複合材料積層板のラム波伝ば*

谷 順 二^{*1}, 刘 桂 榮^{*3}
渡 辺 一 実^{*3}, 大 好 直^{*4}

The Lamb Wave Propagation in Anisotropic Laminates

Junji TANI, Gui-Rong LIU,
Kazumi WATANABE, and Tadashi OHYOSHI

The wave propagation in arbitrary anisotropic laminates is investigated on the basis of an exact theory. The Lamb wave dispersion relations are determined for graphite/epoxy symmetric angle-ply laminates and hybrid composite ones which consists of carbon/epoxy and glass/epoxy layers. The energy distributions in the thickness direction of laminates are calculated for each kind of Lamb wave. The hybrid composite laminate is found to have a capability of impact energy absorption by analyzing the strain energy distribution during the wave propagation. This result is useful in determining the arrangement and the fiber orientation of the layers of hybrid composite laminate.

Key Words: Anisotropy, Stress Wave, Laminated Costruction, Composite Material, Lamb Wave Propagation, Energy Absorption, Hybrid Composite.

1. 結 言

先進的な複合材料は比剛性, 比強度が大きいことから, 近年, 構造軽量化が重要である航空宇宙機を始め広い分野に使われている。それに伴い複合材料の静的な負荷のもとでの研究のみならず, 動的な負荷のもとでの研究が盛んに行われるようになった。複合材料積層板の衝撃エネルギーを吸収する能力を上げるために, 衝撃に強い複合材料を静的に強い複合材料に混入して作る hybrid 複合材料が開発されつつある。この hybrid 複合材料中を応力波が伝ばするときに, ひずみエネルギーが耐衝撃材の層に集中することが望ましい。したがって, hybrid 複合材中の応力伝ば問題, さらにエネルギーの板厚方向の分布を調べることは最適な hybrid 複合材料を設計するために必要不可欠である。

等方材を周期的に積層した板を応力波が伝ばする問題については, 厳密な解析^{(1)~(3)}が行われており, 多

くの近似理論も提唱されている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。Murakamiらは混合理論を使って周期的斜交積層材の波動問題を解析した。最近 Kausel⁽⁶⁾は数値解析法を使って有限厚さの任意異方性材積層板の問題を解析した。

本研究では任意異方性積層材中の応力波伝ば問題の厳密解を導き, 繊維強化一方向材積層板, 対称斜交材積層板, hybrid 積層板を伝ばする各種波の位相速度の分散関係と位相速度の異方性を調べ, さらにひずみエネルギー分布を計算し, 積層の繊維配向を適当に選ぶことによってひずみエネルギーを耐衝撃層に集中させられることを示した。

2. 基礎方程式

図1に示すように, 板は何種類もの任意異方性, 均質材を N 層積層したもので, 層と平行に応力波が伝ばする問題を考える。座標系は図1に示すように, x_1 - x_2 平面を n 層の下表面において, x_3 軸を板平面に垂直にとる。

任意層 n ($n=1, 2, \dots, N$) において, 任意異方性材の応力テンソル σ_{ij} とひずみテンソル ε_{ij} の関係は次のようになる。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dots\dots\dots (1)$$

ここで, C_{ijkl} は第 n 層材料の弾性係数で, 次のような

* 平成元年4月5日 第66期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和63年6月13日。

^{*1} 正員, 東北大学流体科学研究所 (〒980 仙台市青葉区片平2-1-1)。

^{*2} 学生員, 東北大学大学院 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)。

^{*3} 正員, 山形大学工学部 (〒992 米沢市城南4-3-16)。

^{*4} 正員, 秋田大学鉱山学部 (〒010 秋田市手形学園町1-1)。

関係がある。

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (2)$$

熱伝導と体積力のない場合の運動方程式は、

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3)$$

で与えられる。ただし、 t は時間で、 ρ は第 n 層材料の密度、 u_i は第 n 層の x_i 軸方向変位であり、微小ひずみと応力の関係は次の式で表される。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

