き裂を有する平板の熱衝撃*

松永泰弘^{*1}, 入交 裕^{*1}, 野田直剛^{*2}

Thermal Shock Problem of a Circular Cylinder with a Crack

Yasuhiro MATSUNAGA, Hiroshi NYUKO, and Naotake NODA

This paper deals with the thermal shock problem of a flat plate with an edge crack, initially at uniform temperature, being suddenly cooled on the plate surfaces. It is assumed that the thermal disturbance near the crack surface may be neglected in the analysis of the temperature field of the elastic solid with a crack, because thermal shock occurs rapidly. We analyzed the transient thermal stress problem of a flat plate with a crack and determined the stress intensity factor at the crack tip. The nondimensional maximum transient stress intensity factor is expressed as a function of Biot's number and the nondimensional crack length. We then proposed a simplified formulation of the nondimensional maximum transient stress intensity factor as a function of Biot's number and the nondimensional crack length.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Stress Intensity Factor, Thermoelasticity, Thermal Shock, Flat Plate, Edge Crack, Unsteady-State

緒 言

き裂を有する物体において、き裂近傍の応力場とともに応力拡大係数を明らかにすることは、構造物の破壊を推定するうえで重要である。そのため、き裂を有する物体の熱応力問題は数多く報告されているが、大多数は定常熱応力に関してである。非定常熱応力については、例えば、著者らによるき裂を有する無限体の非定常熱応力などが報告されている^{(1)~(3)}。しかし、き裂の非定常熱応力問題の中でも急激な温度変化を伴う熱衝撃に関する研究はほとんど報告されていない。Nied は片側表面が断熱されたき裂を有する平板の熱衝撃問題について解析を行い、応力拡大係数の時間変化を各ビオ数、き裂長さに対して示している⁽⁴⁾⁽⁵⁾。しかし、非定常状態にみられる最大応力拡大係数とビオ数およびき裂長さの明白な関係式は明らかにされていない。そこで著者らは先にき裂を有する円柱の熱衝撃について解析し、それらの関係式の提示を行った⁽⁶⁾。本研究では、き裂を有する平板が両表面もしくは片側表

面で急冷される熱衝撃問題について解析し、かつ数値計算を実行し、無次元最大応力拡大係数とビオ数および無次元き裂長さの関係を表す簡単な式表示の提示を行った。

2. 解 析

2.1 温度分布 図1に示すように、長さ a の直線き裂を有する厚さ L の平板において、初期温度が T_0 でき裂先端からそれぞれ a , b の距離にある平板表面から温度 T_a , T_b ($< T_0$) の媒質へ熱放散があり、かつ急激に冷却される場合の非定常熱伝導問題について考える。ただし、熱衝撃を生じる短時間内にき裂によ

図1 き裂を有する平板

* 昭和63年8月26日 東北支部米沢地方講演会において講演, 原稿受付 昭和63年12月28日.

^{*1} 正員, 阿南工業高等専門学校 (〒774 阿南市見能林町青木265).

^{*2} 正員, 静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北3-5-1).

る温度場のじょう乱は無視できるものと仮定できる。

熱伝導の基礎方程式は

$$T_{,xx} = T_{,t}/\alpha \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 T は温度、 t は時間、 α は熱拡散率、コンマは添字変数による微分を表す。

初期条件、境界条件は

$$t=0 \text{ で } T=T_0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$x=L \text{ で } T_{,x} = -h_a(T-T_a) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$x=0 \text{ で } T_{,x} = h_b(T-T_b) \quad \dots\dots\dots (4)$$

で与えられるとする。ただし、 h_a 、 h_b は相対熱伝達率である。式(2)～(4)を満足する式(1)の温度解 T は

$$T = \frac{h_a(1+h_bx)}{h_a+h_b+h_a h_b L} (T_a - T_b) + T_b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos g_n x + \frac{h_b}{g_n} \sin g_n x) e^{-\kappa g_n^2 t} \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。ただし、

$$A_n = A_{n1}(T_0 - T_b) + A_{n2}(T_a - T_b) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$A_{n1} = \frac{4g_n(g_n \sin g_n L - h_b \cos g_n L + h_b)}{2g_n L(g_n^2 + h_b^2) + (g_n^2 - h_b^2) \sin 2g_n L + 2g_n h_b(1 - \cos 2g_n L)}$$

$$A_{n2} = -\frac{h_a}{h_a + h_b + h_a h_b L} \frac{4[(g_n^2(1 + h_b L) + h_b^2) \sin g_n L - g_n h_b^2 L \cos g_n L]}{2g_n L(g_n^2 + h_b^2) + (g_n^2 - h_b^2) \sin 2g_n L + 2g_n h_b(1 - \cos 2g_n L)}$$

