高階層極性物質の連続体力学*

(第2報, 力学的釣合い方程式およびバイモーメントの概念の拡張)

志 澤 一 之^{*1}, 高 橋 邦 弘^{*1}Continuum Mechanics for Higher Stage Micropolar Materials
(2nd Report, Mechanical Balance Laws and Extended Concept of Bimoment)

Kazuyuki SHIZAWA and Kunihiro TAKAHASHI

Mechanical balance laws for micropolar materials stage-2 are discussed on the basis of results of the previous report. The balance equations for mass, force and moment in stage-2 are derived by averaging the balance laws of stage-zero up to stage-2. It is indicated that one more balance law has to be considered, which is those of second-order moment, in order to let the balance equation system be a complete set. The missing equation is given as the average of the balance equation for the above second-order moment of stage-zero. The authors define a new internal force characterizing the materials of stage-2 and name it "bicouple stress". This is a second order moment due to the geometric mechanism of multimicrostructures of higher-stage micropolar materials. Furthermore, it is discussed that the bicouple stress extends the concept of bimoment in the theory of thin-walled structures to three-dimensional ones.

Key Words: Continuum Mechanics, Higherstage, Polar Material, Balance Laws, Internal Rotation, Microtorsional Rotation, Second-order Moment of Force, Bimoment

1. 緒 言

複雑な多重内部構造を有する固体あるいは流体を連続体として扱うために, 前報⁽⁷⁾では高階層極性物質の概念を提案した. この概念に基づく一般化連続体力学を構築するにあたり, 第1報⁽⁸⁾では階層2の micropolar 物質の運動学について定式化を行った. 本報はその直接的な続報であり, 第1報で得られた結果を用いて, 階層2の micropolar 物質に対する力学的釣合い方程式を導出することを目的とする.

そこで, まず階層零において成立する質量, 力および力のモーメントの釣合い方程式を基礎として, それを階層1, さらに階層2への平均化する. 階層2の極性物質を対象とする場合, 釣合い方程式系を閉じた系にするためには, さらに力の2次モーメントの釣合いを考慮する必要があることを指摘し, その釣合い式を, 階層零における運動方程式の2次モーメントをとり, 積分平均することによって得る. このとき, 階層2の物質を特徴づける新たな内力が生じる. これは多重階層にまたがる物質の幾何学的機構に起因する力の2次

モーメントであり, それを「双偶応力」と名づける. さらにこの双偶応力は, 薄肉構造理論におけるバイモーメントの概念を拡張した量であることを述べる. あわせて, ここで現れるいくつかの高次慣性モーメントが満たすべき方程式についても言及する.

なお本報で用いる記号のうち, 第1報と共通するのは, 第1報におけるその定義および規約に従うものとする. また, 第1報の式(n)を引用する場合, それを式(1-n)と記すことにする.

2. 階層零における釣合い方程式

第1巨視的体積要素 dv' 内の各点 x''^i で成立する質量保存則, 力および力のモーメントの釣合いを表す方程式は, よく知られているようにそれぞれ以下のように記述できる.

$$\frac{d}{dt} \int_v \int_{dv} \int_{dv'} \rho'' dv'' = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_v \int_{dv} \int_{dv'} \rho'' v''^i dv'' \\ &= \int_a \int_{da} \int_{da'} t^{(n)''i} da'' \\ &+ \int_v \int_{dv} \int_{dv'} \rho'' f''^i dv'' \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

* 平成元年7月14日 東海支部岐阜地方講演会において講演, 原稿受付 昭和63年7月22日.

^{*1} 正員, 慶應義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1).

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_v \int_{dv} \int_{dv'} \varepsilon_{ijk} x''^j \rho'' v''^k dv'' \\ &= \int_a \int_{da} \int_{da'} \varepsilon_{ijk} x''^j t^{(n)''k} da'' \\ &+ \int_v \int_{dv} \int_{dv'} \varepsilon_{ijk} x''^j \rho'' f''^k dv'' \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここで $t^{(n)''i}$ は閉曲面 da'' に働く応力ベクトル, f''^i は微視的体積要素 dv'' に働く単位質量当たりの体積力である。

3. 階層1における釣合い方程式

式(1)~(3)を要素 dv' および da' にわたって積分平均すれば, 基準巨視的体積要素 dv 内で成立する力学的釣合い方程式が以下のように得られる。この結果は, 従来の階層1の極性体に対するもの⁽¹⁾⁽⁴⁾と一致するので, 誘導の詳細は省略し, 結果のみを記す。

$$\frac{d}{dt} \int_v \int_{dv} \rho' dv' = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_v \int_{dv} \rho' v'^i dv' \\ &= \int_a \int_{da} t^{(n)''i} da' + \int_v \int_{dv} \rho' f'^i dv' \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_v \int_{dv} \rho' (\varepsilon_{ijk} x'^j v'^k + \alpha'_i) dv' \\ &= \int_a \int_{da} (\varepsilon_{ijk} x'^j t^{(n)''k} + n^{(n)''i}) da' \\ &+ \int_v \int_{dv} \rho' (\varepsilon_{ijk} x'^j f'^k + c'_i) dv' \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