また、連続条件は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} S^{(n)}(h_n) &= S^{(n+1)}(0) \\ D^{(n)}(h_n) &= D^{(n+1)}(0) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} S(x_3) &= \{ \bar{\sigma}_{13}(x_3), \bar{\sigma}_{23}(x_3), \bar{\sigma}_{33}(x_3) \} \\ D(x_3) &= \{ \bar{u}_1(x_3), \bar{u}_2(x_3), \bar{u}_3(x_3) \} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

さらに、境界条件は、

$$S^{(1)}(0) = 0 \quad (7)$$

$$S^{(N)}(h_N) = 0 \quad (8)$$

で表される。ただし、 0 は零ベクトルである。式(1)、(4)を式(3)に代入すると、運動方程式は次のように変位で表される。

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (9)$$

3. 解 析

式(9)の解を次のように仮定する。

$$u_i = U_i \exp \{ j\xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - ct) \} \quad (i=1, 2, 3) \quad (10)$$

ここに、 $j = \sqrt{-1}$ 、 U_i は定数の変位振幅で、 n_k ($k=1, 2, 3$) は伝ば方向を表す単位ベクトルの成分で、 c は位相速度で、 ξ は波数である。式(10)を式(9)に代入すると

$$\Gamma_{ik} U_k = \rho c^2 U_i \quad (11)$$

あるいは

図1 座標系

$$\Pi_{ik} U_k = 0 \quad (12)$$

ただし、 Γ_{ik} は次の式で与えられるクリストフェル剛性 (christoffel stiffnesses) である。

$$\Gamma_{ik} = \Gamma_{ki} = C_{ijkl} n_j n_l \quad (13)$$

また、

$$\Pi_{ik} = \Gamma_{ik} - \rho c^2 \delta_{ik} \quad (14)$$

ここに、 δ_{ik} はクロネッカの記号である。式(12)が零以外の有意の解を持つための条件は次式で与えられる。

$$\det(\Pi_{ik}) = 0 \quad (15)$$

無限体の場合、もし n_i を定めると、三つの速度が式(15)で定まる。しかし、厚さが有限の場合には、もし n_1 と n_2 が与えられると、 n_3 は式(15)から求まる。式(15)を n_3 に関して書き換えると、次の式を得る。

$$\det(a_{ik} + b_{ik} n_3 + d_{ik} n_3^2) = 0 \quad (16)$$

ただし、

$$a_{ik} = C_{ijkl} n_j n_l - \delta_{ik} \rho c^2 \quad (j, l=1, 2)$$

$$b_{ik} = 2C_{i3kl} n_l \quad (l=1, 2)$$

$$d_{ik} = C_{i3k3}$$

式(16)は n_3 に関する6次方程式である。

式(16)を解けば n_3 の六つの根 α_l ($l=1, \dots, 6$) が得られるわけである。つまり、 c, n_1, n_2 を与え、式(12)の解が存在すれば、 n_3 は α_l ($l=1, \dots, 6$) 以外の値をとれない。そこで、 u_i の解が次の形式に書ける。

$$u_i = \sum_{l=1}^6 A_l \exp(j\xi \alpha_l x_3) \times \exp\{j\xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct)\} \quad (17)$$

このとき Π_{ik} のランクは2であるので、式(10)の U_2 と U_3 は式(12)によって、上式の任意定数 A_l で表すことができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} U_{2(l)} &= q_{2(l)} A_l \\ U_{3(l)} &= q_{3(l)} A_l \end{aligned} \right\} \quad (l=1, \dots, 6) \quad (18)$$

ここに、

$$q_{2(l)} = \frac{\Gamma_{12}\Gamma_{13} - \Gamma_{23}(\Gamma_{11} - \rho c^2)}{\Gamma_{12}\Gamma_{23} - \Gamma_{13}(\Gamma_{22} - \rho c^2)}$$

$$q_{3(l)} = (\rho c^2 - \Gamma_{11})/\Gamma_{13} - (\Gamma_{12}/\Gamma_{13}) q_{2(l)}$$

