弾性半無限体床上弾性層のねじり物体力問題のグリーン関数*

長 谷 川 久 夫^{*1}

Green's Functions for Torsional Body Force Problems of an Elastic Layer on an Elastic Half Space

Hisao HASEGAWA

Green's functions in a closed form are shown for axisymmetric torsional body force problems of an elastic layer on an elastic half space. A Green's function is defined as a solution to the problem of an elastic layer on an elastic half space subjected to a torsional body force acting on a circle in the interior of the layer. As a special case for Green's functions, we can obtain Green's functions for torsional body force problems of (i) an elastic half space, (ii) an elastic thick plate, and (iii) an elastic layer on a rigid foundation. A general method of solution is presented for torsional body force problems of an elastic layer on an elastic foundation. Green's functions, mentioned above, are obtained by applying the general method of solution. As an example of the application of Green's functions we consider torsion of a hemispherical rigid body embedded in an elastic layer on an elastic foundation. Numerical results for the problem are shown.

Key Words: Elasticity, Torsion, Green's Function, Body Force, Elastic Layer, Elastic Foundation, Fundamental Solution

1. ま え が き

近年、電子計算機の使用を前提とした種々の工学問題の解法が提案され、重要な役割を果たしている。これらの解法では、基本解やグリーン関数を利用することが多い。応力解析問題では、従来、無限体中の一点に集中力が作用するときのケルビン解⁽¹⁾を基本解として用いることが多かったが、半無限体中の一点に集中力が作用するときの Mindlin 解⁽²⁾のように、考察する問題の境界条件の一部をあらかじめ満足している基本解、いわゆるグリーン関数を利用することもしばしば行われるようになった。たとえば、結城ら⁽³⁾⁽⁴⁾は Mindlin 解や異種材料接着体の Hetenyi の解⁽⁵⁾を利用した BEM を提案している。

前報で、軸対称物体力の働く無限円柱問題のグリーン関数⁽⁶⁾⁽⁷⁾、軸対称物体力の働く半無限体問題のグリーン関数⁽⁸⁾、また、ねじり物体力の働く無限厚板問題のグリーン関数⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾を示し、それらの応用例を報告した。本論文は、弾性半無限体床上の弾性層に軸対称ねじり物体力が作用する問題の一般解法を示し、それを

応用して、本問題のグリーン関数を求めたものである。このグリーン関数は、半無限体床の弾性定数を零にすれば無限厚板、無限大にすれば剛体床上の無限厚板の解になる。なお、弾性半無限体床上の弾性層中の一点に集中力が作用するときには Chain ら⁽¹¹⁾が近似解を示している。

示されたグリーン関数の応用例として、弾性半無限体床上弾性層の表面に半球状剛体介在物が存在し、その介在物がねじりを受ける問題を考察する。

2. グリーン関数の定義

弾性半無限体 ($0 \leq r < \infty, H \leq z < \infty$) 床上の厚さ H の弾性層 ($0 \leq r < \infty, 0 \leq z \leq H$) に円柱座標 (r, θ, z) を図 1 のようにとる。弾性層と半無限体の接触面は完全に接着されており、それらの横弾性係数をそれぞれ μ_1, μ_2 とする。本問題は軸対称ねじり問題であるから、 r 方向と z 方向の変位成分は常に $u_1 = u_3 = 0$ 、したがって零でない応力成分は $\tau_{r\theta}$ と $\tau_{z\theta}$ のみである。

本論文で示されるグリーン関数は、弾性層内の一円周 ($r=a, z=h$) 上に図 2 に示すようなねじり物体力

$$F_2 = \frac{1}{2\pi r} \delta(r-a) \delta(z-h) \cdots \cdots \cdots (1)$$

が存在し、弾性層表面 ($z=0$) で表面力が作用しない

* 平成元年 4 月 3 日 第 66 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 9 月 28 日。

*¹ 正員、明治大学理工学部 (〒214 川崎市多摩区東三田 1-1-1)。

境界条件

$$z=0, 0 \leq r < \infty; \tau_{z\theta} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ならびに半無限体床との接触面の境界条件

$$z=H, 0 \leq r < \infty; u_2^1 = u_2^2, \tau_{z\theta}^1 = \tau_{z\theta}^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

