応力増分依存性を考慮した弾塑性体構成方程式の一表現* (第2報, 線形比較体則と弾塑性円管座屈の解析)

伊藤 耿一^{*1}, 呉屋 守章^{*2}, 大津 清^{*3}

An Expression of Elastic-Plastic Constitutive Law Incorporating A Stress Increment Dependence (2nd Report, A Law of Linear-Comparison Solids and Analysis of Buckling of Elastic-Plastic Tube)

Koichi ITO, Moriaki GOYA, and Kiyoshi OHTSU

In the first report, a new expression of a constitutive law for elastic-plastic material was proposed using two transition parameters which are essential in describing the property of plastic materials. These parameters denote the magnitude and direction of plastic strain increments. In this report, sufficient conditions of linear comparison solids are discussed in terms of those transition parameters. The characteristic of buckling of an elastic-plastic tube simultaneously subjected to axial load and internal pressure is then analyzed using Hill's bifurcation theory.

Key Words: Plasticity, Constitutive Equation, Plastic Instability, Linear-Comparison Solids

1. 結 言

Prandtl-Reuss 則 (J_2 -流れ則) が合理的であるとして弾塑性等方材の変形解析に従来よく用いられてきたのに対し, 薄板構造物の座屈や板材成形時における局所くびれ等の塑性不安定問題については, Hencky の変形論の増分形のほうがより実験値に近い妥当な結果を与える。その原因に関連して構成式が見直され, 結局, 従来の塑性ポテンシャル理論においては塑性ひずみ増分と応力増分の間に 1 対 1 対応が欠如しており, それが上述の塑性不安定問題に対して非現実的な結果をもたらす主たる原因であることが著者の一人の一連の研究により明らかにされてきた⁽¹⁾⁽²⁾。

こうした中で, Christoffersen-Hutchinson⁽³⁾ や後藤⁽⁴⁾ は降伏曲面に角点(尖点)の存在を認め, 塑性ひずみ増分と応力増分の間に 1 対 1 対応のある応力増分依存性を考慮した構成式を独自に提唱してきた。それらは, いずれも物理的意味の必ずしも明らかでないある特定の遷移関数をその表現中に含んでいるが, 実際に

いくつかの数値計算にも用いられてきており, 滑らかな降伏曲面を前提とし塑性ポテンシャルと降伏曲面を同一視してきたこれまでの J_2 -流れ則とは異なる構成式群の存在を示すものである。

一方, 著者らは物理的意味を持つ遷移関数 $\mu(\alpha)$, $\beta(\alpha)$ を取り入れた塑性構成式の表現を第 1 報において発表し⁽⁵⁾, それらの遷移関数が塑性構成式における基本的なパラメータであることも示してきた。その表現は滑らかな塑性ポテンシャルの存在を前提とした上で, 塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性を導入したもので J_2 -流れ則から J_2 -角点則への自然な拡張を示すものである。そこで得られた表現が塑性構成式として有用であるかどうかは, 塑性不安定問題に対し実際に適用しうるものであることが示されねばならない。そこで, 本報においてはいくつかの基本的な問題への適用を通してその表現の有用性を確かめるものである。

2. 応力増分依存性を考慮した構成式に関する 呉屋・伊藤の表現の概略

第 1 報において提案した塑性構成式の表現は以下の通りである。 n を現応力点の位置する塑性ポテンシャル面上における単位の大きさを持つテンソルとし,

* 昭和 63 年 10 月 25 日 第 39 回塑性加工連合講演会において講演, 原稿受付 平成元年 3 月 16 日。

^{*1} 正員, 東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻青葉)。

^{*2} 正員, 琉球大学工学部 (〒903 沖縄県西原町千原 1 番地)。

^{*3} 正員, 米沢工業高等学校 (〒992 米沢市丸ノ内 1-2-68)。

$\alpha_{\max}$ を塑性負荷を生ずる偏差応力増分の最大振れ角とする。このとき、与えられたひずみ増分 $\dot{\epsilon}^p$ に対して、 $(n: \dot{\epsilon}')/(\sqrt{3/2}\dot{\epsilon}) > \cos \alpha_{\max}$ のとき塑性負荷となり次式が成立するものとし、

