長方形板の弾性曲げ問題の積分方程式法による一解法*

堀 辺 忠 志^{*1}

An Integral Equation Method for Elastic Bending of Rectangular Plates

Tadashi HORIBE

This paper presents a new approach to the bending analysis of thin elastic rectangular plates by the integral equation method. The fundamental idea of this approach is to use functions which a priori satisfy the boundary conditions of two opposite ends. Thus, the plate bending problem can be reduced to a one-dimensional problem. By applying the integral equation technique to this one-dimensional problem, the solution is determined just as for the case of a beam. The present approach is based on the same idea as that of the finite strip method, or the Kantrovich method, but the number of degrees of freedom in this method is less than that of the finite strip method. A number of examples including various boundary conditions are computed, whereby the usefulness of the method is demonstrated.

Key Words: Structural Analysis, Elastic Bending, Numerical Analysis, Rectangular Plate, Integral Equation Method, Finite Strip Method

1. 結 言

有限要素法 (FEM) を用いて平板の曲げを解析する方法の一つとして、帯板要素 (finite strip element) に基づく解法がある。これは、二次元の問題を Kantrovich の方法⁽¹⁾によって一次元問題に還元した後、残った方向に対して FEM の離散化の手法を適用したものである。この方法によれば、対象とする平板の形状や境界条件の一部が限定されるが、解析対象の自由度や入力データを大幅に減小させることができる。Cheung により有限帯板法 (Finite Strip Method, FSM) と称されて発表されたこの手法⁽²⁾は、その後、板の座屈問題⁽³⁾、複雑な板構造物^{(4)~(9)}等に適用され、その有用性が示された。

本研究では、上に述べた帯板要素のアイディアとはりの曲げに関する積分方程式法の手法とを組合せて長方形板の曲げ問題を解析する方法を提案する。本解法には、形状が長方形板に限定され、ある種の境界条件に対応できないという制約があるが、通常の BEM による板曲げ解法⁽¹⁰⁾の複雑な手順を経ることなく精度

の良い解が得られるという特徴を有する。

まず、解析において、FSM と同様に一方向の境界条件を満たす関数と Kantrovich の方法を用いて板の曲げの支配方程式を一次元問題に還元する。そして、残りの方向に関してははりの曲げ問題と同様な積分方程式法に基づく定式化を行う。この定式化の際に必要な基本解は、著者が先に示した引張軸力を受ける弾性床のはりの基本解⁽¹¹⁾と類似しており、その結果を援用する。

次に、以上の手法に基づいた数値解析例を示し、FSM と比較してもより小さい入力データおよび元数で精度の良い解が本解法によって得られることを明らかにする。

2. 理 論

2.1 支配方程式の変形 w を板中央面のたわみ、 q を単位面積当たりの荷重とすると、弾性平板の曲げ問題の支配微分方程式は、次のように表すことができる⁽¹²⁾。

$$\nabla^4 w = q/D \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 ∇^4 は重調和作用素、 D は板の曲げ剛性である。

いま、図 1 に示すように、板の中央を原点とする座

* 平成元年 4 月 3 日 第 66 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 10 月 4 日。

^{*1} 正員、茨城工業高等専門学校 (〒312 勝田市大字中根字深谷津 866)。

標軸を定め、大きさが $a \times b$ の長方形平板を考える。
 また、たわみ $w(x, y)$ と分布荷重 $q(x, y)$ を

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x) \psi_m(y), \quad q(x, y) = q_0 f(x) g(y) \quad \dots\dots\dots (2)$$

のように展開することができるものと仮定する。式(2)を式(1)に代入すると

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_m^{\text{IV}} \psi_m + 2 \varphi_m'' \psi_m'' + \varphi_m \psi_m^{\text{IV}}) = -\frac{q_0}{D} f(x) g(y) \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで、肩添字は $\varphi_m^{\text{IV}} = d^4 \varphi_m(x)/dx^4$, $\psi_m^{\text{IV}} = d^4 \psi_m(y)/dy^4$ などと引数についての微分を表すものとする。