を満足する問題の解として定義される。ここに上添字 1 は弾性層, 2 は半無限体の量を意味し, u_2 はねじれ変位, $\delta(\)$ はディラックのデルタ関数を表す。

3. ねじり物体力問題の解法

3.1 基礎式 本章では, 弾性半無限体床上弾性層に任意分布の軸対称ねじり物体力が作用する問題の一般解法を示す。本節では, それに必要な基礎式を整理しておく。

(1) ねじり物体力による変位と応力 横弾性係数 μ_1 の無限体中に z に関して偶関数的に作用するねじり物体力 $F_2(r, z)$ が存在するとき, それによる変位と応力は次式のように表すことができる⁽¹²⁾。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mu_1 u_2 \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a \bar{F}_2(a, \beta)}{a^2 + \beta^2} \\ &\times \begin{Bmatrix} -J_1(ar) \cos \beta z \\ \beta J_1(ar) \sin \beta z \\ a J_2(ar) \cos \beta z \end{Bmatrix} da d\beta \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに

$$\bar{F}_2(a, \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty r F_2(r, z) J_1(ar) \cos \beta z dr dz \quad \dots\dots\dots (5)$$

を表し, $J_m(ar)$ は m 次の第 1 種ベッセル関数である。

(2) 無限厚板問題の解 ねじり表面力を受ける横弾性係数 μ_1 の無限厚板問題の変位と応力は, 次式から求めることができる⁽¹³⁾。

図 1 半無限体床上弾性層内の一円周上に働くねじり力

$$\begin{Bmatrix} \mu_1 u_2 \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \begin{Bmatrix} J_1(ar)(Ae^{az} + Be^{-az}) \\ a J_1(ar)(Ae^{az} - Be^{-az}) \\ -a J_2(ar)(Ae^{az} + Be^{-az}) \end{Bmatrix} da \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに $A=A(a)$, $B=B(a)$ は境界条件より定まる a の関数である。

(3) 半無限体問題の解 ねじり表面力を受ける横弾性係数 μ_2 の半無限体の変位と応力は次式から求めることができる⁽¹²⁾。

$$\begin{Bmatrix} \mu_2 u_2 \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = -\int_0^\infty C \begin{Bmatrix} -J_1(ar) \\ a J_1(ar) \\ a J_2(ar) \end{Bmatrix} e^{-az} da \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに $C=C(a)$ は境界条件より定まる a の関数である。

3.2 解法 弾性半無限体床上弾性層のねじり物体力問題の一般解法を示す。ねじり物体力 $F_2(r, z)$ の作用する厚さ H の弾性層 ($0 \leq r < \infty$; $0 \leq z \leq H$) の変位 u_2^1 と応力 $\tau_{z\theta}^1, \tau_{r\theta}^1$ を次式のように表すことにする。

$$\begin{Bmatrix} \mu_1 u_2^1 \\ \tau_{z\theta}^1 \\ \tau_{r\theta}^1 \end{Bmatrix} = \text{式(4)の} \begin{Bmatrix} \mu_1 u_2 \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} + \text{式(6)の} \begin{Bmatrix} \mu_1 u_2 \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

また, 弾性半無限体 ($0 \leq r < \infty$, $H \leq z < \infty$) の変位 u_2^2 と応力 $\tau_{z\theta}^2, \tau_{r\theta}^2$ は式(7), すなわち

$$\begin{Bmatrix} \mu_2 u_2^2 \\ \tau_{z\theta}^2 \\ \tau_{r\theta}^2 \end{Bmatrix} = \text{式(7)の} \begin{Bmatrix} \mu_2 u_2 \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

から求める。

式(8), (9)の変位と応力が境界条件式(2), (3)を満足するように A, B, C を定めてやれば本問題の一般解法が得られる。式(8), (9)に境界条件式(2), (3)を適用すれば A, B, C を未知量とする三元連立一次方程式となるから, それを解いて次式の関係が得られる。