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}'}{2G^*} + \frac{(\sigma': \dot{\epsilon}')\sigma'}{S^*} \quad (1)$$

$$\dot{\epsilon}^v = \dot{p}/K$$

また、 $(n: \dot{\epsilon}')/(\sqrt{3/2}\dot{\epsilon}) \leq \cos \alpha_{\max}$ のとき除荷となり次式が成立するものとする。

$$\dot{\epsilon}' = \dot{\sigma}'/(2G), \quad \dot{\epsilon}^v = \dot{p}/K$$

ここに、

$\dot{\epsilon}^v$: 体積ひずみ, p : 静水圧応力

K : 体積弾性率, G : 横弾性係数

$$G^* \triangleq GH'/(H' + 3GK_D\mu)$$

$$S^* \triangleq 2\bar{\sigma}^2\{H'\cos\alpha/(3G)$$

$$+ \mu\cos\beta\}/(3K_F\mu)$$

$$K_F = \sin(\alpha - \beta)/\sin\alpha \quad (2\cdot a)$$

$$K_D = \sin\beta/\sin\alpha \quad (2\cdot b)$$

$$\alpha \triangleq \cos^{-1}(n: \dot{\sigma}'/||n||\dot{\sigma}') \quad (2\cdot c)$$

$$\beta \triangleq \cos^{-1}(n: \dot{\epsilon}^p/||n||\dot{\epsilon}^p) \quad (2\cdot d)$$

α, β は式(2・c), (2・d)で定義されるようにそれぞれ偏差応力増分およびひずみ増分の n の方向から振れ角と呼ぶ。 β は α に依存するとし、さらに無次元パラメータ $\mu(\alpha)^{(1)}$ を導入して $\bar{\sigma}$ と $\bar{\epsilon}^p$ の間に次の関係を仮定した。

$$\bar{\sigma} = H'\bar{\epsilon}^p/\mu(\alpha) \quad (3)$$

ここで、 H' は比例負荷における加工硬化係数に相当し、 $\mu(\alpha)$ は応力増分の振れ角 α に対する塑性ひずみ増分の大きさを定めるパラメータであるが、例えば Mises 形関数を塑性ポテンシャルとする従来の J_2 -流れ則の場合は $\cos(\alpha)$ に一致する。

3. 剛塑性体に対する角点則と線形比較体の関連

弾塑性体の平衡状態の安定性と唯一性の一般的取扱いについては Hill による一連の研究の中でその基礎理論は確立されてきた。Hill は非線形固体に対しては、これに代わる仮想固体、いわゆる線形比較体 (Linear-Comparison-Solid) を導入してその安定性や唯一性を議論することが、検定すべき汎関数の一価性を保証し都合の良いことを示した、線形比較体とは元の固体との間に次の条件を満足するものとして定められた。すなわち、元の非線形固体について応力増分振れ角 α をパラメータとして

$$\dot{\sigma} = C(\alpha)\dot{\epsilon} \quad (4)$$

また、線形比較体については除荷負荷を問わず定数係

数 C_L を用いて

$$\dot{\sigma}' = C^L\dot{\epsilon} \quad (5)$$

とすると、任意の $\Delta\dot{\epsilon}$ に対して

$$\Delta\dot{\sigma}': \Delta\dot{\epsilon} \geq \Delta\dot{\sigma}^L: \Delta\dot{\epsilon} \quad (6)$$

が成立することである。ここで Δ は任意の2組の対応する量の差を示す。さて、角点構成式に対し線形比較体の満足すべき条件(6)は μ, α, β を用いてどのように記述できるのか剛塑性体を例に以下考察を進めよう。

3.1 線形比較体と Hencky の変形論の増分則

角点則は剛塑性体に対し式(1), (3)より次式となる。

$$\dot{\epsilon} = K_D \frac{3\mu\dot{\sigma}'}{2H'} + K_F \frac{3\mu\bar{\sigma}\dot{\sigma}'}{2H'\bar{\sigma}} \quad (7)$$