なお, ここで用いた平均量の定義は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \rho' \bar{j}''^i dv' &\equiv \int_{dv'} \rho'' \lambda^j \lambda^i dv'' \\ t^{(n)''i} da' &\equiv \int_{da'} t^{(n)''i} da'' \\ n^{(n)''i} da' &\equiv \int_{da'} \varepsilon_{ijk} \lambda^j t^{(n)''k} da'' \\ \rho' f'^i dv' &\equiv \int_{dv'} \rho'' f''^i dv'' \\ \rho' c'_i dv' &\equiv \int_{dv'} \varepsilon_{ijk} \lambda^j \rho'' f''^k dv'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ただし,

$$\alpha'_i \equiv j^j \mu'_j = \varepsilon_{ijk} \bar{j}''^j \mu''^k \dots\dots\dots (8)$$

である。式(7)₁, (8)より明らかなように j''^i は指標 i, j について対称である。ここで, j''^i は要素 dv' の慣性モーメント, $n^{(n)''i}$ は閉曲面 da' に働く偶応力ベクトル, c'_i は要素 dv' に働く単位質量当たりの体積偶力, また α'_i は要素 dv' の単位質量当たりのスピン角運動量ベクトルを表す。

式(4)~(6)の局所的表現は, Kafadar-Eringen⁽⁵⁾と同様にして以下になる。

$$v'^i;_i + \rho'/\rho' = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$t'^{ji};_j + \rho'(f'^i - \dot{v}^i) = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$n'^{ij};_j + \varepsilon_{ijk} t'^{jk} + \rho'(c'_i - \dot{\alpha}'_i) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} t'^{ji} N'_j &= t^{(n)''i} \\ n'^{ij} N'_j &= n^{(n)''i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} [t'^{ji}] N'_j &= 0 \\ [\varepsilon_{ijk} x'^j t'^{lk} + n'^{li}] N'_i &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

式(9)~(11)は, それぞれ dv 内で成り立つ連続の方程式, 運動方程式およびスピン角運動量方程式であり, 式(12)および式(13)は, それぞれ閉曲面 da 上および不連続面 da_a 上で成立する跳躍条件である。また, t'^{ij} および n'^{ij} はそれぞれ dv' に働く応力テンソルおよび偶応力テンソルである。なお式(13)における記号 $[]$ は, 不連続面 da_a に外側および内側から近づく da_a 上の量の差を意味し, N'_i は閉曲面 da の外向き単位法線ベクトルを表す。いずれの要素内においても, 本報を通じて記号 $[]$ は同様の意味をもつ。さらに, 慣性スピン $\dot{\alpha}'_i$ と慣性モーメント j''^i は次の方程式を満足する⁽¹⁾⁽²⁾。

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}'_i &= \varepsilon_{ijk} (\dot{\mu}'^h{}_i + \mu'^h{}_m \dot{\mu}'^m{}_i) \bar{j}''^j \\ &= j'^j \dot{\mu}'^j + j'^h{}_j \dot{\mu}'^j{}_h \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$j''^ij = \mu'^i{}_k j'^{kj} + \mu'^j{}_k j'^{ki} \dots\dots\dots (15)$$

4. 階層2における釣合い方程式

ここでは, dv 内で成立する釣合い方程式(4)~(6)をさらに積分平均して, 階層2の極性物質に対する力学的釣合い方程式を導出する。

4.1 質量保存則と力の釣合い 式(1-24)および式(1-31)を式(4)および式(5)に適用して, 要素 dv および da にわたって積分平均し, 式(1-28)を考慮すれば次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho dv = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho v^i dv = \int_a t^{(n)''i} da + \int_v \rho f^i dv \dots\dots\dots (17)$$

ただし平均量は,

$$\left. \begin{aligned} t^{(n)''i} da &\equiv \int_{da} t^{(n)''i} da' \equiv \int_{da} \int_{da'} t^{(n)''i} da'' \\ \rho f^i dv &\equiv \int_{dv} \rho' f'^i dv' \\ &\equiv \int_{dv} \int_{dv'} \rho'' f''^i dv'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