図 2 一円周上に働くねじり力

$$\begin{aligned}
 A=B &= \frac{2}{\pi D} \int_0^\infty \frac{\bar{F}_2}{\alpha^2 + \beta^2} \{ \xi \beta \sin \beta H \\
 &\quad - \alpha \cos \beta H \} d\beta, \\
 C &= \frac{2}{\pi D} \int_0^\infty \frac{\bar{F}_2}{\alpha^2 + \beta^2} \{ (\alpha \cos \beta H + \beta \sin \beta H) e^{2aH} \\
 &\quad + \beta \sin \beta H - \alpha \cos \beta H \} d\beta \quad \dots\dots\dots (10)
 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 \xi &= \mu_1 / \mu_2, \\
 D &= (1 + \xi) e^{aH} + (1 - \xi) e^{-aH} \quad \dots\dots\dots (11)
 \end{aligned}$$

以上の結果から、ねじり物体力 $F_2(r, z)$ が作用し、境界条件式(2), (3)を満足する問題の解は次式のように表される。

(1) 弾性層

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 u_2^1 \\ \tau_{z\theta}^1 \\ \tau_{r\theta}^1 \end{array} \right\} \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\bar{F}_2}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \begin{array}{l} -J_1(\alpha r) f_1 \\ \alpha J_1(\alpha r) f_2 \\ \alpha J_2(\alpha r) f_1 \end{array} \right\} d\alpha d\beta \quad \dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

(2) 半無限体

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{array}{l} \mu_2 u_2^2 \\ \tau_{z\theta}^2 \\ \tau_{r\theta}^2 \end{array} \right\} = \\
 &-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\bar{F}_2}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \begin{array}{l} -J_1(\alpha r) \\ \alpha J_1(\alpha r) \\ \alpha J_2(\alpha r) \end{array} \right\} f_3 d\alpha d\beta \quad \dots\dots\dots (13)
 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \alpha \cos \beta z + \frac{1}{D} (e^{az} + e^{-az}) \\
 &\quad \times (\xi \beta \sin \beta H - \alpha \cos \beta H), \\
 f_2 &= \beta \sin \beta z - \frac{1}{D} (e^{az} - e^{-az}) \\
 &\quad \times (\xi \beta \sin \beta H - \alpha \cos \beta H), \\
 f_3 &= \frac{1}{D} e^{-az} \{ (\alpha \cos \beta H + \beta \sin \beta H) e^{2aH} \\
 &\quad + \beta \sin \beta H - \alpha \cos \beta H \} \quad \dots\dots\dots (14)
 \end{aligned}$$

4. グリーン関数

4.1 グリーン関数 2章で定義した弾性半無限体床上弾性層のねじり物体力問題のグリーン関数を示す。それには、式(1)のねじり物体力 F_2 を式(5)に代入すれば

$$\bar{F}_2 = \frac{1}{2\pi} J_1(\alpha a) \cos \beta h \quad \dots\dots\dots (15)$$

となるから、これを式(12), (13)に代入して積分を行えばよい。

積分公式⁽¹⁴⁾

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \beta h \cos \beta H d\beta \\
 &= \frac{\pi}{4a} (e^{-aH_1} + e^{-aH_2}), \\
 &\int_0^\infty \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \beta h \sin \beta H d\beta = \frac{\pi}{4} (e^{-aH_1} + e^{-aH_2}), \\
 &H_1 = H - h, H_2 = H + h \quad \dots\dots\dots (16)
 \end{aligned}$$

を用いて式(12), (13)を β に関して積分し、そして $1/D$ の無限級数展開表現⁽¹³⁾

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{\xi + 1} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^n e^{-aH(2n+1)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ならびに積分公式⁽¹⁴⁾

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty J_1(\alpha a) J_1(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha = \frac{1}{\pi \sqrt{ar}} Q_{1/2}(x), \\
 &\int_0^\infty \alpha J_1(\alpha a) J_1(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha \\
 &= -\frac{1}{2\pi \sqrt{ar}} \frac{z}{x^2 - 1} G_1(x), \\
 &\int_0^\infty \alpha J_1(\alpha a) J_2(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha = \frac{1}{2\pi \sqrt{ar}} G_2(x) \quad \dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