さてそこで、比例負荷の場合は J_2 -流れ則と一致し、かつ定数係数則となるように式(1)における K_D, K_F を式(2・a), (2・b)と異なり次のように定める。

$$K_D = K_c/\mu(\alpha) \quad (8\cdot a)$$

$$K_F = (1 - K_c)\cos\alpha/\mu(\alpha) \quad (8\cdot b)$$

式(8)を式(7)に代入して K_c をパラメータとする次の定数係数則を得る。

$$\dot{\epsilon} = (3/2H')\{K_c\dot{\sigma}' + (1 - K_c)\dot{\sigma}'\bar{\sigma}/\bar{\sigma}\} \quad (9)$$

ただし、 K_c は定数で、 $0 \leq K_c \leq 1$ とする。または、定数係数則においては $\mu(\alpha) = \cos\alpha/\cos\beta^{(5)}$ となることに注意して式(9)を書き変えると次のようになる。

$$\dot{\sigma} = (2H'/3K_c)\{\dot{\epsilon} - 3(1 - K_c) \times (\sigma': \dot{\epsilon})\sigma'/(2\bar{\sigma}^2)\} \quad (10)$$

一方、Hencky の変形論増分則は割線係数 E_s を用いて

$$\dot{\epsilon} = (3/2H')\{(H'/E_s)\dot{\sigma}' + (1 - H'/E_s)\dot{\sigma}'\bar{\sigma}/\bar{\sigma}\} \quad (11)$$

と表現できたが式(9), (11)の係数比較より明らかに $K_c = H'/E_s$ となるとき定数係数則は変形論の増分則と一致することがわかる。

定数係数則の中で式(6)の条件を満足するものが、元の非線形固体に対する線形比較体となるのであるが、その際定数係数則について

$$I \triangleq \Delta\dot{\sigma}': \Delta\dot{\epsilon} \quad (12)$$

で定義される量を評価する必要があり、ここでその性質を調べておく。式(12)に式(10)を代入すると

$$\begin{aligned} I_L &= (2H'/3K_c)\{\Delta\dot{\epsilon} - 3(1 - K_c) \\ &\quad \times (\sigma': \Delta\dot{\epsilon})\sigma'/(2\bar{\sigma}^2)\}: \Delta\dot{\epsilon} \\ &= H'(\Delta\dot{\epsilon})^2\{3 - 2(1 - K_c)(\cos\theta_{nd\dot{\epsilon}})^2\} \\ &\quad / (3K_c) \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)中の右辺は K_c について単調増加となることは

容易に示すことができる。一方、 $0 \leq K_c \leq 1$ であったから I_L は $K_c=1$ のとき、すなわち塑性 Hooke 則 (Hooke 則における Young 率を接線係数で置き換えた塑性則をいう) のとき最小値をとることになり、最も安全な側の線形比較体を選択することになる。

3.2 角点構成式と線形比較体 次に、式(3)を満足するような塑性構成式に対する線形比較体としての条件について考察する。剛塑性体に対して、 $\dot{\epsilon}_2 \neq 0$ 、 $\dot{\epsilon}_1 \neq 0$ のとき、式(12)は

$$\begin{aligned} I &= \dot{\sigma}_2 : \dot{\epsilon}_2 + \dot{\sigma}_1 : \dot{\epsilon}_1 - \dot{\sigma}_1 : \dot{\epsilon}_2 - \dot{\sigma}_2 : \dot{\epsilon}_1 \\ &= H' \{ \cos(\alpha_2 - \beta_2) \bar{\epsilon}_2^2 / \mu(\alpha_2) \\ &\quad + \cos(\alpha_1 - \beta_1) \bar{\epsilon}_1^2 / \mu(\alpha_1) - \bar{\epsilon}_2 \bar{\epsilon}_1 \\ &\quad \times [\cos(\alpha_1 - \beta_2) / \mu(\alpha_1) + \cos(\alpha_2 - \beta_1) / \mu(\alpha_2)] \} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。一方定数係数則については $\mu^L(\alpha^L) = \cos \alpha^L / \cos \beta^{(5)}$ なる関係を用い、式(13)における I_L を式(14)と同様な式に書き変えて、

$$\begin{aligned} I_L &= H' \{ \cos(\alpha_2^L - \beta_2) \bar{\epsilon}_2^2 / \mu^L(\alpha_2^L) \\ &\quad + \cos(\alpha_1^L - \beta_1) \bar{\epsilon}_1^2 / \mu^L(\alpha_1^L) \\ &\quad - \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 [\cos(\alpha_1^L - \beta_2) / \mu^L(\alpha_1^L) \\ &\quad + \cos(\alpha_2^L - \beta_1) / \mu^L(\alpha_2^L)] \} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。したがって、線形比較体の条件式(6)は結局次の条件式に置き換えることができる。