次に、式(3)に関して x 軸方向に Kantrovich の方法を適用する。すなわち、式(3)の両辺に $\varphi_n(x)$ を掛け x に関して $-a/2 \sim a/2$ まで積分すれば、

$$\sum_{m=1}^{\infty} [(\varphi_m, \varphi_n) \psi_m^{\text{IV}} + 2(\varphi_m'', \varphi_n) \psi_m''] + (\varphi_m^{\text{IV}}, \varphi_n) \psi_m = \frac{q_0}{D} (f, \varphi_n) g, \quad n=1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_{-a/2}^{a/2} \varphi_m \varphi_n dx \quad \dots\dots\dots (5)$$

なる表記法を用いた。式(5)は、 ψ_m に関する無限連立常微分方程式であり、一方で、 φ_m は $x = -a/2, a/2$ で与えられた境界条件を満たす必要のある関数群である。さて、式(4)において φ_m が φ_n と直交性、すなわち

$$(\varphi_m, \varphi_n) = 0, (\varphi_m'', \varphi_n) = 0, (\varphi_m^{\text{IV}}, \varphi_n) = 0 \quad (m \neq n) \quad \dots\dots\dots (6)$$

を有するとすれば、式(4)は互いに独立な常微分方程

図 1 長方形平板の座標

式群となり、容易に $\psi_n(y)$ が求められる。式(6)の直交性のすべてを満たす φ_n は、 $x = \pm a/2$ で単純支持された場合だけであり、

$$\varphi_n = \sin n\pi \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right), \quad n=1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。この場合の y 方向の未知関数 ψ_n を求める手順は、周知の Levy の解法⁽¹²⁾に一致する。

2.2 固有関数による支配式の近似 $x = \pm a/2$ における単純支持以外の境界条件のもとで式(6)の直交性を満たす φ_n を求めることは不可能であるから、 φ_n としてはりの振動や座屈の微分方程式を満たす固有関数を採用することを考える⁽¹³⁾。

まず、 φ_n が

$$\varphi_n^{\text{IV}} - (k_n/a)^4 \varphi_n = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

なるはりの自由振動の微分方程式の解であるとする。

ここで k_n は固有値とする。このとき、 φ_n は

$$(\varphi_m, \varphi_n) = 0, (\varphi_m^{\text{IV}}, \varphi_n) = 0, \quad m \neq n \quad \dots\dots\dots (9)$$

なる直交性を有している。したがって、式(8)を満たす φ_n を用いるとすれば、式(4)は

$$(\varphi_n, \varphi_n) \psi_n^{\text{IV}} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_m'', \varphi_n) \psi_m'' + (\varphi_n^{\text{IV}}, \varphi_n) \psi_n = \frac{q_0}{D} (f, \varphi_n) g, \quad n=1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。

次に、 φ_n が

$$\varphi_n^{\text{IV}} + \left(\frac{k_n}{a} \right)^2 \varphi_n'' = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

なるはりの座屈の微分方程式の解であるとするれば

$$(\varphi_m^{\text{IV}}, \varphi_n) = 0, (\varphi_m'', \varphi_n) = 0, \quad m \neq n \quad \dots\dots\dots (12)$$

であるから、式(4)は

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_m, \varphi_n) \psi_m^{\text{IV}} + 2(\varphi_n'', \varphi_n) \psi_n'' + (\varphi_n^{\text{IV}}, \varphi_n) \psi_n = \frac{q_0}{D} (f, \varphi_n) g, \quad n=1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。

以上の結果より、 φ_n として式(8)あるいは式(11)の解のいずれを選んだとしても、式(10)、(13)に示すように ψ_n と ψ_m の連成ははずれない。しかし、式(10)または式(13)の総和の項のうち、主要な項 $m=n$ だけを採用するという近似⁽¹⁴⁾を導入すると、次の ψ_n に関する独立な微分方程式群が得られる。すなわち

$$\psi_n^{\text{IV}} - 2\alpha_n^2 \psi_n'' + \beta_n^4 \psi_n = q_n g, \quad n=1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、

$$\alpha_n^2 = -\frac{(\varphi_n'', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \quad \beta_n^4 = \frac{(\varphi_n^{\text{IV}}, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \quad q_n = \frac{q_0}{D} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

したがって、式(14)は、 $x = \pm a/2$ が単純支持されて

いる場合以外は、連成項が省略されているために ϕ_n についての近似支配微分方程式となっている。

2.3 x 方向固有関数 φ_n について φ_n は $x = \pm a/2$ で与えられた境界条件を満たす必要がある。ここでは、 $x = \pm a/2$ における境界条件として、Cheung の解析⁽⁴⁾と同様、支持-支持、支持-固定、固定-固定の場合を考える。このとき、式(8)を満たす φ_n を考えるとすれば、