を用いて α に関する積分を実行する。ここに

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{r^2 + a^2 + z^2}{2ar}, \\
 G_1(x) &= x Q_{1/2}(x) - Q_{-1/2}(x), \\
 G_2(x) &= 3 Q_{1/2}(x) + \frac{x - r/a}{x^2 - 1} G_1(x) \quad \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

であり、 $Q_\nu(x)$ は ν 次の第2種ルジャンドル関数を表す。結果は次式ようになる。

(1) 弾性層

$$\begin{aligned}
 \mu_2 u_2^1 &= \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{ar}} \left[\sum_{i=1}^2 Q_{1/2}(x_i) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^4 Q_{1/2}(y_i) \right\} \right], \\
 \tau_{z\theta}^1 &= \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar}} \left[\sum_{i=1}^2 \frac{z_i}{y_i^2 - 1} G_1(x_i) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^4 \frac{z'_i}{y_i^2 - 1} G_1(y_i) \right\} \right], \\
 \tau_{r\theta}^1 &= -\frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar}} \left[\sum_{i=1}^2 G_2(x_i) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^4 G_2(y_i) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

(2) 半無限体

$$\mu_2 u_2^2 = \frac{1}{2\pi^2 \sqrt{ar}(\xi + 1)} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^n \left\{ \sum_{i=1}^2 Q_{1/2}(Y_i) \right\},$$

$$\begin{aligned} \tau_{z0}^2 &= \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{ar} r (\xi+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-1}{\xi+1} \right)^n \\ &\quad \times \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{z_i + 2nH}{Y_i^2 - 1} G_1(Y_i) \right\}, \\ \tau_{r0}^2 &= -\frac{1}{4\pi^2 \sqrt{ar} r (\xi+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-1}{\xi+1} \right)^n \left\{ \sum_{i=1}^2 G_2(Y_i) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{r^2 + a^2 + z_i^2}{2ar}, \quad y_i = \frac{r^2 + a^2 + z_i'^2}{2ar}, \\ Y_i &= \frac{r^2 + a^2 + z_i'^2}{2ar} \end{aligned} \quad (22)$$

であり, z_i, z_i', z_i'' は次式を表す.

$$\begin{aligned} z_1 &= z - h, \quad z_2 = z + h, \\ z_1' &= z_1 - 2(n+1)H, \quad z_2' = z_1 + 2(n+1)H, \\ z_3 &= z_2 - 2(n+1)H, \quad z_4' = z_2 + 2(n+1)H, \\ z_i'' &= z_i + 2nH, \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (23)$$

4.2 特別な場合 4.1 節に示された半無限体床上弾性層の物体力問題のグリーン関数から, その特別な場合の結果をいくつか導く.

(1) 半無限体 ($0 \leq r < \infty, 0 \leq z < \infty$) 問題のグリーン関数 式(20), (21)において $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ すなわち $\xi = 1$ とおけば次式を得る.

$$\begin{aligned} \mu u_2^1 &= \mu u_2^2 = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{ar}} \sum_{i=1}^2 Q_{1/2}(x_i), \\ \tau_{z0}^1 &= \tau_{z0}^2 = -\frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar} r} \sum_{i=1}^2 \frac{z_i}{x_i^2 - 1} G_1(x_i), \\ \tau_{r0}^1 &= \tau_{r0}^2 = -\frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar} r} \sum_{i=1}^2 G_2(x_i) \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)は, 前報のねじり物体力の働く半無限体問題のグリーン関数と一致している.

(2) 無限厚板 ($0 \leq r < \infty, 0 \leq z \leq H$) 問題のグリーン関数 式(20)において $\mu_2 = 0$ すなわち $\xi \rightarrow \infty$ とおけば

$$\begin{aligned} \mu_1 u_2^1 &= \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{ar}} \left[\sum_{i=1}^2 Q_{1/2}(x_i) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^4 Q_{1/2}(y_i) \right\} \right], \\ \tau_{z0}^1 &= \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar} r} \left[\sum_{i=1}^2 \frac{z_i}{x_i^2 - 1} G_1(x_i) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^4 \frac{z_i'}{y_i^2 - 1} G_1(y_i) \right\} \right], \\ \tau_{r0}^1 &= -\frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar} r} \left[\sum_{i=1}^2 G_2(x_i) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^4 G_2(y_i) \right\} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

となるから, これを整理して次式を得る.

$$\begin{aligned} \mu_1 u_2^1 &= \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{ar}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^4 Q_{1/2}(X_i) \right\}, \\ \tau_{z0}^1 &= \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar} r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^4 \frac{\bar{z}_i}{X_i^2 - 1} G_1(X_i) \right\}, \\ \tau_{r0}^1 &= -\frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar} r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^4 G_2(X_i) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

ここに

$$X_i = \frac{r^2 + a^2 + \bar{z}_i^2}{2ar} \quad (27)$$

であり, $\bar{z}_i$ は次式で表す.