$$I - I_L \geq 0 \quad (16 \cdot a)$$

または、

$$AR^2 + BR + C \geq 0 \quad (16 \cdot b)$$

ここで、

$$R \triangleq \bar{\epsilon}_2 / \bar{\epsilon}_1, \quad D \triangleq B^2 - 4AC$$

$$A \triangleq \cos(\alpha_2 - \beta_2) / \mu(\alpha_2)$$

$$- \cos(\alpha_2^L - \beta_2) / \mu^L(\alpha_2^L)$$

$$B \triangleq \cos(\alpha_1^L - \beta_2) / \mu^L(\alpha_1^L)$$

$$+ \cos(\alpha_2^L + \beta_1) / \mu^L(\alpha_2^L)$$

$$- \cos(\alpha_1 - \beta_2) / \mu(\alpha_1)$$

$$- \cos(\alpha_2 - \beta_1) / \mu(\alpha_2)$$

$$C \triangleq \cos(\alpha_1 - \beta_1) / \mu(\alpha_1)$$

$$- \cos(\alpha_1^L - \beta_1) / \mu^L(\alpha_1^L)$$

今、 R はその定義より正なる任意の値をとるので式(16・b)は次の条件と等価である。

$$A \geq 0, \quad C \geq 0 \text{ かつ } B \geq 0 \quad (17 \cdot a)$$

または、

$$A \geq 0, \quad C \geq 0 \text{ かつ } D \leq 0 \quad (17 \cdot b)$$

これらの条件を適用する際、定数係数則においては

$$\cos \beta = [1 + K_c^2 (\tan \alpha^L)^2]^{-1/2}$$

なる関係⁽⁵⁾を用いる。一方、塑性材については著者らは前報において新塑性構成式に対する遷移関数として多結晶モデルの数値結果を比較的良好に近似しかつ簡

単である次の関数形を選択した。

$$\mu(\alpha) = [\cos\{\pi\alpha/(2\alpha_{\max})\}]^{\xi} \quad (18)$$

$$\beta(\alpha) = \beta_{\max}(\alpha/\alpha_{\max}) \quad (19)$$

角点が生じたとして式(18)、(19)において $\alpha_{\max} > \pi/2$ また $\xi=1$ とし、条件(17)を満足するかを調べると、塑性 Hooke 則 ($K_c=1$) のみが線形比較体となることを解析的に示すことができる。そして、 $\alpha_{\max} = \pi/2$ とした場合の Levy-Mises 則の場合は $A=0$ 、 $C=0$ かつ $B=0$ となり $0 \leq K_c \leq 1$ の範囲のすべての K_c に対応する定数係数則を線形比較体とするので Levy-Mises 則はその意味から言うと特異な構成式となっていることになる。 μ 、 β を式(18)、(19)のように選択しかつ $\xi \geq 1$ の場合の線形比較体となり得る K_c についていくつかの例の様子を図1に示す。これは各 K_c の値について解析的に議論を進めるのが困難なので、各ひずみ増分の振れ角 β を 0 度と $\beta_{\max}$ の間で 50 分割し条件(17)を満足するかを数値的に調べたものである。図中の曲線は各 ξ に対して定まる K_c の最小値 K_{cmin} の値を連ねたものであり、与えられた一組の (ξ , $\alpha_{\max}$) の値に対してその曲線より得られる K_c の値が K_{cmin} となる。したがって、その K_{cmin} よりも大きな K_c を持つ定数係数則(9)が、式(18)、(19)を遷移関数とする非線形材料に対する線形比較体則となる。図1の結果が示すように K_{cmin} は、特に角点の成長が著しくない場合は ξ の値により大きく変化し得る。したがって、線形比較体が塑性不安定問題に適用される場合は $\alpha_{\max}$ の決定をはじめとして、 μ と β の選択に十分な注意を払う必要があることを示唆する。なお、同様なことが伊藤により完全負荷域角の選択を通して既に述べられている⁽²⁾。