にて定義される。 $t^{(n)''i}$ は閉曲面 da に働く応力ベクトル, ρf^i は dv に働く体積力である。式(16), (17)に輸送定理(1-47)およびガウスの発散定理を適用し, 検査体積 v および検査面 a の任意性を考慮すれば, 式(16)および式(17)の局所的表現が, それぞれ

$$v^i;_i + \rho/\rho = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$t^{ji}{}_{,j} + \rho(f^i - \dot{v}^i) = 0 \quad (20)$$

$$t^{ji} N_j = t^{(n)i} \quad (21)$$

$$[t^{ji}] N_j = 0 \quad (22)$$

のように得られる。式(19), (20)はそれぞれ v 内における連続の方程式および運動方程式であり, 式(21), (22)はそれぞれ検査面 a 上および不連続面 a_d 上で成立する跳躍条件である。また, t^{ij} は階層2の応力テンソル, N_i は検査面 a の外向き単位法線ベクトルである。なお, 輸送定理(1-47)およびガウスの発散定理を適用し, さらに検査面と検査体積の任意性を考慮することによって, 釣合い方程式の局所的表現を得る一連の操作を, 以後本論文では略して釣合い方程式の“局所化操作”とよぶことにする。

4・2 力のモーメントの釣合い 式(1-11), (1-31)および式(8)を式(6)に代入し, 式(1-24), (1-28), (18)を考慮して式(6)を積分平均すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_v \rho(\varepsilon_{ijk} x^j v^k + \sigma_i + \alpha_i) dv \\ &= \int_a (\varepsilon_{ijk} x^j t^{(n)k} + m_i^{(n)} + n_i^{(n)}) da \\ &+ \int_{v'} \rho(\varepsilon_{ijk} x^j f^k + l_i + c_i) dv \quad (23) \end{aligned}$$

ここで,

$$\sigma_i \equiv i_{ij} v^j = \varepsilon_{ijk} \sigma^{jk} \equiv \varepsilon_{ijk} \bar{t}^{jl} v^k \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &\equiv j_{ij} \mu^j + k_{ij}^k \zeta^j = \varepsilon_{ijk} \alpha^{jk} \\ &= \varepsilon_{ijk} (\bar{j}^{jl} \mu^k + \bar{k}^{jlm} \zeta^k) \quad (25) \end{aligned}$$

である。また, 平均化の定義は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \rho \bar{t}^{jl} dv &\equiv \int_{dv} \rho' \xi^j \xi^l dv' \\ \rho \bar{j}^{jl} dv &\equiv \int_{dv} \rho' \bar{j}^{jl} dv' \\ &\equiv \int_{dv} \int_{dv'} \rho'' \lambda^j \lambda^l dv'' \\ \rho \bar{k}^{jlm} dv &\equiv \int_{dv} \rho' \bar{j}^{jl} \xi^m dv' \\ &\equiv \int_{dv} \int_{dv'} \rho'' \lambda^j \lambda^l \xi^m dv'' \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} m_i^{(n)} da &\equiv \int_{da} \varepsilon_{ijk} \xi^j t^{(n)k} da' \\ &\equiv \int_{da} \int_{da'} \varepsilon_{ijk} \xi^j t^{(n)k} da'' \\ n_i^{(n)} da &\equiv \int_{da} n_i^{(n)} da' \\ &\equiv \int_{da} \int_{da'} \varepsilon_{ijk} \lambda^j t^{(n)k} da'' \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho l_i dv &\equiv \int_{dv} \varepsilon_{ijk} \xi^j \rho' f^k dv' \\ &\equiv \int_{dv} \varepsilon_{ijk} \xi^j \rho'' f^k dv'' \\ \rho c_i dv &\equiv \int_{dv} \rho' c_i dv' \end{aligned} \right\}$$

$$\equiv \int_{dv} \int_{dv'} \varepsilon_{ijk} \lambda^j \rho'' f^k dv''$$

σ_i および α_i は, それぞれ要素 dv および dv' の単位質量当たりのスピン角運動量であり, i_{ij} および j_{ij} は, それぞれ要素 dv および dv' の単位質量当たりの慣性モーメントである。また, k_{ij}^k は3次の慣性モーメントである。さらに, $m_i^{(n)} + n_i^{(n)}$ は閉曲面 da に働く全偶応力ベクトルであり, $l_i + c_i$ は要素 dv に働く単位質量当たりの全体積偶力である。ただし, α_i, j_{ij}, c_i および n_i は dv 内および da 上の平均値である。なお, 式(24)~(26)より明らかなように, 慣性モーメント i_{ij}, j_{ij} および k_{ij}^k はいずれも指標 i, j について対称である。

式(23)に前述の局所化操作を施し式(20)を考慮すると, 系内の全角運動量方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} (m_i^{(n)} + n_i^{(n)})_{,i} + \varepsilon_{ijk} t^{jk} \\ + \rho(l_i + c_i - (\sigma_i + \alpha_i)_{,i}) = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

$$(m_i^{(n)} + n_i^{(n)}) N_j = m_i^{(n)} + n_i^{(n)} \quad (29)$$

$$[\varepsilon_{ijk} x^j t^{lk} + m_i^{(n)} + n_i^{(n)}] N_i = 0 \quad (30)$$

式(29)および式(30)はそれぞれ a 上および a_d 上で成り立つ跳躍条件である。また, $m_i^{(n)}$ および $n_i^{(n)}$ はそれぞれ要素 dv および dv' に働く階層2の偶応力テンソルを表す。式(28)は, 要素 dv および dv' のスピン角運動量方程式の和であり, 各々の方程式に分離することができる。ここでは, 要素 dv に対する角運動量方程式を誘導し, それを式(28)から差し引くことによって式(23)を分離する。