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= z - 2(n-1)H + (-1)^n h, \\ \bar{z}_2 &= z + 2nH - (-1)^n h, \\ \bar{z}_3 &= z - 2nH + (-1)^n h, \\ \bar{z}_4 &= z + 2(n-1)H - (-1)^n h \end{aligned} \quad (28)$$

式(26)は, 前報のねじり物体力の働く無限厚板問題のグリーン関数と一致している.

(3) 剛体床上弾性層 ($0 \leq r < \infty, 0 \leq z \leq H$) 問題のグリーン関数 式(20)において $\mu_2 \rightarrow \infty$ すなわち $\xi \rightarrow 0$ とおけば

$$\begin{aligned} \mu_1 u_2^1 &= \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{ar}} \left[\sum_{i=1}^2 Q_{1/2}(x_i) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{i=1}^4 Q_{1/2}(y_i) \right\} \right], \\ \tau_{z0}^1 &= \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar} r} \left[\sum_{i=1}^2 \frac{z_i}{x_i^2 - 1} G_1(x_i) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{i=1}^4 \frac{z_i'}{y_i^2 - 1} G_1(y_i) \right\} \right], \\ \tau_{r0}^1 &= -\frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar} r} \left[\sum_{i=1}^2 G_2(x_i) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{i=1}^4 G_2(y_i) \right\} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

となるから, これを整理して次式を得る.

$$\begin{aligned} \mu_1 u_2^1 &= \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{ar}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{i=1}^4 P_i Q_{1/2}(X_i) \right\}, \\ \tau_{z0}^1 &= \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar} r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{i=1}^4 P_i \frac{\bar{z}_i}{X_i^2 - 1} G_1(X_i) \right\}, \\ \tau_{r0}^1 &= -\frac{1}{8\pi^2 \sqrt{ar} r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{i=1}^4 P_i G_2(X_i) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

ここに $P_i = 1, (i=1, 4), P_i = -1, (i=2, 3)$ である. 式(30)は前報の剛体床上の無限厚板のねじり物体力問題のグリーン関数と一致する.

5. 応 用 例

ここでは, 4 章に示した弾性半無限体床上弾性層のねじり物体力問題のグリーン関数の簡単な応用例について述べる. 図 3 に示すように, 弾性半無限体床上弾性層の表面に半球状剛体介在物が存在し, その介在物が z 軸まわりに角度 ω ねじられるものとする. 本問題の境界条件は

$$\begin{aligned} (1) \quad & z=0, c \leq r < \infty; \tau_{z0}=0 \\ (2) \quad & R=c; u_2=\omega r \end{aligned} \quad (31)$$

ここに c は半球状介在物の半径, $R^2 = r^2 + z^2$ である.

図 4 に示すように, 弾性層内に半径 $R=C$ の半球

面を想定し、その近傍の半径 $c-\varepsilon$ の破線の面上に式 (1) のねじり物体力を分布させ、半径 C の半球面の境界条件を満足するように分布させた物体力の大きさ $f(\beta)$ を定める。分布させた物体力による変位と応力は

(1) 弾性層

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \int_0^{\pi/2} f(\beta) \begin{Bmatrix} u_2^1 \\ \tau_{z\theta}^1 \\ \tau_{r\theta}^1 \end{Bmatrix} d\beta \quad \dots\dots\dots (32)$$

(2) 半無限体床

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \int_0^{\pi/2} f(\beta) \begin{Bmatrix} u_2^2 \\ \tau_{z\theta}^2 \\ \tau_{r\theta}^2 \end{Bmatrix} d\beta \quad \dots\dots\dots (33)$$

