のグリフィスき裂を有する
異方性板の動的応力拡大係数について*伊 藤 勝 悦^{*1}Dynamic Stress Intensity Factors Surrounding Two Coplanar Griffith
Cracks in an Orthotropic Plate Under Impact Load

Shouetsu ITOU

The problem of determining the transient stress distribution in an infinite orthotropic plate weakened by two coplanar Griffith cracks is considered. An internal pressure is applied suddenly to the surfaces of the cracks. Application of the Fourier and Laplace transforms reduces the problem to the solution of a pair of dual integral equations in the Laplace transform plane. To solve these equations, the crack surface displacement is expanded in a series of functions which are zero outside of the cracks. The unknown coefficients accompanying in that series are solved with the aid of the Schmidt method. The stress intensity factors defined in the Laplace transform plane are inverted numerically in the physical plane. Numerical calculations are carried out for Boron-Epoxy composite materials.

Key Words: Elasticity, Fracture Mechanics, Anisotropy, Two Cracks, Impact Response, Dynamic Stress Intensity Factor

1. 緒 言

繊維強化プラスチック(FRP)は軽量で強いいため、近年、航空機や自動車などの高速車両の軽量化のための構成材料として積極的に用いられるようになってきた。この複合材にも、製品製造時に既にき裂が存在していたり、あるいは使用時にき裂が発生して進展したりする場合もあるものと考えられる。航空機などの構成部材として用いられている複合材が、き裂を起点にして破壊するようなことがあれば、その被害は極めて甚大となる可能性がある。このような観点から、繊維強化プラスチック材料に存在するき裂先端の応力拡大係数を解明しておくことは重要と考えられる。

複合材を巨視的に見れば異方性の特性を呈する。そこで、複合材のき裂に対しては、異方性弾性理論を適用して応力拡大係数を求めれば、一つの設計資料が与えられると考えて良い。機械構造物には動的荷重が作用する場合も少なくない。このため、き裂を有する複合材の動的応力拡大係数を解明しておく必要がある。

き裂の動的問題に異方性弾性理論を適用して解析し

たものとしては、大好の先駆的研究⁽¹⁾を挙げることができる。彼は、単一き裂を有する異方性無限体に調和振動波が伝ばする時の動的応力拡大係数を詳細に求めている。著者の知る限りにおいては、その後、異方性理論によるき裂の動的問題は取扱われなかったように見受けられる。最近になって、Kassir-Bandyopadhyay⁽²⁾は、大好の研究と同じ問題を衝撃応答の場合について解いている。さらに、き裂を有する異方性弾性帯板が二つの異方性半無限板に挟まれている場合の衝撃応答問題がAng⁽³⁾により、縁き裂を有する直交異方性板の衝撃応答問題が檜垣ら⁽⁴⁾により、それぞれ解かれている。このように、異方性理論によるき裂の衝撃応答問題が、最近、にわかには解析されるようになったのは、複合材が機械・構造物の部材として多用されるようになったためと思われる。

材料中に、複数のき裂が接近して存在する場合も少なくない。このような場合には、動的応力拡大係数に及ぼすき裂相互の影響を明らかにしておく必要がある。

著者⁽⁵⁾は、2個の共線等長き裂を有する等方性無限板に衝撃荷重が働く場合の動的応力拡大係数を明らかにしている。本研究では、この問題を異方性弾性理論を適用して解析し、2個のき裂周囲の動的応力拡大係

* 昭和63年8月26日 東北支部米沢地方講演会において講演、原稿受付 昭和63年9月12日。

^{*1} 正員、神奈川大学工学部(〒221 横浜市神奈川区六角橋3-27-1)。

数に及ぼす異方性の影響を解明した。基礎式にフーリエ・ラプラス変換を適用して、境界条件式をフリードホルムの連立積分方程式に導く。き裂面の変位を級数展開し、シュミット法⁽⁶⁾を適用して、この方程式を解く。ラプラス像空間において応力拡大係数を定義し、数値ラプラス逆変換の手法⁽⁷⁾を用いて物理空間の解を得ている。