また、 g_n は方程式(7)の第 n 番めの正根である。

$$\tan g_n L = g_n(h_a + h_b)/(g_n^2 - h_a h_b) \quad \dots\dots\dots (7)$$

2・2 熱応力 き裂形状は z 軸方向に一樣とし、き裂を有する平板を平面ひずみの熱応力問題として解析する。平板表面およびき裂表面に外力が作用しないとき、境界条件は次式で与えられる。

$$x=0, L \text{ で } \sigma_{xx} = 0, \sigma_{xy} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$y=0 \text{ で } \sigma_{yy} = 0, \sigma_{xy} = 0 \quad (b < x \leq L) \quad \dots\dots\dots (9)$$

き裂を有する平板の非定常熱応力 σ_{ij} を次の手順で解析する。最初に、き裂のない平板の非定常熱応力 σ_{ij1} を求める。次に、境界条件(9)を満足するように、き裂表面に σ_{ij1} と大きさが等しく逆向きの外力が作用するき裂を有する平板の等温弾性問題を解析し、応力 σ_{ij2} を求め、二つの応力を次式により重ね合わせることで、き裂を有する平板の非定常熱応力を得る。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij1} + \sigma_{ij2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

き裂のない平板の熱応力問題において、境界条件(8)を満足する応力成分 σ_{yy1} 、 σ_{zz1} は、式(5)で与えられる温度分布 T に対して次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_{yy1} = \sigma_{zz1} &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[-\tau + \frac{1}{L} \int_0^L \tau dx + \frac{12}{L^3} \left(x - \frac{L}{2} \right) \int_0^L \left(x - \frac{L}{2} \right) \tau dx \right] \\ &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa g_n^2 t} \left\{ -\left(\cos g_n x + \frac{h_b}{g_n} \sin g_n x \right) + \frac{1}{g_n L} \left(\sin g_n L - \frac{h_b}{g_n} \cos g_n L + \frac{h_b}{g_n} \right) \right\} \right. \\ &\quad + \frac{1}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa g_n^2 t} \left\{ \frac{6}{g_n L} \left(\sin g_n L - \frac{h_b}{g_n} \cos g_n L - \frac{h_b}{g_n} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{12}{g_n^2 L^2} \left(\frac{h_b}{g_n} \sin g_n L + \cos g_n L - 1 \right) \right\} \right] \equiv f(x) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $\tau = T - T_0$ 、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比、 α は線膨張係数である。

次に、き裂表面の境界条件(9)と式(11)を考慮し、き裂表面に $-f(x)$ の垂直応力が作用する等温弾性問題を解析する。この場合、境界条件は次式で与えられる。

$$x=0, L \text{ で } \sigma_{xx2} = 0, \sigma_{xy2} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$y=0 \text{ で } \sigma_{yy2} = -f(x), \sigma_{xy2} = 0 \quad (b < x \leq L) \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(12)、(13)の境界条件を満足する平板の応力拡大係数は、重み関数 $M(s)$ を用い無次元化された形 $\widehat{K}_I$ で次式により与えられる⁽⁷⁾。

$$\widehat{K}_I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 M(s) \bar{f}(s) ds \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \widehat{K}_I &= \frac{1-\nu}{\alpha E (T_0 - T_a) \sqrt{a}} K_I \\ K_I &= \lim_{x \rightarrow b-} \sqrt{2\pi(b-x)} (\sigma_{yy})_{y=0} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\bar{f}(s) = \frac{1-\nu}{\alpha E(T_0 - T_a)} f(as+b)$$

重み関数 $M(s)$ は無次元き裂長さ $\gamma = a/L$ が $0 \leq \gamma \leq 0.5$ の範囲に対して次式で与えられる。

$$M(s) = s^{-1/2}(1 + m_1 s + m_2 s^2)$$

$$m_1 = 0.6147 + 17.1844\gamma^2 + 8.7822\gamma^6$$

$$m_2 = 0.2502 + 3.2889\gamma^2 + 70.0444\gamma^6$$

3. 数値計算結果

数値計算にあたり、平板の厚さ L を代表長さにとり、次式の無次元量を導入する。

$$t' = \alpha t / L^2, B_{ia} = Lh_a, B_{ib} = Lh_b$$

ここで、 t' はフーリエ数、 B_{ia} 、 B_{ib} はビオ数である。

表 1 式(16)における各無次元き裂長さ γ に対する係数 a_1 、 b_1 の値 ($T_a = T_b$ の場合)