もし、 $q_{1(l)} = 1$ とすると、結局、式(10)は次のように書ける。

$$u_i = \sum_{l=1}^6 q_{i(l)} A_l \exp(j\xi \alpha_l x_3) \times \exp\{j\xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct)\} \quad (19)$$

式(19)は式(9)を満足する、六つの未定定数 A_l ($l=1, 2, \dots, 6$) を含む変位の一般解である。また、式(19)を式(4)に代入して、次のひずみテンソルを得る。

$$\varepsilon_{ik} = \sum_{l=1}^6 b_{ik(l)} A_l \exp(j\xi \alpha_l x_3) \times \exp\{j\xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct)\} \quad (20)$$

ここに、

$$P_{ik(l)} = \xi j (n_k q_{il(l)} + n_i q_{kl(l)}) / 2$$

$$n_3 = a_l \quad (l=1, \dots, 6)$$

さらに、次の応力テンソルを得る。

$$\sigma_{ik} = \sum_{l=1}^6 r_{ik(l)} A_l \exp(j\xi a_l x_3) \times \exp\{j\xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct)\} \quad (21)$$

ここに、

$$r_{ik(l)} = C_{ikpq} p_{pq}(l) \quad (i, k, p, q=1, 2, 3)$$

式(19), (21)は次のように書き換えられる。

$$u_i = \bar{u}_{i(l)}(x_3) \exp\{j\xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct)\} \quad (22)$$

$$\sigma_{i3} = \bar{\sigma}_{i3(l)}(x_3) \exp\{j\xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct)\} \quad (23)$$

ここに、

$$\bar{u}_i = \sum_{l=1}^6 q_{il(l)} \exp(j\xi a_l x_3) A_l \quad (24)$$

$$\bar{\sigma}_{i3} = \sum_{l=1}^6 r_{i3(l)} \exp(j\xi a_l x_3) A_l \quad (25)$$

式(24), (25)をマトリックスで表すと、次の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} \quad (26)$$

ここに、

$$k_{il} = r_{i3(l)} \exp(j\xi a_l x_3) \quad (i=1, 2, 3; l=1, \dots, 6) \quad (27)$$

$$k_{i1,l} = q_{il(l)} \exp(j\xi a_l x_3) \quad (i=1, 2, 3; i_1=i+3; l=1, \dots, 6) \quad (28)$$

式(26)を破線のように分割すると、

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

を得る。ここで、 S, D, K_1, A_1 と A_2 は式(26)に対応するサブマトリックスである。 n 層の上下表面の応力と変位は次のように表せる。

下表面において、

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix}_{x_3=0}^{(n)} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix}^{(n)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^{(n)} \quad (30)$$

上表面において、

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix}_{x_3=h_n}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}^{(n)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^{(n)} \quad (31)$$

ここに、

$$\begin{cases} G_i^{(n)} = K_i^{(n)}(x_3=0) \\ Q_i^{(n)} = K_i^{(n)}(x_3=h_n) \end{cases} \quad (i=1, \dots, 4)$$