2. 基礎式

図1に示すように、異方性無限板に、長さ $2l$ の2個のき裂が存在するものとする。図のように (x, y) 座標を採用し、平面応力問題を設定する。

無限板の x 方向、 y 方向の縦弾性定数をそれぞれ E_x, E_y 、せん断弾性定数、ポアソン比、密度をそれぞれ $\mu_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{yx}, \rho$ とする。この時、運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} c_{11} \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + (1 + c_{12}) \partial^2 v / \partial x \partial y \\ = 1/c_T^2 \partial^2 u / \partial t^2 \\ c_{22} \partial^2 v / \partial y^2 + \partial^2 v / \partial x^2 + (1 + c_{12}) \partial^2 u / \partial x \partial y \\ = 1/c_T^2 \partial^2 v / \partial t^2 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

となる⁽²⁾。ここに、 u, v はそれぞれ、 x 方向、 y 方向の変位であり、 $c_T, c_{11}, c_{12}, c_{22}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} c_T &= (\mu_{xy}/\rho)^{1/2} \\ c_{11} &= E_x \{1 - (E_y/E_x) \nu_{xy}^2\} / \mu_{xy} \\ c_{22} &= c_{11} E_y / E_x \\ c_{12} &= \nu_{xy} c_{22} = \nu_{yx} c_{11} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

応力は、変位 u, v から次式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x / \mu_{xy} &= c_{11} \partial u / \partial x + c_{12} \partial v / \partial y \\ \sigma_y / \mu_{xy} &= c_{12} \partial u / \partial x + c_{22} \partial v / \partial y \\ \tau_{xy} / \mu_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

3. 境界条件

図1の無限板の上側に衝撃荷重、あるいは衝撃変位が働く時、応力波、変位波が伝ばしていく。いま、変位 u, v については、

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 \\ v &= v^0(y + \sqrt{c_{22}} c_T t) H(y + \sqrt{c_{22}} c_T t) \end{aligned} \right\}$$

図1 2個のき裂と座標系

$$u=0, v=v^0(y + \sqrt{c_{22}} c_T t) H(y + \sqrt{c_{22}} c_T t) \dots (4)$$

のような変位波が伝ばされるものと設定する。ここで、 v^0 :一定値、 $H(t)$:ヘビサイドのステップ関数。この時、一定の値のステップ状の応力波が伝ばしていくことになるので、き裂先端の応力拡大係数に着目する限り、次の境界条件式を適用して問題を解けば良い。

$$\sigma_y = -pH(t), y=0, a < |x| < b \dots (5 \cdot a)$$

$$v=0, y=0, 0 \leq |x| < a \quad b < |x| \dots (5 \cdot b)$$

$$\tau_{xy}=0, y=0, |x| < \infty \dots (6)$$

ここに、 p は一定値である。

設定した問題の幾何学的形状は、き裂面に対して上下対称になっているので、 $y \leq 0$ の場合についてのみ解析を行えば十分である。

4. 解析

式(1)に、フーリエ・ラプラス変換

$$\begin{aligned} \bar{f}^*(\xi, s) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, t) \exp(i\xi x) \\ &\times \exp(-st) dx dt \end{aligned} \dots (7)$$

を適用して

$$\begin{aligned} d^2 \bar{u}^* / dy^2 - i(1 + c_{12}) \xi d \bar{v}^* / dy \\ - (\xi^2 c_{11} + s^2 / c_T^2) \bar{u}^* &= 0 \\ c_{22} d^2 \bar{v}^* / dy^2 - i(1 + c_{12}) \xi d \bar{u}^* / dy \\ - (\xi^2 + s^2 / c_T^2) \bar{v}^* &= 0 \end{aligned} \dots (8)$$

ここに、上付きの添字“*”、“*”は、それぞれ、フーリエ交換されたもの、ラプラス変換されたものを表している。式(8)を整理して

$$(d^4 / dy^4 + q d^2 / dy^2 + r)(\bar{u}^*, \bar{v}^*) = 0 \dots (9)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} q &= \xi^2 (2c_{12} + c_{12}^2 - c_{11} c_{22}) / c_{22} \\ &- (1 + c_{22}) s^2 / (c_{22} c_T^2) \\ r &= (\xi^2 c_{11} + s^2 / c_T^2) (\xi^2 + s^2 / c_T^2) / c_{22} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

式(9)の解を次のように設定する。

$$\begin{aligned} \bar{u}^* &= A \exp(\alpha y) + B \exp(\beta y) \\ \bar{v}^* &= C \exp(\alpha y) + D \exp(\beta y) \end{aligned} \dots (11)$$