γ	a_1	b_1
0.	3.26	0.72
0.001	3.27	0.72
0.01	3.37	0.76
0.1	4.58	1.11
0.2	6.37	1.61
0.3	9.00	2.30
0.4	13.40	3.43
0.5	21.87	5.30

表 2 式(17)における各ビオ数 B_i に対する係数 a_2 、 b_2 の値 ($T_a = T_b$ の場合)

B_i	a_2	b_2
10^{-1}	-3.56	-3.43
10^0	-3.57	-1.38
10^1	-3.75	-0.06
10^2	-3.84	0.29
10^3	-3.84	0.33

図 2 無次元応力拡大係数 $\widehat{K}_I$ の時間変化 ($T_a = T_b$ の場合)

図 3 各無次元き裂長さ γ に対する無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ とビオ数 B_i の関係 ($T_a = T_b$ の場合)

ただし、応力拡大係数の無次元化は式(15)に示すようにき裂長さ a を代表長さにとった。

熱的条件は、両表面での媒質の温度が次式で表される二つの場合について行った。

$$(I) \quad T_a = T_b$$

$$(II) \quad T_b = T_0$$

また、(I)、(II)の両方において $B_{ia} = B_{ib} \equiv B_i$ とした。

図 2 に (I) の場合の無次元応力拡大係数 $\widehat{K}_I$ の時間変化を示す。無次元応力拡大係数は、ビオ数が大きく、また無次元き裂長さが小さいほど短時間で最大値を示しており、その値も大きくなっている。ビオ数が大きいほど温度の時間変化が大きくなるため、早い時間で最大値を示す。また、ビオ数が大きいほど板厚方向の温度分布が急こう配になるため、無次元応力拡大係数の値は大きくなる。無次元き裂長さについては、平板表面に近づくほど早い時間で熱衝撃を生じるため、無次元き裂長さの小さいほど、すなわち、き裂先端が平板表面に近いほど無次元最大拡大係数は早い時間に生じる。

図 2 より各ビオ数および無次元き裂長さに対する無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ の値を求め、各無次元き

図 4 各無次元き裂長さ γ に対する無次元最大応力拡大係数の逆数 $1/\widehat{K}_{I\max}$ とビオ数の逆数 $1/B_i$ の関係 ($T_a = T_b$ の場合)

図 5 各ビオ数 B_i に対する無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ と無次元き裂長さ γ の関係 ($T_a = T_b$ の場合)

図 6 式(16)における係数 a_1 , b_1 と無次元き裂長さ γ の関係 ($T_a = T_b$ の場合)

き裂長さ γ に対する無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ とピオ数 B_i の関係を図 3 に示す。無次元最大応力係数はピオ数の増加とともに増加していることがわかる。

同様に、各無次元き裂長さ γ に対する無次元最大応力拡大係数の逆数 $1/\widehat{K}_{I\max}$ とピオ数の逆数 $1/B_i$ の関係を図 4 に示す。 $0 < 1/B_i < 0.1$ の範囲を除けばほぼ直線関係にあり、次の近似式で与えられる。

$$\frac{1}{\widehat{K}_{I\max}} = a_1 \frac{1}{B_i} + b_1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

各無次元き裂長さ γ に対する a_1 , b_1 の値を表 1 に示す。

図 5 に各ピオ数 B_i に関する無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ と無次元き裂長さ γ の関係を示す。 $\ln \widehat{K}_{I\max}$ と無次元き裂長さ γ が $B_i > 10$ の範囲を除けばほぼ直線関係にあり、次の近似式で与えられる。

$$\ln \widehat{K}_{I\max} = a_2 \gamma + b_2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

各ピオ数 B_i に対する a_2 , b_2 の値を表 2 に示す。

無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ とピオ数 B_i , 無次元き裂長さ γ の関係式(16), (17)を考慮して、式(16)における係数 a_1 , b_1 と無次元き裂長さ γ の関係を図 6 に示す。 $\ln a_1$ および $\ln b_1$ と無次元き裂長さ γ はほぼ直線関係にあり、次の近似式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \ln a_1 &= 3.510\gamma + 1.167 \\ \ln b_1 &= 3.854\gamma - 0.308 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ とピオ数 B_i の関係式(16)および式(16)中の係数 a_1 , b_1 と無次元き裂長さ γ の関係式(18)より、(I) $T_a = T_b$ の場合に対して無次元最大応力拡大係数とピオ数および無次元き裂長さの関係式として次の近似式を得る。

$$\frac{1}{\widehat{K}_{I\max}} = \frac{3.04}{B_i} e^{3.67\gamma + 0.76e^{3.7\gamma}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ の近似式(19)の誤差(%)を表 3 に示す。近似式(19)は、 $10^{-1} \leq B_i \leq 10^1$ の範囲で最大 5 % の誤差しか持たないが、 $10^2 \leq B_i \leq 10^3$ の範囲では最大 30 % の誤差となる。これは図 4, 5 から