式 (32) に式 (31) の条件 (2) を適用すれば

$$\omega C \sin \alpha = \int_0^{\pi/2} f(\beta) (u_2^1)_{R=C} d\beta \quad \dots\dots\dots (34)$$

積分方程式 (34) を解くため、 $f(\beta)$ を次式のようにおく。

$$f(\beta) = \sum_{j=1}^N f_j \delta(\beta - \beta_j), \quad (0 < \beta < \pi/2) \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここに f_j はねじり物体力の大きさに対応する任意定数である。

図 3 半球状剛体によりねじりを受ける弾性層

図 4 弾性層内に想定した半球面と物体力分布面

式 (35) に式 (34) に代入すると、

$$\begin{aligned} \omega C \sin \alpha &= \sum_{j=1}^N f_j (u_2^1)_{R=C, a=a_j, h=h_j} \\ a_j &= (C - \varepsilon) \sin \beta_j \\ h_j &= (C - \varepsilon) \cos \beta_j \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

となるから $R=C$ の面上に N 個の点を選べば、式 (36) から N 元の連立一次方程式を構成できる。それを解いて f_j を求めることにより、弾性層および弾性半無限体床の任意の点 (r, z) の変位と応力は次式から得られる。

(1) 弾性層

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^N f_j \begin{Bmatrix} u_2^1 \\ \tau_{z\theta}^1 \\ \tau_{r\theta}^1 \end{Bmatrix} \quad a=a_j, h=h_j \quad \dots\dots\dots (37)$$

(2) 半無限体

図 5 弾性層と半無限体の接触面上のねじり応力 $\tau_{z\theta}$ の分布

図 6 半球状剛体と弾性層の接触面上のねじり応力 $\tau_{r\theta}$ の分布

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^N f_j \begin{Bmatrix} u_2^2 \\ \tau_{z\theta}^2 \\ \tau_{r\theta}^2 \end{Bmatrix} \quad a=a_j, h=h_j \quad \dots\dots\dots (38)$$

数値結果を図5, 6に示す。これらの図中の白丸印は $\mu_1 = \mu_2$ すなわち弾性層と半無限体が同一材料のときの厳密解

$$\begin{aligned} u_2 &= \omega C^3 \frac{r}{R^3}, \\ \tau_{r\theta} &= -3\mu\omega C^3 \frac{r^2}{R^3}, \\ \tau_{z\theta} &= -3\mu\omega C^3 \frac{rz}{R^3} \quad \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

を表す。

図5は $z=H$ すなわち弾性層と半無限体の接触面上のねじり応力 $\tau_{z\theta}/\mu_1\omega$ の分布を図示したもので、図5中の実線は弾性層の厚さが $H/C=1.5$ 、破線は $H/C=2.0$ のときの値である。 $\mu_1/\mu_2=1.0$ のときの本結果と白丸印（厳密解）は完全に一致している。ねじり応力 $\tau_{z\theta}/\mu_1\omega$ は μ_1/μ_2 の値の小さいほうが大きく、 $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$ すなわち剛体床上弾性層のときに最も大きい。

図6は半球剛状剛体介在物と弾性層の接触面のねじり応力 $(\tau_{r\theta}/\mu_1\omega)_{R=C}$ の分布を $H/C=1.5$ のときに図示したものである。 $\mu_1/\mu_2=1.0$ のときの本結果は白丸印（厳密解）と完全に一致している。ねじり応力 $(\tau_{r\theta}/\mu_1\omega)_{R=C}$ は剛体床 ($\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$) のとき最も大きく、無限厚板 ($\mu_1/\mu_2 \rightarrow \infty$) のとき最も小さい。

6. む す び

本論文のおもな結果を要約すると次のようになる。

討 論

〔質問〕 野田 尚 昭〔九州工業大学工学部〕

興味深く拝読させていただいた。以下の点についてご教示いただければ幸いである。

(1) 貴論文に示されている解法を拡張して、例えば二層の弾性体 (μ_1, μ_2) から成る無限厚板のねじり物体力問題(図1で半無限体の厚さが有限の場合に相当)などのより複雑な問題の解を導くことも可能か。