ここに、 A, B, C, D は、未定係数である。 α, β は q, r の値に対応して以下のように与えられる。

$$q^2 - 4r \geq 0, -q + (q^2 - 4r)^{1/2} \geq 0 \text{ の時} \\ \alpha = \{-q + (q^2 - 4r)^{1/2}\}^{1/2} / \sqrt{2} \dots (12)$$

$$q^2 - 4r \geq 0, -q + (q^2 - 4r)^{1/2} < 0 \text{ の時} \\ \alpha = \{-q + (q^2 - 4r)^{1/2}\}^{1/2} i / \sqrt{2} \dots (13)$$

$$q^2 - 4r \geq 0, -q - (q^2 - 4r)^{1/2} \geq 0 \text{ の時} \\ \beta = \{-q - (q^2 - 4r)^{1/2}\}^{1/2} / \sqrt{2} \dots (14)$$

$$q^2 - 4r \geq 0, -q - (q^2 - 4r)^{1/2} < 0 \text{ の時}$$

$$\beta = \{-q - (q^2 - 4r)^{1/2}\}^{1/2} i / \sqrt{2} \dots\dots\dots (15)$$

$q^2 - 4r < 0$ の時

$$\alpha = (\lambda/2)^{1/2} \{\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\beta = (\lambda/2)^{1/2} \{\cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに,

$$\lambda = 2\sqrt{r}$$

$$\theta = \tan^{-1}\{(4r - q^2)/(-q)\} \dots\dots\dots (18)$$

式(11)を式(8)に代入することにより,

$$\left. \begin{aligned} A &= iC(1 + c_{12})\xi\alpha / \{\alpha^2 - (\xi^2 c_{11} + s^2/c^2)\} \\ B &= iD(1 + c_{12})\xi\beta / \{\beta^2 - (\xi^2 c_{11} + s^2/c^2)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

を得る.

式(11), (19)を応力式のフーリエ・ラプラス変換式に代入し, 境界条件(6)を適用する. この段階で, 式(11)の未定係数は C のみとなる. 次に, 式(5・a), (5・b)を連立積分方程式に導く. 未定係数 C を $\bar{v}^*$ で表し, フーリエ逆変換すれば, $y=0$ の変位 v^* , 応力 σ_y^* は次式のように表記できる.

$$\left. \begin{aligned} v^* &= 1/\pi \int_0^\infty \bar{v}^* \cos(\xi x) d\xi \\ \sigma_y^*/\mu_{xy} &= 1/\pi \int_0^\infty g(s, \xi) \bar{v}^* \cos(\xi x) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

ここに,

$$\begin{aligned} g(s, \xi) &= \left\{ \left[-\{c_{12}\xi\beta^2 + \xi(\xi^2 c_{11} + s^2/c^2)\} \{ (1 + c_{12})c_{12}\xi^2\alpha + c_{22}\alpha\{\alpha^2 - (\xi^2 c_{11} + s^2/c^2)\} \} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [c_{12}\xi\alpha^2 + \xi(\xi^2 c_{11} + s^2/c^2)] \{ (1 + c_{12})c_{12}\xi^2\beta + c_{22}\beta\{\beta^2 - (\xi^2 c_{11} + s^2/c^2)\} \} \right] \right. \\ &\quad \left. / \left\{ [\{\beta^2 - (\xi^2 c_{11} + s^2/c^2)\} \{c_{12}\xi\alpha^2 + \xi(\xi^2 c_{11} + s^2/c^2)\} - \{c_{12}\xi\beta^2 + \xi(\xi^2 c_{11} + s^2/c^2)\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \{\alpha^2 - (\xi^2 c_{11} + s^2/c^2)\} \right] \right\} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

また, 上付きの添字⁰⁰は, $y=0$ の値であることを示す.

今, $y=0$ の変位 v^{*0} を次のように級数展開する.

$$\begin{aligned} \mu_{xy} v^{*0} &= \sum_{n=1}^\infty c_n(s) 1/(2n) \sin\{n \sin^{-1}\{(a+b-2|x|)/(b-a)\} - n\pi/2\}, \quad a < |x| < b \\ \mu_{xy} v^{*0} &= 0, \quad 0 < |x| < b, \quad b < |x| < \infty \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ここに, $c_n(s)$ は未定係数である. 式(22)のように級数展開すれば, 境界条件式(5・b)は自動的に満足される. 式(22)をフーリエ変換して,

$$\mu_{xy} \bar{v}^{*0} = \sum_{n=1}^\infty c_n(s) \pi \sin\{(a+b)\xi/2 - n\pi/2\} J_n\{(b-a)\xi/2\}/\xi \dots\dots\dots (23)$$