①支持 ($x = -a/2$)-支持 ($x = a/2$)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= \sin n\pi \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right) \\ (\varphi_n, \varphi_n) &= a/2 \\ \alpha_n^2 &= \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \\ \beta_n^4 &= \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

②支持 ($x = -a/2$)-固定 ($x = a/2$)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= \frac{\sinh k_n \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right)}{\sinh k_n} - \frac{\sin k_n \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right)}{\sin k_n} \\ (\varphi_n, \varphi_n) &= a \\ \alpha_n^2 &= \left(\frac{k_n}{a} \right)^2 \coth k_n \left(\coth k_n - \frac{1}{k_n} \right) \\ \beta_n^4 &= \left(\frac{k_n}{a} \right)^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 k_n は $\tan k_n = \tanh k_n$ の根

③固定 ($x = -a/2$)-固定 ($x = a/2$)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= \frac{\cosh k_n \frac{x}{a}}{\sinh \frac{k_n}{2}} + \frac{\cos k_n \frac{x}{a}}{\sin \frac{k_n}{2}} \\ (\varphi_n, \varphi_n) &= \frac{a}{\tanh^2 \frac{k_n}{2}} \\ \alpha_n^2 &= \left(\frac{k_n}{a} \right)^2 \tanh^2 \frac{k_n}{2} \left(1 - \frac{2}{k_n} \coth \frac{k_n}{2} \right) \\ \beta_n^4 &= \left(\frac{k_n}{a} \right)^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 k_n は $\tan \frac{k_n}{2} + \tanh \frac{k_n}{2} = 0$ の根

あるいは、式(11)を満たす φ_n を選ぶとすると、支持-支持の場合は式(16)と同じで、その他は、

②'支持 ($x = -a/2$)-固定 ($x = a/2$)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= \sin k_n \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right) - k_n \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right) \cos k_n \\ (\varphi_n, \varphi_n) &= \frac{5}{6} a \sin^2 k_n \\ \alpha_n^2 &= \frac{3}{5} \left(\frac{k_n}{a} \right)^2 \\ \beta_n^4 &= \frac{3}{5} \left(\frac{k_n}{a} \right)^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 k_n は $\tan k_n = k_n$ の根

③'固定 ($x = -a/2$)-固定 ($x = a/2$)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= 1 - \frac{\cos 2n\pi \frac{x}{a}}{\cos n\pi} \\ (\varphi_n, \varphi_n) &= \frac{3}{2} a \\ \alpha_n^2 &= \frac{4}{3} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \\ \beta_n^4 &= \frac{16}{3} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

となる。

3. 境界積分方程式

3.1 ϕ_n に関する境界積分方程式の導出

2章では、 x の両端での境界条件を満たす φ_n を選ぶと、 ϕ_n に関する独立な微分方程式群が得られることを示した。ここでは、残された未知関数 ϕ_n に関する積分方程式 (的表現) の導出を行う。

$\delta(y, \eta)$ をデルタ関数として、式(14)に対応した基本解 $\phi_n^*(y, \eta)$ を

$$\phi_n^{*iv}(y, \eta) - 2\alpha_n^2 \phi_n^{*''}(y, \eta) + \beta_n^4 \phi_n^*(y, \eta) = \delta(y, \eta) \dots\dots\dots (21)$$

で定義する。

支配式(14)と式(21)の基本解を用いてはりの曲げ問題と同様な定式化を行うと、次の ϕ_n に関する積分方程式を得る。

$$\phi_n(\eta) + [(\phi_n''' - (2-\nu)\alpha_n^2 \phi_n') \phi_n^*]_{-b/2}^{-b/2} - [(\phi_n'' - \nu\alpha_n^2 \phi_n) \phi_n^*]_{-b/2}^{-b/2} + [\phi_n'(\phi_n''' - \nu\alpha_n^2 \phi_n')]_{-b/2}^{-b/2} - [\phi_n(\phi_n^{*iv} - (2-\nu)\alpha_n^2 \phi_n^{*''})]_{-b/2}^{-b/2} = q_n \int_{-b/2}^{b/2} g(y) \phi_n^* dy, n=1,2,\dots,\infty \dots\dots\dots (22)$$