要素 dv' の重心 x'^i に働く平均力 $\rho' f'^i$ は, 距離 ξ^i の分だけ要素 dv に力のモーメント ρl_i を及ぼす(図1参照)。この力のモーメントの釣合い式は, 点 x'^i で成立する運動方程式(10)の1次モーメントをとり, v にわたって積分することによって次のように表される。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{dv} \rho' \varepsilon_{ijk} x'^j v'^k dv' \\ &= \int_{da} \int_{da'} \varepsilon_{ijk} x'^j t^{(n)k} da' \end{aligned}$$

図1 要素 dv に働く力のモーメント

$$+ \int_v \int_{dv} \varepsilon_{ijk} (x'^j \rho' f'^k - t'^{jk}) dv' \dots\dots\dots (31)$$

式(31)を得る過程で輸送定理と部分積分法が用いられている。

式(6)と式(31)を比較すると、式(31)右辺最後の項以外はすべて式(6)に含まれている。そこで、式(23)の誘導に用いた平均化法を式(31)に適用して積分平均し局所化操作を行えば、要素 dv のスピン角運動量方程式および跳躍条件が次のように得られる。

$$m_{i,j}^j + \varepsilon_{ijk} (t'^{jk} - s'^{jk}) + \rho (l_i - \dot{\sigma}_i) = 0 \dots\dots\dots (32)$$

$$m_{i,j}^j N_j = m_i^{(n)} \dots\dots\dots (33)$$

$$[\varepsilon_{ijk} x'^j t'^{ik} + m_i^j] N_j = 0 \dots\dots\dots (34)$$

ただし、 s'^{jk} は次式で定義される応力平均である。

$$s_{jk} dv \equiv \int_{dv} t'_{jk} dv' \dots\dots\dots (35)$$

式(32)は、階層1の micromorphic 極性体⁽³⁾に対する角運動量方程式に類似している。しかし、 s'^{jk} が非対称テンソルとなることが micromorphic 体と異なる。

式(28)、(29)および式(30)から、それぞれ式(32)、(33)および式(34)を差し引けば、 v 内で成立する要素 dv' のスピン角運動量方程式と a 上および a_a 上で成立する跳躍条件が、

$$n_{i,j}^j + \varepsilon_{ijk} s'^{jk} + \rho (c_i - \dot{d}_i) = 0 \dots\dots\dots (36)$$

$$n_{i,j}^j N_j = n_i^{(n)} \dots\dots\dots (37)$$

$$[n_i^j] N_j = 0 \dots\dots\dots (38)$$

のように得られる。したがって、 v 内における角運動量方程式は式(32)および式(36)となる。式(25)から明らかのように、 α_i は ξ_i を含んでいるから、式(36)は要素 dv' の回転運動およびねじれ回転運動を支配することがわかる。

4.3 力の2次モーメントの釣合い(バイモーメントの概念の拡張) ここまでで得た階層2の物質に対する釣合い方程式は式(19)、(20)、(32)および式(36)である。この方程式系は、諸内力の構成式が決定されたとしても、未知量の数に対して9個の方程式が不足している。この失われた方程式は ξ^i を支配する1個のテンソル方程式である。これは、力の2次モーメントを考えることによって得られる。

図2に示すように、要素 dv'' に作用する力 $\rho'' f''^i$ は距離 λ^i の分だけ要素 dv' に偶力 $\rho' c'^i$ を及ぼす。さらに、この力は距離 ξ^i の分だけ要素 dv に対の偶力 ρb^i を及ぼすと考えられる。この一对の偶力を「双偶力」と名づける。双偶力は、力の2次モーメントの次元をもち、薄肉構造理論におけるバイモーメントに相当する量である。薄肉理論との対応が明確になるように、いま面積力 $t^{(n)i}$ を例にとって説明することにする。