式(23)を式(20)に代入して, 式(5・a)を適用すれば,

$$\sum_{n=1}^\infty c_n(s) \int_0^\infty g(s, \xi) / \xi J_n\{(b-a)\xi/2\} \sin\{(a+b)\xi/2 - n\pi/2\} \cos(\xi x) d\xi = -p/s, \quad a < x < b \dots\dots\dots (24)$$

ここに, $J_n(\cdot)$ はベッセル関数. 式(24)の未定係数 $c_n(s)$ は, シュミット法⁽⁶⁾を用いて解くことができる.

シュミット法を適用するためには, 式(24)の左辺の無限積分を精度良く評価しなければならない. ξ の大きな値に対して, $g(s, \xi)$ は次式で近似できる.

$$g(s, \xi) = \xi g^L + g^0 \dots\dots\dots (25)$$

ここに, g^L, g^0 は一定値であり, ξ_L を ξ の適当に大きな値, h を適当に小さな値とすれば

$$g^L = \{g(s, \xi_L) - g(s, \xi_L - h)\}/h, \quad g^0 = g(s, \xi_L) - \xi_L g^L \dots\dots\dots (26)$$

で与えられる. $g(s, \xi)$ が式(25)のような挙動を呈するので, 式(24)の無限積分を次のように変形する.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\xi &= \int_0^\infty \left\{ \frac{g(s, \xi)}{\xi} - g^L - \frac{g^0}{\xi} \right\} J_n\left(\frac{b-a}{2}\xi\right) \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left\{ \sin\left(\frac{a+b+2x}{2}\xi\right) + \sin\left(\frac{a+b-2x}{2}\xi\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left\{ \cos\left(\frac{a+b+2x}{2}\xi\right) + \cos\left(\frac{a+b-2x}{2}\xi\right) \right\} \right] d\xi + \frac{g^L}{2} \left[\frac{\sin\{n \cdot \sin^{-1}(\frac{a+b-2x}{b-a}) - \frac{n\pi}{2}\}}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2 - (\frac{a+b-2x}{2})^2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{b-a}{2}\right)^n / \left[\sqrt{(\frac{a+b-2x}{2})^2 - (\frac{b-a}{2})^2} \left\{ \frac{a+b+2x}{2} + \sqrt{(\frac{a+b+2x}{2})^2 - (\frac{b-a}{2})^2} \right\}^n \right] \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{g^0}{2} \left[\frac{1}{n} \cdot \sin \left\{ n \cdot \sin^{-1} \left(\frac{a+b-2x}{b-a} \right) - \frac{n\pi}{2} \right\} \right] \dots \dots \dots (27)$$

式(27)の右辺の無限積分の被積分関数は ξ が増大するにつれて急速に減少するので、容易にフィロンの公式を用いて数値積分可能である。

5. 応力拡大係数

未定係数 $c_n(s)$ がシュミット法で求められたので、すべての応力は計算可能となる。しかるに、線形破壊力学においては、き裂先端の応力値から定義されてくる応力拡大係数の値が重要となってくる。無限積分の形で表示される応力式の、 $\xi \rightarrow \infty$ の被積分関数の特異性から応力拡大係数を定義すれば、

$$K_I^{a*} = \sqrt{2\pi(a-x)} \sigma_y^{*0} \Big|_{x \rightarrow a-}$$

表 1 ボロン・エポキシ複合材の材料定数

Type	$E_x(N/m^2)$	$E_y(N/m^2)$	$\mu_{xy}(N/m^2)$	ν_{xy}
Type I	224.06×10^9	12.69×10^9	44.3×10^9	0.256
Type II	55.16×10^9	17.065×10^9	4.83×10^9	0.036

表 2 式(24)の左辺と右辺の値(複合材:タイプII, $a/l=0.1$, $sl/c_T=0.87$)

x/ℓ	[Values of l. h. s. in Eq. (24)] / [P/(c_T/ℓ)]	$-1/(se/c_T)$
0.101000	-1.1440 + 0.0i	-1.1494
0.155556	-1.1521 + 0.0i	
0.211111	-1.1499 + 0.0i	
.	.	
1.044444	-1.1495 + 0.0i	
1.100000	-1.1499 + 0.0i	
1.155556	-1.1501 + 0.0i	
.	.	
1.988889	-1.1485 + 0.0i	
2.044444	-1.1493 + 0.0i	
2.099000	-1.1505 + 0.0i	