表 3 無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ の近似式(19)の誤差(%) ($T_a = T_b$ の場合)

$\gamma \backslash B_i$	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
0.	- 0.3	- 4.6	1.7	20.5	29.7
0.1	0.5	- 4.3	- 2.0	4.5	5.7
0.2	2.4	- 1.7	- 1.2	2.2	2.5
0.3	4.5	- 0.4	0.0	2.2	2.6
0.4	0.1	- 4.1	- 3.2	- 0.6	- 0.2

表 4 無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ の近似式(20)の誤差(%) ($T_a = T_b$ の場合)

$\gamma \backslash B_i$	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
0.	- 0.3	- 4.6	- 2.8	- 3.1	3.5
0.1	0.5	- 4.3	- 2.0	4.5	- 1.3
0.2	2.4	- 1.7	- 1.2	2.2	0.8
0.3	4.5	- 0.4	0.0	2.2	2.1
0.4	0.1	- 4.1	- 3.2	- 0.6	- 0.3

表 5 無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ の近似式(21)の誤差(%) ($T_a = T_b$ の場合)

$\gamma \backslash B_i$	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
0.	3.5	- 0.4	0.5	- 0.7	3.7
0.1	1.7	- 2.9	- 4.8	1.2	2.4
0.2	2.9	- 2.8	- 4.2	- 1.6	- 1.2
0.3	3.9	- 2.2	- 2.6	0.1	0.2
0.4	4.9	- 5.0	- 4.4	- 1.6	- 1.1

明らかのように、無次元最大応力拡大係数とピオ数、無次元き裂長さの関係が $10^2 \leq B_i \leq 10^3$ の範囲で直線近似からはずれるためである。そこで、 $10^2 \leq B_i \leq 10^3$ の範囲で誤差をなくするために、近似式(19)に補正項を加え、より広範囲の B_i の値に対して誤差が少ない近似式として、(I) $T_a = T_b$ の場合に次式を得る。

$$\frac{1}{\widehat{K}_{I\max}} = \frac{3.04}{B_i} e^{3.67\gamma + 0.76e^{3.7\gamma} - 0.21e^{-(15+10^4\gamma)/B_i}} \quad \dots\dots\dots (20)$$

無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ の近似式(20)の誤差(%)を表 4 に示す。 $10^{-1} \leq B_i \leq 10^3$, $0 \leq \gamma \leq 0.5$ の範囲において近似式(20)の誤差は 5 % におさえられる。

同様に、(II) $T_b = T_0$ の場合に対して無次元最大応力拡大係数の近似式として次式を得る。

$$\frac{1}{\widehat{K}_{I\max}} = \frac{5.07}{B_i} e^{4.37\gamma + 0.84e^{5.97\gamma} - 0.28e^{-(30+10^5\gamma)/B_i}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

無次元最大応力拡大係数 $\widehat{K}_{I\max}$ の近似式(21)の誤差(%)を表 5 に示す。 $10^{-1} \leq B_i \leq 10^3$, $0 \leq \gamma \leq 0.5$ の範囲において近似式(21)の誤差は 5 % におさえられる。

4. 結 論

刃状き裂を有する平板の熱衝撃について解析し、かつ数値計算を実行し、次の結論を得た。

(1) き裂を有する平板の熱衝撃において、無次元

最大応力拡大係数とピオ数および無次元き裂長さの関係を表す簡単な式表示を、各境界条件に対して式(20)および(21)の形で提示した。

(2) 式(20)および(21)の誤差はそれぞれ表4, 5に示される範囲におさまられた。

- (2) 野田・ほか2名, 機論, 52-473, A(1986), 174.
- (3) 松永・ほか2名, 機論, 53-496, A(1987), 2307.
- (4) Nied, H. F., *J. Thermal Stresses*, 6(1983), 217.
- (5) Nied, H. F., *Eng. Fract. Mech.*, 26-2(1987), 239.
- (6) 松永・ほか2名, 機論, 55-511, B(1989), 504.
- (7) Bueckner, H. F., *ZAMM*, 51(1971), 97.

文 献

- (1) 野田・松永, 機論, 52-475, A(1986), 625.
-