角速度に相当する ν^i , μ^i および ξ^i の反対称性を考慮すれば、力 $t^{(n)i}$ の2次モーメントは n 次モーメントの一般的な定義を用いることなく、 x'' に関する1次の外積とテンソル積として、 $x'' \times t^{(n)''} \otimes x''$ のように表現できる。これに式(1-18)を代入して生ずる量のうち、すでに得られている階層2の釣合い式によって消去されないものは、 $\lambda \times t^{(n)''} \otimes \lambda$, $\xi \times t^{(n)''} \otimes \xi$ および $\lambda \times t^{(n)''} \otimes \xi$ の3種類である。前の二つは、まさに力の2次モーメントであり、後者は拡張されたバイモーメントである。このことは、後者においてテンソル積を縮約して $(\xi \times \lambda) \cdot t^{(n)''}$ とすることによってさらに明らかになる。いま $\xi \times \lambda \equiv \omega$ とおけば、 ω はまさに薄肉構造理論における扇形面積(単位そり関数)⁽⁶⁾⁽⁹⁾の拡張となる。したがって、平均量 $\int_a \int_{da} \int_{da'} \lambda \times t^{(n)''} \otimes \xi da''$ は検査面 a に働くバイモーメントの拡張、すなわち双偶力であるといえる。さらに一般的な分類をすると、次のようになる。力の2次モーメントのうち、通常の2次モーメントに属するものは、 $g_1(\lambda)$, $g_2(\xi)$ をそれぞれ λ および ξ の幾何学的テンソル関数として $g_1(\lambda) \otimes t^{(n)}$, $g_2(\xi) \otimes t^{(n)}$ の形で表され、一方バイモーメントに属するものは、 $g_{12}(\lambda, \xi)$ を λ と ξ の幾何学的テンソル関数として $g_{12}(\lambda, \xi) \otimes t^{(n)}$ の形で表現されるものであるといえる。すなわち、前者は単一階層の中の幾何学的機構に依存する力の2次モーメントであり、後者は多重階層にまたがる幾何学的機構に依存する力の2次モーメントであるといえることができる。求めようとする不足分の方程式は、このような2種類の力の2次モーメントのいずれを用いても得られるが、ここでは薄肉理論との対応と数式のもつ物理的意味の明りようさから後者を採用する。上述のように、双偶力の釣合い式は dv' 内における運動方程式の λ と ξ に関する2次モーメントをとり2階層にわたって積分平均することによって得られる。しかし、これは dv 内における角運動量方程式の ξ に関する1次モーメントを1階層だけ積分平均することと全く等

図2 要素 dv に働く力の2次モーメント

価である。この等価性は後で示される。そこで、テンソル積にて式(11)の1次モーメントをとり、 v にわたって積分し、さらに輸送定理と部分積分を用いれば、双偶力の釣合い式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_v \int_{dv} \rho' \alpha_i x'^s dv' - \int_v \int_{dv} \rho' \alpha_i v'^s dv' \\ &= \int_a \int_{da} n_i^{(n)} x'^s da' + \int_v \int_{dv} (\varepsilon_{ijk} t'^{jk} x'^s - n_i^s \\ &+ \rho' c_i x'^s) dv' \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

式(39)に式(1-11), (1-31)および式(8)を代入し、先に示した平均量の定義を考慮して、式(39)を dv にわたって積分平均すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_v \rho \{ \alpha_i x^s + (k_{ij}^s \mu^j + h_{ij}^{ks} \zeta_k^j) \} dv \\ & - \int_v \rho \{ \alpha_i v^s + (k_{ij}^l \mu^j + h_{ij}^{kl} \zeta_k^j) v^s \} dv \\ &= \int_a (n_i^{(n)} x^s + \pi_i^{(n)s}) da \\ & + \int_v \{ (\varepsilon_{ijk} s^{jk} + \rho c_i) x^s - w_i^s + \rho b_i^s \} dv \\ & \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} h_i^{mnp} &\equiv g_{ls} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{klm} \bar{h}^{jsnp} \\ &= \bar{h}^{rsnp} g_{rs} \delta_i^m - \bar{h}_i^{mnp} \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

である。ここで g_{ij} は、 o 系の計量テンソルを表す。また、新たに定義した平均量は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \rho \bar{h}^{ijks} dv &\equiv \int_{dv} \rho' \bar{j}^{ij} \xi^k \xi^s dv' \\ &\equiv \int_{dv} \int_{dv'} \rho'' \lambda^i \lambda^j \xi^k \xi^s dv'' \\ \pi_i^{(n)s} da &\equiv \int_{da} n_i^{(n')} \xi^s da' \\ &\equiv \int_{da} \int_{da'} \varepsilon_{ijk} \lambda^j t^{(n)ik} \xi^s da'' \\ w_i^s dv &\equiv \int_{dv} (n_i^s - \varepsilon_{ijk} t'^{jk} \xi^s) dv' \\ \rho b_i^s dv &\equiv \int_{dv} \rho' c_i' \xi^s dv' \\ &\equiv \int_{dv} \int_{dv'} \varepsilon_{ijk} \lambda^j \rho'' f'^{ik} \xi^s dv'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

h_{ij}^{ks} は4次の慣性モーメント、 $\pi_i^{(n)s}$ は閉曲面 da に働く双偶応力テンソル、 w_i^s は偶応力平均および b_i^s は単位質量当たりの体積双偶力である。また式(42)2段目、4段目より、式(39)は階層零における運動方程式の λ^i と ξ^i に関する2次モーメントをとった場合に等価であることがわかる。なお、慣性モーメント h_{ijkl} は式(41), (42)に示すとおり指標 i, j および k, l についてそれぞれ対称である。