(2) 得られた式(20)と(21)に含まれる n についての無限級数はどの程度までとる必要があるのか。

(3) もし可能であれば、図5と図6で $\mu_1/\mu_2=1$ の厳密解とどの程度まで一致しているか数値でお示しいただければ幸いである。

〔回答〕 (1) 可能である。ご指摘の問題も現在

(1) 弾性半無限体床上弾性層のねじり物体力問題のグリーン関数を示した。このグリーン関数は、弾性層内の一円周上にねじり力として働く物体力が存在する問題の解として定義される。

(2) 示されたグリーン関数は、その特別な場合として、(i)半無限体問題のグリーン関数、(ii)無限厚板問題のグリーン関数、(iii)剛体床上弾性層問題のグリーン関数を含んでいる。

(3) 上記(1)のグリーン関数を求めるため、弾性半無限体床上弾性層のねじり物体力問題の一般解法を示した。

(4) 示されたグリーン関数を応用して、弾性半無限体床上弾性層の表面に半球状剛体介在物が存在し、その介在物がねじりを受ける問題を考慮した。

文 献

- (1) Kelvin, L. and Tait, P. G., *Natural Philosophy*, Part II, (1895), 279, Cambridge Univ. Press.
- (2) Mindlin, R. D., *Physics*, 7 (1936), 195.
- (3) 木須・ほか2名, 機論, 52-480, A (1986), 1864.
- (4) 結城・ほか3名, 機論, 53-492, A (1987), 1581.
- (5) Dunders, J. and Hetenyi, M., *J. Appl. Mech.*, 32 (1965), 671.
- (6) 長谷川, 機論, 46-407, A (1980), 805.
- (7) 長谷川・栗山, 機論, 49-443, A (1983), 838.
- (8) 長谷川, 機論, 50-449, A (1984), 58.
- (9) 長谷川, 機論, 47-417, A (1981), 540.
- (10) 長谷川, 機論, 49-444, A (1983), 986.
- (11) Chan, K. S., ほか2名, *Int. J. Solids Struct.*, 10 (1974), 1179.
- (12) 長谷川, 機論, 42-335 (1976), 716.
- (13) 長谷川, 機論, 45-394, A (1979), 683.
- (14) Erdelyi, A., ほか2名, *Tables of Integral Transforms*, 1, 2 (1954), McGraw-Hill.

付表1 応力 $(\tau_{z\theta}/\mu_1\omega)_{z=H}$ の値

r/c	Present	Exact
0.5	0.22768399	0.227683991
1.0	0.23632197	0.236321977
1.5	0.15713483	0.157134840
2.0	0.092159988	0.092160000
2.5	0.053407856	0.053407863
3.0	0.031801851	0.031801855
3.5	0.019672542	0.019672545
4.0	0.012650721	0.012650722

(付1) 長谷川, 二層弾性体のねじり問題の基本解と境界要素法へのその応用, 境界要素法論文集, 5(1988), 45.

考察中であり、適当な機会に報告したいと思っているので、また、ごらんいただければ幸いである。なお、異種材料接着体（二層弾性無限体）の場合の基本解はすでに報告(付1)してある。

(2) 本論文では、式(20)、(21)の無限級数は10項までで打ち切って計算した。しかし、問題によっては、また ξ, r, z, a, h, H などの値によっては心配が残るので、30～50項くらいまでとったほうが安全と思われる。

(3) 付表1と付表2は、 $C/H=1.5, \xi=\mu_1/\mu_2=1.0$ のときに、図5と6の応力の値に対する本結果(Present)と厳密解(Exact)を比較したものである。本結果(Present)は $N=50, \varepsilon/c=0.1$ として計算し、有

付表2 応力 $(\tau_{\theta\theta}/\mu_1\omega)_{R=c}$ の値

α	Present	Exact
10	0.5209445	0.52094453
20	1.026060	1.0260604
30	1.500000	1.5000000
40	1.928363	1.9283628
50	2.298133	2.2981333
60	2.598076	2.5980762
70	2.819080	2.8190778
80	2.954437	2.9544233
90	2.999704	3.0000000

効数字8けためを四捨五入して表したものである。厳密解と極めてよく一致していることがわかる。