$$\tilde{\phi}_n(\eta) + [(\tilde{\phi}_n''' - (2-\nu)\alpha_n^2 \tilde{\phi}_n') \tilde{\phi}_n^*]_{-b/2}^{-b/2} - [(\tilde{\phi}_n'' - \nu\alpha_n^2 \tilde{\phi}_n) \tilde{\phi}_n^*]_{-b/2}^{-b/2} + [\tilde{\phi}_n'(\tilde{\phi}_n''' - \nu\alpha_n^2 \tilde{\phi}_n')]_{-b/2}^{-b/2} - [\tilde{\phi}_n(\tilde{\phi}_n^{*iv} - (2-\nu)\alpha_n^2 \tilde{\phi}_n^{*''})]_{-b/2}^{-b/2} = q_n \int_{-b/2}^{b/2} g(y) \tilde{\phi}_n^* dy, n=1,2,\dots,\infty \dots\dots\dots (23)$$

ここで ν はポアソン比、 $\tilde{\phi}_n^*$ などは、 $d\phi_n^*(y, \eta)/d\eta$ などと η に関する微分量を表すものとする。なお、式(22), (23)

においては, y 方向の両端での Kirchhoff の自由境界条件を表現できるように式の変形を行っている。すなわち, 式(22), (23)は, y 方向の両端での支持, 固定, 自由の境界条件に対応することができるような表現式になっている。

次に, 式(22), (23)において, $\eta \rightarrow -b/2 + \varepsilon$, $\eta \rightarrow b/2 - \varepsilon$ (ε は微小な正の定数) と極限操作を行うと, y 方向の両端で指定した境界条件に応じて ϕ_n が決定される。そして, この ϕ_n を用いて平板内の任意点のたわみは, 式(2)により求められる。

3・2 基本解 $\phi_n^*(y, \eta)$ について 基本解 $\phi_n^*(y, \eta)$ の支配方程式は式(21)であるが, これは, 著者が先に示した引張軸力を受ける弾性床はりの基本解⁽¹¹⁾の支配方程式と同じ形をしている。したがって, ここでは $\phi_n^*(y, \eta)$ の誘導の手順の詳細は文献(11)に譲るものとして, 以下に結果のみを示す。すなわち, 式(16)に示した φ_n に対して

$$\phi_n^*(y, \eta) = \frac{1}{4\alpha_n^3} \left[(1 + \alpha_n b \tanh \alpha_n b) \frac{\sinh \alpha_n (b - \rho_y)}{\cosh \alpha_n b} - \alpha_n (b - \rho_y) \frac{\cosh \alpha_n (b - \rho_y)}{\cosh \alpha_n b} \right], \rho_y = |y - \eta| \quad \dots\dots\dots (24)$$

また, 式(17)~(20)の φ_n に対しては,

$$\begin{aligned} \phi_n^*(y, \eta) = & \frac{1}{2\beta_n^2 (\cosh^2 m_\beta b - \sin^2 n_\beta b)} \left[\left(\frac{\sinh m_\beta b \sin n_\beta b}{m_\beta} - \frac{\cosh m_\beta b \cos n_\beta b}{n_\beta} \right) \right. \\ & \times \cosh m_\beta (b - \rho_y) \sin n_\beta (b - \rho_y) \\ & \left. + \left(\frac{\cosh m_\beta b \cos n_\beta b}{m_\beta} + \frac{\sinh m_\beta b \sin n_\beta b}{n_\beta} \right) \sinh m_\beta (b - \rho_y) \cos n_\beta (b - \rho_y) \right], \rho_y = |y - \eta| \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} m_\beta &= \sqrt{(\beta_n^2 + \alpha_n^2)/2} \\ n_\beta &= \sqrt{(\beta_n^2 - \alpha_n^2)/2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

式(21)を支配式とする基本解は, α_n と β_n の大小により 3 種類の基本解が存在する可能性があるが, 幸いにして式(17)~(20)中のすべての α_n, β_n に関して, いずれも $\alpha_n < \beta_n$ の関係がある。このため式(17)~(20)のいずれの境界条件に対しても式(25)の一つの基本解の表現式で済ませることができる。

紙面の都合上, $\phi_n^*(y, \eta) \sim \phi_n^{(4)}(y, \eta)$ などの表現式については省略するが, 式(23)中の基本解の η に関する微分量については, 式(24), (25)の両式に関して