上付き (n) は第 n 層の意味である。

式(7)によって、式(30)の $A_2^{(1)}$ は $A_1^{(1)}$ で表せる。

$$A_2^{(1)} = -(G_2^{(1)})^{-1} G_1^{(1)} A_1^{(1)} \quad (32)$$

上式を式(31)に代入すると、 $S^{(1)}(h_1)$ と $D^{(1)}(h_1)$ を $A_1^{(1)}$ で表せる。

$$S^{(1)}(h_1) = Z_s^{(1)} A_1^{(1)} \quad (33)$$

$$D^{(1)}(h_1) = Z_d^{(1)} A_1^{(1)} \quad (34)$$

ここに、

$$Z_s^{(1)} = Q_1^{(1)} - Q_2^{(1)} (G_2^{(1)})^{-1} G_1^{(1)} \quad (35)$$

$$Z_d^{(1)} = Q_3^{(1)} - Q_4^{(1)} (G_2^{(1)})^{-1} G_1^{(1)} \quad (36)$$

また、第一層と第二層の連続条件を用いて、次の式が得られる。

$$G_1^{(2)} A_1^{(2)} + G_2^{(2)} A_2^{(2)} = Z_s^{(1)} A_1^{(1)} \quad (37)$$

$$G_3^{(2)} A_1^{(2)} + G_4^{(2)} A_2^{(2)} = Z_d^{(1)} A_1^{(1)} \quad (38)$$

式(37), (38)によって、第二層の定数 $A_1^{(2)}$ と $A_2^{(2)}$ を第一層の定数で表せる。そして、式(31)を用いて、 $S^{(2)}(h_2)$ と $D^{(2)}(h_2)$ も $A_1^{(1)}$ で表せる。

$$S^{(2)}(h_2) = Z_s^{(2)} A_1^{(1)} \quad (39)$$

$$D^{(2)}(h_2) = Z_d^{(2)} A_1^{(1)} \quad (40)$$

さらに、第二層と第三層の連続条件を用いて、 $S^{(3)}(h_3)$ と $D^{(3)}(h_3)$ も $A_1^{(1)}$ で表せる。このようにして、結局、第 N 層の応力と変位ベクトル $S^{(N)}(h_N)$ と $D^{(N)}(h_N)$ を $A_1^{(1)}$ で表す。

$$S^{(N)}(h_N) = Z_s^{(N)} A_1^{(1)} \quad (41)$$

$$D^{(N)}(h_N) = Z_d^{(N)} A_1^{(1)} \quad (42)$$

第 N 層の境界条件式(8)を使って、

$$Z_s^{(N)} A_1^{(1)} = 0 \quad (43)$$

を得る。零以外の解が存在する条件は次のように表せる。

$$\det(Z_s^{(N)}) = 0 \quad (44)$$

マトリックス $Z_s^{(N)}$ の要素は位相速度 c と波数 ξ の関数で、もし、波数を定めると位相速度は式(44)から求まる。つまり、式(44)は分散関係を与える。

式(44)を満足する c と ξ を式(43)に代入すると、ベクトル $A_1^{(1)}$ が求まる。いままでの筋道を逆に進めて、 $A_1^{(n)}$ と $A_2^{(n)}$ ($n=1, \dots, N$)を求め、各層の変位と応力さらにひずみも求めることができる。応力成分は、

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11}(x_3) \cos \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \\ \bar{\sigma}_{22}(x_3) \cos \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \\ \bar{\sigma}_{33}(x_3) \cos \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \\ \bar{\sigma}_{12}(x_3) \cos \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \\ \bar{\sigma}_{13}(x_3) \sin \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \\ \bar{\sigma}_{23}(x_3) \sin \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (45)$$

ひずみ成分は,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11}(x_3) \cos \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \\ \bar{\varepsilon}_{22}(x_3) \cos \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \\ \bar{\varepsilon}_{33}(x_3) \cos \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \\ \bar{\varepsilon}_{12}(x_3) \cos \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \\ \bar{\varepsilon}_{13}(x_3) \sin \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \\ \bar{\varepsilon}_{23}(x_3) \sin \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (46)$$

ひずみエネルギーは次の式で与えられる.

$$E = (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\varepsilon_{13} + 2\sigma_{23}\varepsilon_{23})/2 \quad \dots\dots\dots (47)$$

式(45), (46)を上式に代入すると,

$$E = E_c \cos^2 \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) + E_s \sin^2 \xi(n_1 x_1 + n_2 x_2 - ct) \quad \dots\dots\dots (48)$$

を得る. ここに,

$$E_c = (\bar{\sigma}_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22}\bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\sigma}_{33}\bar{\varepsilon}_{33} + 2\bar{\sigma}_{12}\bar{\varepsilon}_{12})/2 \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$E_s = \bar{\sigma}_{13}\bar{\varepsilon}_{13} + \bar{\sigma}_{23}\bar{\varepsilon}_{23} \quad \dots\dots\dots (50)$$

4. 計算結果

表1の弾性係数を用いて, graphite/epoxy 複合材料の一方向材と対称斜交積層板および hybrid 複合材料積層板(carbon/epoxy と glass/epoxy)の位相速度の分散関係と位相速度の異方性を解析し,そして, carbon/epoxy 一方向材と hybrid 複合材料の積層板のエネルギー分布を調べた.