式(40)に局所化操作を施し、式(36)を適用すると階層2に特有な双角運動量方程式が次のように得られる。

$$\pi_i^{js} j + (n_i^s - w_i^s) + \rho (b_i^s - \dot{\tau}_i^s) = 0 \dots\dots\dots (43)$$

$$\pi_i^{js} N_j = \pi_i^{(n)s} \dots\dots\dots (44)$$

$$[n_i^s x^s + \pi_i^{js}] N_j = 0 \dots\dots\dots (45)$$

ただし、 $\dot{\tau}_i^s$ は次式で定義される単位質量当たりの慣性スピンである。

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_i^s &\equiv (k_{ij}^s \mu^j + h_{ij}^{ks} \zeta_k^j) \\ &- (k_{ij}^l \mu^j + h_{ij}^{kl} \zeta_k^j) v_i^s \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

双角運動量方程式(43)は、薄肉理論におけるパイモーメントの釣合い式〔文献(7)の式(47)〕に相当する。

また、式(44)および式(45)はそれぞれ検査面 a および不連続面 a_d 上で成立する跳躍条件であり、 π_i^{js} は v 内で定義される双偶応力テンソルである。

4.4 慣性スピンと慣性モーメント

ここでは、先に示した慣性スピン $\dot{\sigma}_i$, $\dot{\alpha}_i$, $\dot{\tau}_i$ の具体的な表現および慣性モーメント i^{ij} , j^{ij} , k^{ijk} , h^{ijkl} が満足すべき方程式を導出する。三つの慣性スピンは、いずれも加速度 a''^i の1次あるいは2次モーメントとして次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \rho \dot{\sigma}_i dv &\equiv \int_{dv} \int_{dv'} \varepsilon_{ijk} \rho'' \xi^j a''^k dv'' \\ \rho \dot{\alpha}_i dv &\equiv \int_{dv} \int_{dv'} \varepsilon_{ijk} \rho'' \lambda^j a''^k dv'' \\ \rho \dot{\tau}_i^s dv &\equiv \int_{dv} \int_{dv'} \varepsilon_{ijk} \rho'' \lambda^j a''^k \xi^s dv'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

式(1-39)を式(47)に代入し、式(1-28)およびすでに定義されている平均量を考慮すると式(47)は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_i &= \varepsilon_{ijk} \alpha^{(1)k} \bar{i}^{jl} \\ \dot{\alpha}_i &= \varepsilon_{ijk} (\alpha^{(2)k} \bar{j}^{jl} + \alpha^{(3)k} \bar{l}^{lm} + \alpha^{(4)k} \bar{m}^{lp} \bar{h}^{jlm}) \\ \dot{\tau}_i^s &= \varepsilon_{ijk} (\alpha^{(2)k} \bar{k}^{jls} + \alpha^{(3)k} \bar{l}^{lm} \bar{h}^{jlm} + \alpha^{(4)k} \bar{m}^{lp} \bar{g}^{jlm}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

のようになる。ここで g^{jlm} は次式にて定義する5次の慣性モーメントである。

$$\left. \begin{aligned} \rho \bar{g}^{jlm} dv &\equiv \int_{dv} \rho' \bar{j}^{jl} \xi^m \xi^p \xi^s dv' \\ &\equiv \int_{dv} \int_{dv'} \rho'' \lambda^j \lambda^l \xi^m \xi^p \xi^s dv'' \\ g_i^{mnpq} &\equiv g_{ls} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{klm} \bar{g}^{jsnpq} \\ &= \bar{g}^{rsnpq} \delta_i^m g_{rs} - \bar{g}_i^{mnpq} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

上式から明らかなように、 g^{ijklm} は指標 i, j および k, l, m について各々対称である。式(48)に式(1-41)を代入して、式(24), (25), (41), (49)2段目および慣性モーメントの対称性と角速度の反対称性〔式(1-37), (1-38)〕を考慮すると、慣性スピンの具体的な表現が次のように得られる。

$$\dot{\sigma}_i = i_{ij} v^j + \nu_{ik} i^k \nu^j \dots\dots\dots (50)$$

$$\dot{\alpha}_i = (j_{ij} \mu^j + \mu_{ik} j^k \mu^j) + (k_{ij}^k \xi^j + k_{ij}^k \zeta_j \nu^l_k)$$

$$+k_{jl}^m \zeta_{im}^l \mu^j + k_{jl}^m \zeta_{mj}^l \mu^i + \zeta_{ijp} h_j^{mp} \zeta_m^j) \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \dot{t}_i^s = & (k_{ij}^s \mu^j + \mu_{ij} k_j^s \mu^i) + (h_{ij}^{ks} \zeta_k^j + h_{ij}^{ks} \zeta_m^j \nu_m^k \\ & + h_{jl}^{ms} \zeta_{im}^l \mu^j + h_{jl}^{ms} \zeta_m^j \mu^i + \zeta_{ip} g_{jl}^{mp} \zeta_m^j) \end{aligned} \quad (52)$$