なお図1の結果は、すべての (ξ , $\alpha_{\max}$) について線形比較体となるための K_c が定義できるわけではなく、

図1 ξ に対する K_c の変化

この値に限界があることを示している。このように $\alpha_{\max}$ を一定とした場合の $K_{\min}$ の限界最小値は、塑性ひずみ増分の最大振れ角 $\beta_{\max}$ に依存し、次式で与えられることを示すことができる《付録参照》。

$$K_{\min} \geq \beta_{\max} / \alpha_{\max} \quad \dots\dots\dots (20)$$

4. 軸圧縮と内圧を受ける弾塑性円管の座屈

内圧と軸圧縮力を受ける円管の細長比が小さく、また(直径)/(肉厚)の比が小さいときは、軸対称の座屈波形が生じる。これに関連する研究としては、宮川⁽⁶⁾、北川⁽⁷⁾、Galletly⁽⁸⁾や Fatnassi⁽⁹⁾によるものがあるが、現在分岐に関する解析的理論として正しいと思われる Hill の分岐理論を適用した例は見当たらないようである。図2に示すように変形前の半径 R_0 、肉厚 h_0 、軸長 L_0 の円管が内圧 p と軸圧縮力 P の作用下で一樣な変形を保ち、ある時刻 t において半径 R 、肉厚 h 、軸長 L になって平衡状態にあるものとする。この分岐直前の基本状態から δt 時間後の平衡状態が唯一に定まるかどうかを検討する。

今、円管の変形や材料に対し以下のような基本的な仮定をしておく。

- ① 円管は弾塑性体である。
- ② 比例負荷に対しては Mises 形相当応力と相当塑性ひずみ間に $\bar{\sigma} = \sigma^* \{f(\bar{\epsilon})\}^n$ なる加工硬化則が成立する。
- ③ Mises 形塑性ポテンシャルの存在を前提とし新塑性構成式に従うものとする。
- ④ 荷重の偏心や端末での摩擦は存在せず、円管の

図2 内圧と軸圧縮力を受ける弾塑性円管の座屈

両端とも自由端である。

⑤ 分岐変形に対し Kirchhoff-Love の仮説が適用できるとする。

こうした基本的仮定の基で比例負荷後の基本状態における円管の長さ、半径、肉厚は $\sigma_{rk} \triangleq |\sigma^*|$ および $K \triangleq \sigma_\theta / \sigma_x$ と定めるときそれぞれ次のように表せる。

$$L = L_0 \exp\{-\sigma_{rk}(1-\nu K)/E - (1-K)W\} \quad \dots\dots\dots (21\cdot a)$$

$$R = R_0 \exp\{-\sigma_{rk}(K-\nu)/E - (K-1/2)W\} \quad \dots\dots\dots (21\cdot b)$$

$$h = h_0 \exp\{-\nu\sigma_{rk}(1+K)/E + (1+K)W/2\} \quad \dots\dots\dots (21\cdot c)$$

ここに、 $W \triangleq (1-K+K^2)^{-(1-1/n)/2} (\sigma_{rk}/\sigma^*)^{1/n}$ さて線形比較体の分岐基準は直交デカルト座標系成分表示で次のように得られている⁽¹⁰⁾。

$$L(\Delta\dot{v}) = \int \Delta\dot{s}_{ij} \Delta\dot{v}_{ij} dV - \int p(\dot{v}_{k,j} n_k - \dot{v}_{k,k} n_j) \dot{v}_j dS_p > 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 $\dot{s}_{ij}$ は公称応力増分、 $\dot{v}_i$ は増分、 n_k は物体表面単位法線、 $\int(\quad) dV$ は体積積分、 $\int(\quad) dS_p$ は圧力 p の作用する表面に関する面積分である。今の円管の問題に適切な円管座標系成分表示に変換して書き変えると次のようになる。