表1に挙げた繊維強化複合材は,一般的に横等方性体と認められているので,ヤング率とポアソン比には次の関係がある.

$$E_2 = E_3; \nu_{21} = \nu_{31}; \nu_{12} = \nu_{13}; \nu_{23} = \nu_{32}$$

また次の弾性係数は零である.

$$\begin{matrix} C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{1131} \\ C_{2231} & C_{3331} & C_{2312} & C_{3112} \end{matrix}$$

他の弾性係数は次の式によって与えられる⁽⁷⁾.

$$C_{1111} = T_{11} \cos^4 \phi + (T_{12}/2 + T_{66}) \sin^2 (2\phi) + T_{22} \sin^4 \phi$$

$$C_{1122} = (T_{11}/4 + T_{22}/4 - T_{66}) \sin^2 (2\phi) + T_{12}(\sin^4 \phi + \cos^4 \phi)$$

$$C_{1133} = T_{13} \cos^2 \phi + T_{23} \sin^2 \phi$$

$$C_{1112} = \{(T_{11} \cos^2 \phi - T_{22} \sin^2 \phi) \sin (2\phi) - (T_{12}/2 + T_{66}) \sin (4\phi)\}/2$$

$$C_{2222} = T_{11} \sin^4 \phi + (T_{12}/2 + T_{66}) \sin^2 (2\phi) + T_{22} \cos^4 \phi$$

$$C_{2212} = \{(T_{11} \sin^2 \phi - T_{22} \cos^2 \phi) \sin (2\phi) + (T_{12}/2 + T_{66}) \sin (4\phi)\}/2$$

$$C_{3333} = T_{33}$$

$$C_{2323} = T_{44} \cos^2 \phi + T_{55} \sin^2 \phi$$

$$C_{3312} = (T_{13}/2 - T_{23}/2) \sin (2\phi)$$

$$C_{2313} = (T_{55}/2 - T_{44}/2) \sin (2\phi)$$

$$C_{1313} = T_{44} \sin^2 \phi + T_{55} \cos^2 \phi$$

$$C_{1212} = (T_{11}/4 - T_{12}/2 + T_{22}/4) \sin^2 (2\phi) + T_{66} \cos^2 (2\phi)$$

$$C_{2233} = T_{13} \sin^2 \phi + T_{23} \cos^2 \phi$$

ここに,

$$T_{11} = (1 - \nu_{23}\nu_{32})/(E_2 E_3 d)$$

$$T_{22} = (1 - \nu_{13}\nu_{31})/(E_1 E_3 d)$$

$$T_{12} = (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})/(E_2 E_3 d)$$

$$T_{13} = (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})/(E_2 E_3 d)$$

$$T_{23} = (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})/(E_1 E_3 d)$$

$$T_{33} = (1 - \nu_{12}\nu_{21})/(E_1 E_2 d)$$

$$T_{44} = G_{23}$$

$$T_{55} = G_{31}$$

$$T_{66} = G_{21}$$

$$d = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13})/E_1 E_2 E_3$$

ただし, E_1, E_2, E_3 はそれぞれ $\phi=0$ のときの $x_1, x_2,$

表1 繊維強化複合材料の材料定数 (無次元)

材料/定数	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}	ν_{13}
graphite/epoxy ⁽⁵⁾	1.000	0.025	0.0125	0.25	0.25
carbon/epoxy ⁽⁶⁾	1.000	0.06510	0.03373	0.3340	0.4862
glass/epoxy ⁽⁶⁾	0.2707	0.06589	0.02401	0.2912	0.5071

* graphite/epoxy の値は自身の E_1 の絶対値で無次元化され, carbon/epoxy と glass/epoxy の値は carbon/epoxy の E_1 の絶対値で無次元された. なお, carbon/epoxy と glass/epoxy の密度の比は 1:1.4 である.