次に、慣性モーメントの満たすべき方程式について考える。 $\dot{i}^{ij}$ は式(15)と同様にして、

$$\dot{i}^{ij} = \nu_{kj}^i k^{kj} + \nu_{ki}^j k^{ki} \quad (53)$$

となる。一方、式(1-13)および輸送定理(1-47)を考慮して式(26)2段目、3段目と式(42)1段目の物質時間微分をとると、

$$\rho \dot{j}^{ij} dv \equiv \int_{dv} \rho' \dot{j}^{ij} dv'$$

$$\rho \dot{k}^{ijk} dv \equiv \int_{dv} \rho' (j^{ij} \chi^k) \cdot \Xi^k dv'$$

$$\rho \dot{h}^{ijkl} dv \equiv \int_{dv} \rho' (j^{ij} \chi^k \chi^l) \cdot \Xi^k \Xi^l dv'$$

となる。これらに式(1-33)2段目および式(15)を代入し、 dv にわたって積分平均して先に示した慣性モーメントの定義を用いると、 j^{ij} 、 k^{ijk} および h^{ijkl} の満たすべき方程式が以下のように導出される。

$$\dot{j}^{ij} = \mu_{kj}^i k^{kj} + \mu_{ki}^j k^{ki} + \zeta_{km}^i k^{ikm} + \zeta_{km}^j k^{ikm} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \dot{k}^{ijk} = & \mu_{tl}^i k^{lik} + \mu_{tl}^j k^{lik} + \zeta_{lm}^i h^{likm} \\ & + \zeta_{lm}^j h^{likm} + k^{ijl} \nu_l^k \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{h}^{ijkl} = & \mu_{mn}^i h^{mijl} + \mu_{mn}^j h^{mijl} + \zeta_{mn}^i g^{imjln} \\ & + \zeta_{mn}^j g^{imjln} + h^{ijml} \nu_m^k + h^{ijmk} \nu_m^l \quad (56) \end{aligned}$$

最後に、本論文において定義した各種の巨視的力がもつ物理的意味をさらに明確にするために、それらと図3に示すような薄肉部材に加わる力との対応関係について述べる。表面力 $t^{(n)i}$ は直接力 F に、偶応力 $m^{(n)i}$ は曲げモーメント M に、また双偶応力 $\pi^{(n)i}$ はバイモーメント B にそれぞれ対応している。

5. 結 言

前報で示した高階層極性物質の概念およびそれに基づく階層2のmicropolar物質の運動学を基礎として、本報では階層2のmicropolar物質に対する力学的釣合い方程式を導出した。同時に、薄肉構造理論におけるバイモーメントの概念を三次元の内力に拡張することを試み、以下の結論を得た。

(1) 階層2における連続の方程式および運動方程式は、階層零の量の直接平均によって表され、形式上なんの変更も受けない〔式(19)、(20)〕。

図3 薄肉部材に作用する力

(2) 階層2の角運動量方程式は、基準巨視的要素と第1巨視的要素のスピン角運動量の和として与えられ〔式(28)〕、各々の角運動量方程式に分離できる〔式(32)、(36)〕。これらは従来の階層1における角運動量方程式には現れない非対称応力平均を含む。

(3) 微視的要素に働く力は、基準巨視的要素に一对の偶応力をもたらす。この偶応力を「双偶応力」と名づける。双偶応力は、多重階層にまたがる物質の幾何学的機構に起因する力の2次モーメントであり、これは拡張されたバイモーメントである。

(4) 双偶力の釣合い式は、微視的要素に働く力の2次モーメントの釣合いを考えることによって得られ、その局所的表現として階層2に特有な双角運動量方程式が導出される〔式(43)〕。これは薄肉理論におけるバイモーメントの釣合い式に相当する。

なお、熱力学的釣合い方程式の導出ならびに本報で定義した諸内力の構成式の決定に関しては、次報以下の続報にゆだねる。

文 献

- (1) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S., *Int. J. Eng. Sci.*, 2 (1964), 189.
- (2) Eringen, A. C., 文献(1)の205ページ。
- (3) Eringen, A. C., *Mechanics of generalized continua*, (1968), 18, IUTAM Symp.
- (4) Eringen, A. C., *Continuum Physics*, 4 (1975), 12, Academic Press.
- (5) Kafadar, C. B., and Eringen, A. C., *Int. J. Eng. Sci.*, 9 (1971), 271.
- (6) 高橋・水野, 機論, 44-378 (1978), 460.
- (7) 高橋, 機論, 55-515, A (1989), 1519. No. 890-12, (1989), 62.
- (8) 本論文集 2356 ページ。
- (9) Vlasov, V. Z., (奥村・ほか5名訳), 薄肉弾性ばりの理論 (1967), 1章, 技報堂。