$$L(\Delta\dot{v}) = \Sigma(\Delta\dot{v}) - H_L(\Delta\dot{v}) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Sigma(\Delta\dot{v}) \triangleq & \int [E_{xx}(\Delta\dot{\epsilon}_x)^2 + 2E_{x\theta}\Delta\dot{\epsilon}_x\Delta\dot{\epsilon}_\theta + E_{\theta\theta}(\Delta\dot{\epsilon}_\theta)^2 + \sigma_{rk}\{-\Delta\dot{\epsilon}_\theta\Delta\dot{\epsilon}_x + (\Delta\dot{\epsilon}_x)^2 - (\Delta\dot{v}_{x\theta})^2\} \\ & - \sigma_{\theta k}\{-\Delta\dot{\epsilon}_\theta\Delta\dot{\epsilon}_\theta + (\Delta\dot{\epsilon}_\theta)^2\}] dV + p \int [-\Delta\dot{\epsilon}_\theta\Delta\dot{\epsilon}_x + \Delta\dot{v}_{x,x}\Delta\dot{v}_x] dS_p \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$H_L(\Delta\dot{v}) \triangleq \int [H_{xx}(\Delta\dot{\epsilon}_x)^2 + 2H_{x\theta}\Delta\dot{\epsilon}_x\Delta\dot{\epsilon}_\theta + H_{\theta\theta}(\Delta\dot{\epsilon}_\theta)^2] dV \quad \dots\dots\dots (25)$$

として、分岐条件は

$$\delta\Sigma(\Delta\dot{v}) - \delta H_L(\Delta\dot{v}) = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

と書き変えることができる。上式の誘導の過程において線形比較体の構成式には次の関係が用いられた。

$$\dot{\sigma}_x = (E_{xx} - H_{xx})\dot{\epsilon}_x + (E_{x\theta} - H_{x\theta})\dot{\epsilon}_\theta, \quad \dot{\sigma}_\theta = (E_{\theta\theta} - H_{\theta\theta})\dot{\epsilon}_\theta + (E_{\theta x} - H_{\theta x})\dot{\epsilon}_x \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 E_{xx} &= E_{\theta\theta} \pm E/(1-\nu^2), \quad E_{x\theta} = E_{\theta x} \pm E\nu/(1-\nu^2) \\
 H_{xx} &\pm [EB_{EP} - (1-\nu^2)H'(H'/E + K_c + \lambda(1-K_c)(1/2-K)^2)]/(B_{EP}(1-\nu^2)) \\
 H_{x\theta} &= H_{\theta x} \pm [\nu EB_{EP} - (1-\nu^2)H'\{\nu H'/E + K_c/2 - \lambda(1-K_c)(K/2-1)(1/2-K)\}]/\{B_{EP}((-\nu_2))\} \\
 H_{\theta\theta} &\pm [EB_{EP} - (1-\nu_2)H'(H'/E + K_c + \lambda(1-K_c)(K-1/2)^2)]/(B_{EP}(1-\nu^2)) \\
 B_{EP} &\pm (1-\nu^2)(H'/E)^2 + (H'/E)[K_c(2-\nu) + \lambda(1-K_c)\{(1/2-K)^2 + (K/2-1)^2 + 2\nu(1/2-K) \\
 &\quad \times (K/2-1)\}] + [(3/4)K_c^2 + K_c(1-K_c)\{(1/2-K)^2 + (1/2K-1)^2 + (1/2K-1)(1/2-K)\}] \\
 &\quad \lambda \pm (1-K+K^2)^{-1}
 \end{aligned}$$

著者の一人により既に発表されているように、結局この問題に対する Hill の分岐基準は次のような超越方程式として与えられる⁽¹⁾。

$$2\rho^3 - (\rho+2)^2(\rho-1)\cos(2\bar{Q}) - (\rho-2)^2(\rho+1)\cosh(2\bar{P}) = 0 \quad (28)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \rho^2 &\pm 4\bar{D}\bar{G}/\sigma_{xk}^2, \quad \bar{Q} \pm \sqrt{\sigma_{xk}(\rho+1)/4\bar{D}}, \quad \bar{P} \pm \sqrt{\sigma_{xk}(\rho-1)/4\bar{D}} \\
 \sigma_{xk} &\pm |\sigma_x/\sigma^*|, \quad \bar{D} \pm (\bar{h}^2/12)(\bar{E}_{xx} - \bar{H}_{xx}) \\
 \bar{G} &\pm \{(\bar{E}_{\theta x} - \bar{H}_{\theta x})/(\bar{E}_{xx} - \bar{H}_{xx})\}[-(\bar{E}_{\theta x} - \bar{H}_{\theta x})\bar{R}^{-2} + \bar{\sigma}_{xk}\bar{R}^{-2} + \bar{p}(\bar{R}\bar{h})^{-1}] + (\bar{E}_{\theta\theta} - \bar{H}_{\theta\theta})\bar{R}^{-2} - \bar{p}(\bar{R}\bar{h})^{-1} \\
 \bar{h} &\pm h/L, \quad \bar{R} \pm R/L, \quad \bar{p} \pm p/\sigma^*, \quad \bar{H}' \pm H'/\sigma^*, \quad \bar{E} \pm E/\sigma^*
 \end{aligned}$$