図2 一方向材の位相速度分散特性

図4 Hybrid 積層板の位相速度分散特性

図3 対称斜交積層板の位相速度分散特性

図5 graphite/epoxy 一方向材の位相速度異方性

図6 対称積層板の位相速度異方性

図7 対称積層板の位相速度異方性

図 8 対称積層板の位相速度異方性

x_3 方向のヤング率である。 ν_{ij} はポアソン比で、 i は応力が x_i 方向に加えることを意味し、 j は x_j 方向のひずみを意味する。 G_{12} , G_{13} , G_{23} はそれぞれ $\phi=0$ のときの x_1-x_2 , x_3-x_1 , x_2-x_3 , 平面の剛性率である。また、 $\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$ (総和しない)。

無限異方性体の場合には、三つの位相速度はそれぞれ QP, QSH, QSV と言われている。便宜上、ここでは基本モードの三つの位相速度をそれぞれ LP, LSH, LSV と名付ける。積層板の一番強い層と同じ材料の無限体の繊維強化方向における波の速度を c_0 とすれば、

$$c_0 = \sqrt{C_{1111(0)}/\rho_0}$$

ここに、 $C_{1111(0)}$ は繊維強化方向の弾性係数で、 ρ_0 は材料の密度である。すべての図で L は波長、 H は板の厚さ、 L/H は無次元波長である。

図 2 は一方向材の位相速度の分散性を示している。伝ば方向は x_1 とし、繊維強化方向がそれぞれ x_1 軸より 0° , 45° , 90° の場合を考える。この図より次のことがわかる。伝ば方向が材料主軸と一致する場合 (0° , 90°), LSH 波は分散性がない。一致しない場合 (45°), LSH 波も分散性を有する。LP 波は、伝ば方向が繊維方向に近ければ近いほど、分散性が強くなる。それに対して、LSV 波は伝ば方向が繊維方向に近ければ近いほど分散性が弱くなる。

図 3 は、対称積層板の分散関係を示している。LSH 波を含め、すべての波は分散性を有することがわかる。

図 4 は、hybrid 積層板の分散関係である。静荷重に対して強い 0° 方向の炭素繊維強化層を上下表面に、耐衝撃性のよいガラス繊維強化層を $\pm 45^\circ$ で中間層にして積層した hybrid 積層板は、 $\pm 45^\circ$ 層があるので、LSH 波も弱い分散性を示すことがわかる。

一方向 graphite/epoxy 複合材の位相速度の異方性

図 9 hybrid 積層板の位相速度異方性

図 10 ひずみエネルギーの板厚方向の分布 (carbon/epoxy 一方向材)

を図 5 に示す。LP, LSH, LSV 波いずれも異方性を有する。LSH 波の分散性が弱いので、 $L/H=4, 8, 19$ の曲線がほぼ一緒になる。LP, LSH 波は $L/H>19$ のときほぼ一定になる。LP, LSH 波の曲線が文献(5)の結果とほぼ一致するが、値がやや小さい。ここでは、有限厚さの板を考えているため、LSV 波も異方性を有する。

図 11 ひずみエネルギーの板厚方向の分布
(carbon/epoxy と glass/epoxy hybrid 積層板)

図 12 ひずみエネルギーの板厚方向の分布
(carbon/epoxy と glass/epoxy hybrid 積層板)

graphite/epoxy 複合材の対称斜交積層板の速度異方性を図 6~8 に示す。異方性が $\theta=0^\circ\sim 180^\circ$ の範囲に存在することがわかる。反対称斜交板の場合だと、異方性が $\theta=0^\circ\sim 90^\circ$ の範囲にある。

図 9 は, hybrid 複合材料板の速度異方性を示す。この板は反対称なので、異方性が $\theta=0^\circ\sim 90^\circ$ の範囲にある。また、LSH 波は異方性と分散性も弱いことがわかる。

図 2~9 を全体的に見ると、次のようなことがわかる。位相速度の分散性と異方性が板の固有の特徴であるが、LP, LSH 波については波長が長いときに異方性が強く、分散性が弱くなる。波長が短いときには、分散性が強く、異方性が弱くなる。つまり、分散性が異方性を滑らかにしていると考えられる。