討 論

〔質問〕 井上達雄〔京都大学工学部〕

(1) 薄肉部材を例にとって、偶応力とここで定義された双偶応力の説明を適切に与えられたが、 $n > 2$ のときの考え方を示していただければ幸である。

(2) 次報でおそらく規定される構成式について、その基本的なものを簡潔にお示し下さるとありがたい。

〔回答〕 (1) まず階層3のMicropolar物質を例にとって考える。第1報の討論回答(2)で示した運動に依じて生ずる、階層3の物質に特有な高次偶応力 $\pi_{ij}^{(3)}$ は、

$$\pi_{ij}^{(3)} N_i da \equiv \int_{da_0} \int_{da_1} \int_{da_2} \xi^p \epsilon_{ipq} t^{mq} \xi^j \xi^k N_i da_3$$

のように定義できる。いま、本報で与えた階層2の双偶応力 $\pi_{ij}^{(2)}$ を第2階層偶応力、階層3の $\pi_{ij}^{(3)}$ を第3階層偶応力とよべば、第 n 階層偶応力 $\pi_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^{(n)}$ は階層2および階層3の結果から類推することにより、

$$\pi_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^{(n)} N_i da_0 \equiv \int_{da_0} \int_{da_1} \dots \int_{da_{n-1}} \xi^k \times \epsilon_{i_1 k i_2 \dots i_n} t^{(1-1)} \xi^{i_2} \xi^{(n-2)} i_3 \dots \xi^{i_n} N_j da_n$$

のように表される。したがって、いずれの階層においても高次偶応力はその階層の物質がもつ幾何学的多重内部機構に起因する高次モーメントであるといえる。

(2) 階層零で成立する熱力学の第1法則および第2法則をそれぞれ2階層にわたって積分平均し、それらに基づいて階層2の物質に対するClausius-Duhemの不等式を求めると次式を得る。

$$\rho \theta \dot{\eta} = t^{(ij)} d_{ij} + t^{(ij)} (\nu_{ij} - \omega_{ij}) + s^{(ij)} (\mu_{ij} - \nu_{ij})$$

$$+ w^{ij} \zeta_{ji} + n^{ij} (\mu_j : i - \zeta_{ji}) + m^{ij} \nu_j : i + \pi^{ijk} \zeta_{jk} : i + q^k \{\ln(1/\theta)\}, \quad k \geq 0$$

ここで $d_{ij} \equiv v(i:j)$, $\omega_{ij} \equiv v[i:j]q^i$ は熱流束密度, θ は絶対温度, η は単位質量当たりのエントロピー生成であり, (d) は内力の散逸部分を表す記号である。いま簡単のために構成式の散逸部分のみを考え、結合過程(付1)を仮定して線形理論の範囲で議論を進めることにする。そこで上記不等式を見ると、応力の引数は階層1の場合と同じであるから、その構成式も形式上階層1と同じになる。ここで特に興味深いのは双偶応力の構成式である。それは、最も一般的な6階の等方テンソル(付2)を用いることにより、次のように導出される。

$$\begin{aligned} \pi_{ijk}^{(d)} = & \sigma_1 (\zeta^l l : k g_{ij} + \zeta^l i : l g_{jk}) \\ & + \sigma_2 (\zeta_k^l : l g_{ij} + \zeta^l j : l g_{ik}) + \sigma_3 \zeta^l k : l g_{ij} \\ & + \sigma_4 \zeta^l i : l g_{jk} + \sigma_5 (\zeta^l j : l g_{jk} + \zeta^l l : j g_{ik}) \\ & + \sigma_6 \zeta_j^l : l g_{ik} + \sigma_7 \zeta_{jk} : i + \sigma_8 (\zeta_{ki} : j + \zeta_{ij} : k) \\ & + \sigma_9 \zeta_{kj} : i + \sigma_{10} \zeta_{ik} : j + \sigma_{11} \zeta_{ji} : k \end{aligned}$$

ここで $\sigma_1 \sim \sigma_{11}$ はスピン粘性係数に相当するものであり, g_{ij} は計量テンソルである。なお、詳細な議論およびその他の構成式については次報にゆだねることにする。

(付1) Ziegler, H., *An Introduction to Thermomechanics*, (1983), 261, North-Holland.

(付2) Suhubi, E. S. and Eringen, A. C., *Int. J. Eng. Sci.*, 2 (1964), 389.