K_c について具体的な値をいくつか選定して、式(28)を数値的に解いて得られた結果を図3に示す。計算に用いられた材料定数および初期形状寸法は、 $E=108.2$ GPa, $\nu=0.3$, $n=0.63$, $\sigma^*=789$ MPa, $h_0=1$ mm, $R_0=15.4$ mm として $L_0=130$ mm とした。参考のために剛塑性体の場合の結果と実験値⁽¹¹⁾をも図示してあるが、線形比較体の分岐応力(σ_x , σ_θ)が K_c の選択に敏感に影響する。 K_c が零に近づくにつれて、すなわち Prandtl-Reuss 則に近づくにつれ、変形増分が基本状態と応力場からより大きな拘束を受けることになり、座屈応力値が上昇することとなる。こうした傾向は剛塑性体について特に著しい。線形比較体についての分岐点を定めれば唯一性に関する安全側の限界点となるが、与えられた材料に対しては一般に数多くの比較体をつくることのできる。したがって、あまりにも安全

側となりすぎる線形比較体を選定しないように K_c の最小値を用いて線形比較体を構成することが常である。しかしながら、前節の図1で示されたように角点成長が大きくない場合は、 K_c はどの値ひいては μ , β の関数形によって著しく変わり得るので正確な μ , β が得られない限り、線形比較体を用いた分岐解析によ

図3 内圧と軸圧縮力を受ける弾塑性円管の分岐点の定数係数則パラメータ K_c への依存

図4 一軸引張り、および純せん断後の μ , β [K.B.W. モデルによる数値実験(伊藤⁽¹²⁾)]

図5 イリュージンの偏差応力空間と前負荷方向角 ϕ ⁽¹³⁾

り精度の良い解を得ることは困難であろう。

5. K.B.W.モデル材の分岐解析

先に、伊藤⁽¹²⁾は塑性変形に伴う結晶粒間の不均一応力場を考慮した多結晶モデルである K.B.W.モデルを用いた数値計算により、一軸引張りおよび純粋せん断負荷後の塑性ひずみ増分 ϵ^p と偏差応力増分 σ' の関係を調べた。図4はそこで得られた結果を遷移関数 μ, β について整理したものである。

図4は、一軸負荷方向に対しては $\alpha_{\max} \approx 120^\circ$ 、純粋せん断方向に対しては $\alpha_{\max} \approx 90^\circ$ となることを示している。この結果は、イリュージシンの偏差応力空間における各前負荷方向についての $\alpha_{\max}$ の分布が、図5に示すように Tresca 形関数のそれに近いことを示唆する。しかしながら、Tresca 形の場合は角点とその近傍の返上の点とで $\alpha_{\max}$ が不連続に変化し現実にはそぐわないと思われる。そこで、本節では $\alpha_{\max}$ が Tresca 形関数の角点とそれの隣接辺の中央点との間で線形に推移するものとし、図5中の前負荷方向角 ϕ を用いて、次式を仮定する。

$$2\pi/3 \leq \phi < 5\pi/6 \text{ のとき } \alpha_{\max} = 4\pi/3 - \phi$$

$$5\pi/6 \leq \phi \leq \pi \text{ のとき } \alpha_{\max} = -\pi/3 + \phi$$

さて、平面応力状態の場合は ϕ と応力 σ_x, σ_θ の間には次の関係が成立する。

$$\sigma_x = (2/\sqrt{3}) \bar{\sigma} \sin(\phi + \pi/3) \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\sigma_\theta = (2/\sqrt{3}) \bar{\sigma} \sin(\phi)$$