ひずみエネルギーの振幅 E_c と E_s の板厚方向の分布を図 10~12 に示す。LP 波については、一方向積層板 (C0)₄ (C は carbon/epoxy の意味である) では E_c が表面層に集中しているが、hybrid 積層板 (C0/G0/G0/C0) (G は glass/epoxy の意味である) では E_c は波長が短いときに中間層に集中する。それに、 E_s は比較的小さい。LSV 波についても、いずれの E_c も表面層に集中するが、板 (C0/G0/G0/C0) のほうは E_s がより中間層に集中することがわかる。しかし、LSH 波については、板 (C0)₄ では E_c が均一、 E_s が零である。板 (C0/G0/G0/C0) では E_s も小さいが、 E_c がより表面層に集中する。これは望まないことである。

もし、(C0/G0/G0/C0) の中間層の繊維方向を変えて、(C0/G+45/G-45/C0) のように積層すれば、LP, LSV 波だけではなく、LSH 波もひずみエネルギーが耐衝撃層に集中する。つまり、積層の繊維方向を変えることによってひずみエネルギーを耐衝撃層に集

中させられることがわかる。

よく知られているように、応力波が伝ばするときには、エネルギーが表面層と柔らかい層に集中する傾向がある。ラム波の場合には、これは、ある種類の波に対して間違いないが、適応できない波もある。例えば、LSH の場合、図 10 と図 11 を比べると板 (C0)₄ の中間層 C0 が板 (C0/G0/G0/C0) の中間層 G0 よりも硬いが、C0 層に占めるひずみエネルギーが多い。図 10 と図 12 を比べると、同じことが言える。(G+45/G-45) 層のせん断弾性係数は (C0/C0) 層より高いが、(G+45/G-45) 層に占めるひずみエネルギーが多い。つまり、LSH 波の場合、ひずみエネルギーが硬い層に集中する。

5. 結 言

繊維強化一方向材積層板、対称斜交積層板、hybrid 積層板などの異方性積層板中の応力伝ば問題を厳密に理論解析し、次の結論を得た。

(1) 一般的には応力波が繊維強化複合材料の積層板を伝ばするとき、波の位相速度は $\theta=0^\circ\sim 180^\circ$ の範囲に変化する。

(2) LP, LSH 波の位相速度は波長が長い場合には、分散性が弱く異方性が強くなり、波長が短い場合には、位相速度の分散性が強く異方性が弱くなる。

(3) ひずみエネルギーの分布を調べることによって、積層板各層の繊維強化方向を適当に定め、ひずみエネルギーを耐衝撃層に集中させることができる。この方法で、より耐衝撃性のよい hybrid 複合板を開発できる可能性がある。

文 献

- (1) Brekhovskikh, L. M., *Waves in Layered Media*, (1960), 90, Academic Press.
 - (2) Sun, C. T., Achenbach, J. D. and Herrmann, G., "Time-Harmonic Waves in a Stratified Medium Propagating in the Direction of the Layering," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 35-2 (1968), 408.
 - (3) Sun, C. T., Achenbach, J. D. and Herrmann, G., "Continuum Theory for a Laminated Medium," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 35-3 (1968), 467.
 - (4) Murakami, H., "A Mixture Theory for Wave Propagation in Angle-Ply Laminates, Part 1: theory," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 52-2 (1985), 331.
 - (5) Murakami, H. and Akiyama, A., "A Mixture Theory for Wave Propagation in Angle-Ply Laminates, Part 2: Application," 文献(4)の338ページ.
 - (6) Kausel, E., "Wave Propagation in Anisotropic layered Media," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23 (1986), 1567.
 - (7) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, (1975), 32, Scripta, Washington, D. C.
 - (8) Takahashi, K. and Chou, Tsu-Wei, "Nonlinear Deformation and Failure Behavior of Carbon/glass hybrid Laminates," *J. Compos. Mater.*, 21 (1987), 396.
-