図 2 タイプ I の複合材の動的応力拡大係数 K_I^a

図 3 タイプ I の複合材の動的応力拡大係数 K_I^b

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s) \sqrt{\pi} g^L / \sqrt{2(b-a)} \dots \dots \dots (28)$$

$$K_I^{b*} = \sqrt{2\pi(x-b)} \sigma_y^{*0} \Big|_{x \rightarrow b+}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s) \sqrt{\pi} (-1)^{n+1} g^L / \sqrt{2(b-a)} \dots \dots (29)$$

式(28), (29)の応力拡大係数はラプラス像空間で定義されたものであり、これらの値は、 s の限定値に対して求めることができる。そこで、物理空間での解を得るためには、数値的にラプラス逆変換する必要がある。ここでは、Miller-Guy⁽⁷⁾の手法を採用した。

6. 数 値 計 算

表 1 に示すボロン・エポキシ複合材のタイプ I, タイプ II の材料定数を用いて、数値計算を行った。式(24)の無限級数を 9 項で打ち切ってシュミット法を適用している。シュミット法の精度を確認するため、表 2 に、式(24)の左辺と右辺の値を示す。この表は、タイプ I の複合材の、 $a/l=0.1$, $sl/c_T=0.87$ の場合の値で

図4 タイプIIの複合材の動的応力拡大係数 K_I^a 図5 タイプIIの複合材の動的応力拡大係数 K_I^b

ある。この表より、シュミット法の精度は良好であることがわかる。

図2, 3に、タイプIのボロン・エポキシ複合材に対する応力拡大係数 K_I^a , K_I^b を示した。静的な値は等方性材の結果に一致する⁽⁸⁾。図の右側に引かれた直線は、対応する静的な値⁽⁸⁾⁽⁹⁾を示している。図4, 5には、タイプIIのボロン・エポキシ複合材に対する応力拡大係数 K_I^a , K_I^b を図示した。図2, 3と同様に、右側の直線は静的な値を示す。これらの図から、タイプI, タイプIIのいずれのボロン・エポキシ複合材に対しても動的応力拡大係数の最大値は、おおよそ $c_{rl}/l = 3.0 \sim 3.5$ 程度において発生することがわかる。

図6は、慣性効果の影響を把握するため、動的応力拡大係数の最大値 (K_I^{peak}) を対応する静的な値 (K_I^{static}) で割った値を、横軸に a/l をとって示したものである。この図から、慣性効果の影響は、タイプIIの

図6 $K_I^{\text{peak}}/K_I^{\text{static}}$ の値

複合材よりもタイプIの複合材で、外側のき裂端よりも内側のき裂端で、き裂が離れている時よりも接近している時が、より顕著になることがわかる。また、この図から、表1の複合材に対しては、 $K_I^{\text{peak}}/K_I^{\text{static}}$ の最大値はせいぜい1.3程度であることがわかる。

7. 結 言

き裂を有する繊維強化プラスチックの強度計算に有用となるデータを得るため、異方性弾性板に存在する2個のき裂のき裂面に衝撃的に内圧を作用させ、動的応力拡大係数を求めた。ラプラス像空間で境界条件を連立積分方程式に導き、き裂面変位を級数展開し、シュミット法を適用してこの方程式を解いた。像空間で定義された応力拡大係数を数値的にラプラス逆変換して物理空間での解を得た。ボロン・エポキシ複合材に対して数値計算を実行し、応力拡大係数に及ぼす慣性効果の影響を明らかにした。

文 献

- (1) Ohyoshi, T., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 40(1973), 491.
- (2) Kassir, M. K. and Bandyopadhyay, K. K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50(1983), 630.
- (3) Ang, W. T., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 55(1988), 120.
- (4) 檜垣・進藤・野崎, 機論, 54-501, A(1988), 1007.
- (5) Itou, S., *Eng. Fract. Mech.*, 13(1980), 349.
- (6) Morse, P. M. and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, 1(1958), 926, McGraw-Hill, New York.
- (7) Miller, M. K. and Guy, W. T., *SIAM J. Numerical Analysis*, 3(1966), 624.
- (8) Konishi, Y., *Int. J. Eng. Sci.*, 10(1972), 917.
- (9) Lowengrub, M. and Srivastav, K. N., *Int. J. Eng. Sci.*, 6(1968), 359.