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}_n^*(y, \eta) &= -\phi_n^*(y, \eta) \\ \tilde{\phi}_n^{*'}(y, \eta) &= -\phi_n^{*'}(y, \eta) \\ \tilde{\phi}_n^{*''}(y, \eta) &= -\phi_n^{*''}(y, \eta) \\ \tilde{\phi}_n^{*'''}(y, \eta) &= -2\alpha_n^2 \phi_n^{*''}(y, \eta) + \beta_n^4 \phi_n^*(y, \eta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

が成立している。

以上に示したように, x 方向の両端の境界条件に応じて式(24)と(25)の 2 種類の基本解を使い分ける必要があるが, この手続きは計算プログラム中ではさほど困難なことではない。

4. 数値解析結果および考察

以上に述べた解法に基づいて計算プログラムを作成し, いくつかの例題を解析した。

なお, 荷重の分布状態を示す関数 $f(x)$ と $g(y)$ を含んでいる式(22), (23)の右辺の積分項, すなわち,

$$\frac{q_0}{D} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \int_{-b/2}^{b/2} g(y) \left\{ \phi_n^*(y, \eta) \right\} dy \quad \dots\dots\dots (28)$$

については, 分布荷重を次のように集中荷重に離散化して評価すると, 計算プログラムに汎用性を持たせることができる。

$$\frac{1}{D} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l q_{ij} \frac{\varphi_n(x_i)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \left\{ \frac{\phi_n^*(y_j, \eta)}{\tilde{\phi}_n^*(y_j, \eta)} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで, (x_i, y_j) は離散化した集中荷重の座標, k, l はそれぞれ x および y 方向に離散化した荷重の個数, q_{ij} は位置 (x_i, y_j) における荷重の大きさである。もし, 解析の精度を高めたい場合には, 解析的な積分を行ったり適切な数値積分公式を用いればよい。以下に示した等分布荷重の例では, 荷重を x, y 方向にそれぞれ 20 個ずつ集中荷重に離散化して計算を行った。

以下に計算結果を示す。表 1 は, 等分布荷重を受ける四辺支持長方形板のたわみの結果である。表中には文献(12)に基づいた解析解も示してある。なお表中の n は級数の項数である。 x 方向に式(16)の第 1 式を用いた本解析結果は, 式(14)の導出に近似を用いていないから当然高精度な結果を有している。

表 2 は, 中央集中荷重を受ける四辺支持長方形板の中央のたわみである。この場合も式(16)の第 1 式を用いているから, 高精度な結果を得ている。なお, 式(29)を用いれば, 集中荷重が任意の位置に存在する場合についても容易に解が得られる。

表 3 は, x 方向の二辺を支持, 残りの対辺を固定した等分布荷重を受ける長方形板の中央のたわみを示したものである。

表 4 は, x 方向に式(18)および式(20)の第 1 式を用い, 残りの対辺を固定した等分布荷重を受ける長方形板の中央のたわみである。この場合には, 級数の項数を 10 項まで採用した。式(10)または式(13)中の連成項を省略して近似解析を行っているにも拘らず, 解析解

表 1 等分布荷重 q_0 を受ける四辺支持長方形板の中央のたわみ $[w = \alpha(q_0 a^4)/D]$

b/a	α		
	n=1	n=5	Exact
1	0.004109	0.004063	0.004062
2	0.01059	0.01014	0.01013
5	0.01532	0.01317	0.01297

表 2 中央集中荷重を受ける四辺支持長方形板の中央のたわみ $[w = \alpha(P a^2)/D]$

b/a	α		
	n=5	n=10	Exact
1	0.01157	0.01159	0.01160
2	0.01641	0.01649	0.01652
5	0.01627	0.01675	0.01696

と良い一致を示している。なお、 b/a が 1 より大きくなっても高精度な結果を得ているのは、級数項を十分にとっているためである。座屈方程式の固有関数を用いた結果の精度がやや悪いのは、省略した連成項の影響によるものである。

表 5 は、 x 方向に式(17)および式(19)の第 1 式を用いて三辺支持一辺固定の等分布荷重を受ける板の中央のたわみの結果である。

なお、以上の計算にはマイクロコンピュータ PC-9801 を使い、言語は MS FORTRAN (V. 4.01) を用いた。そして、式(16)～(20)中に示した積分結果の導出には、数値処理システム REDUCE 3 (V.3.3) を利用した。