したがって、応力比 $K (\equiv \sigma_\theta/\sigma_x)$ については次式が成立する。

$$K = \sin \phi / \sin(\phi + \pi/3) \quad \dots\dots\dots (30)$$

式(30)により K のある値に対して ϕ が決まり、さらに式(20), (28)より線形比較体則となり得るための限界最小値の K_c が定まる。このようにして、各前負荷方向について得られた $K_{c\min}$ の限界最小値に対する臨界応力が、やはり図3に示してある。前負荷方向が純粋せん断方向の場合は座屈応力が高くなり、Prandtl-Reuss 則の結果に一致し、単軸負荷方向に対しては座屈応力は低くなる傾向を示す。

6. ま と め

剛塑性体に対する線形比較体の満足すべき条件を、新塑性構成式における遷移関数 $\mu(\alpha), \beta(\alpha)$ を用いた明確な形で得ることができた。したがって、塑性材料の分岐問題の解析に線形比較体としてしばしば用いられることのあった Hencky 変形論増分則についても、これら条件を満足するかの検討が今後は必要とされよ

う。

線形比較体を用いて軸圧縮力と内圧を同時に受ける円管の弾塑性座屈解析がなされた。その結果、内圧がない場合と同様に、その座屈値は線形比較体則のパラメータ K_c の選択に大きく依存し、ひいては材料自身の構成関係を規定する $\mu(\alpha), \beta(\alpha)$ を正確に得ることが重要となる。

K.B.W.モデルによる数値計算結果の示唆する Tresca 形材に対して得られた定数パラメータ $K_{c\min}$ を用いて座屈解析を行った。それによると、実験結果の傾向とは大きく異なったが、この点については今後も引き続き検討を必要とする。

終わりに、本研究を遂行するに際し、貴重なご助言をいただいた東北大学工学部・加藤正名教授に厚くお礼申し上げます。

付 録

例えば、 $\alpha_{\max} = 120^\circ$ として $\xi \geq 1.7$ なる ξ について、数値的に線形比較体の条件(17・b)を検討したところ、 $\beta_1 = 0, \beta_2 < 1 = 0$ においてこれを満足する K_c が存在しないことがわかった。そこで、以下に解析的に検討を試みる。

《条件 A について》 $r \neq -1, \chi \neq .5\pi/\beta_{\max}$ と定め、 $\beta_1 = 0$ より $\alpha_1 = \alpha_1^L = 0$ だから次式が成立する。

$$A \equiv (rx^2/2 - 1/K_c + 1)\beta^2$$

条件より $A \geq 0$ だから次式を得る。

$$K_c \geq 1/(\{.5r(.5\pi/\beta_{\max})^2 + 1\}) \quad \dots\dots\dots (31)$$

《条件 B について》

$$B \equiv x(2 - rx)\beta^2/2$$

条件より $B \geq 0$ だから、許容できる r の最大値は

$$r = 4\beta_{\max}/\pi \quad \dots\dots\dots (32)$$

となる。これを式(31)に代入して結局次式を得る。

$$K_c \geq \beta_{\max}/\alpha_{\max} \quad \dots\dots\dots (33)$$

文 献

- (1) 伊藤・竹山, 塑性と加工, 23-254(1982), 245.
- (2) 伊藤・竹山, 塑性と加工, 23-246(1982), 410.
- (3) 後藤, 機論, 47-424, A(1981), 1389.
- (4) Christoffersen, J. and Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 27-516(1979), 465.
- (5) 呉屋・伊藤, 機論, 54-504, A(1988), 1617.
- (6) 宮川・大島, 塑性と加工, 9-85(1978), 831.
- (7) 北川, 機論, 49-445, A(1983), 1176.
- (8) Galletly, G. D., *Trans., ASME, Ser. J.*, 100-4(1978), 335.
- (9) Fatnassi, A., ほか2名, *Proc. 1st Int. Conf. Tech. Plasticity*, I (1984), 279.
- (10) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, 6(1958), 236.
- (11) 大津, 東北大学修士学位論文, (1978).
- (12) Ito, K., *Tech. Rep. Tohoku Univ.*, 44-2(1979), 199.
- (13) 後藤, 塑性学, (1985), 47, コロナ社.