5. 結 言

有限帯板法の手法と積分方程式法とを組合せて長方形板の曲げ問題を簡便に解析する方法を提案し、数値解析例を挙げてその有効性を示した。本論文の結果をまとめると次のようになる。

(1) 一方向にはりの振動や座屈問題の固有関数列を用いて Kantrovich の方法を適用し、もう一つの方向に対しては積分方程式法を適用して長方形板の曲げ問題を解析する手順を示した。

(2) (1)の定式化に際して必要な基本解を導出し、この基本解と境界条件との関係を分類、整理した。

(3) 本解法に基づいた数値解析例を示し、本手法が工学上、十分な精度を有していることを明らかにした。

終わりに、本研究の一部は文部省科学研究費 [奨励研究(A), 課題番号 63750095] に負っている。また、茨

表 3 等分布荷重 q_0 を受ける二辺支持二辺固定長方形板の中央のたわみ $[w = \alpha(q_0 a^4)/D]$

b/a	α			
	n=1	n=5	n=10	Exact
1	0.00196	0.00192	0.00192	0.00192
2	0.00292	0.00262	0.00261	0.00261
5	0.00325	0.00272	0.00259	0.00260

表 4 等分布荷重 q_0 を受ける四辺固定長方形板の中央のたわみ $[w = \alpha(q_0 a^4)/D, n=10]$

b/a	α		
	Vibration Eq.	Buckling Eq.	Exact
1.0	0.00127	0.00130	0.00126
1.2	0.00173	0.00174	0.00172
1.4	0.00207	0.00208	0.00207
1.6	0.00230	0.00231	0.00230
1.8	0.00245	0.00245	0.00245
2.0	0.00254	0.00253	0.00254

表 5 等分布荷重 q_0 を受ける三辺支持一辺固定長方形板の中央のたわみ $[w = \alpha(q_0 a^4)/D, n=10]$

a/b	α		
	Vibration Eq.	Buckling Eq.	Exact
1.0	0.00275	0.00290	0.0028
1.1	0.00313	0.00325	0.0032
1.2	0.00347	0.00356	0.0035
1.3	0.00376	0.00382	0.0038
1.4	0.00401	0.00405	0.0040
1.5	0.00422	0.00424	0.0042
2.0	0.00487	0.00481	0.0049

城高専・上野誠教授には、本研究の遂行中、終始暖かい励ましをいただいた。それぞれに、記して謝意を表する。

文 献

- (1) Kantrovich, L. V. and Krylov, V. I., *Approximate Methods of Higher Analysis*, (1958), 322, Interscience.
- (2) Cheung, Y. K., The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with Two Opposite Simply Supported Ends, *Proc. Inst. Civil. Eng.*, 40 (1968), 1.
- (3) 吉田, 帯板要素による平板構造の座屈解析, 日本造船学会論文集, 130 (1971), 161.
- (4) Cheung, Y. K., Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Eng. Mech. Div.*, 94 (1968), 1365.
- (5) Cheung, Y. K., Folded Plate Structures by Finite Strip Method, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Struct. Div.*, 95 (1969), 2963.

- (6) 吉田・岡, 帯板要素による平板構造の曲げ解析, 日本造船学会論文集, 132 (1972), 289.
 - (7) 吉田・岡, 帯板要素による平板構造解析, 日本造船学会論文集, 134 (1973), 262.
 - (8) 吉田, 有限帯板法とその応用 (その1), 日本造船学会誌, 538 (1974), 10.
 - (9) 吉田, 有限帯板法とその応用 (その2), 日本造船学会誌, 539 (1974), 235.
 - (10) 田中・宮崎, 平板の弾性曲げ解析に対する直接法 BEM についての一考察, 機論, 51-466, A (1985), 1636.
 - (11) 堀辺, 弾性床上的りの大たわみ問題の境界積分方程式法による解析, 機論, 53-487, A (1987), 622.
 - (12) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd. ed., (1959), McGraw-Hill.
 - (13) Giencke, E., Reihenansätze zur Lösung von Plattenproblemen, *Z. Angew. Math.*, 41 (1961), 86.
 - (14) Marguerre, K. and Woernle, H. T. (玉手訳), 弾性平板, (1974), 109, 培風館.
-