初期たわみを有する長方形板の弾塑性座屈曲げの解析*

鳴 瀬 勝 房^{*1}Elastic-Plastic Buckling Process of Initially
Imperfect Rectangular Plates Compressed
in Two Perpendicular Directions

Katsufusa NARUSE

The imperfection sensitivity of elastic-plastic rectangular plates under biaxial compression is investigated. In this analysis, a Reissner-type variational principle in conjunction with the incremental Rayleigh-Ritz technique is used to determine the buckling process of a plate which obeys the Prandtl-Reuss flow rule. The influence of initial imperfections in geometry, the elastic modulus, the work hardening rate and boundary conditions on the maximum support stress are clarified numerically. The results show that a small imperfection considerably reduces the buckling strength of the plate.

Key Words: Plasticity, Rectangular Plates, Initial Imperfections, Biaxial Compression, Buckling Strength, Reissner-Type Variational Principle

1. 緒 言

Levy-Mises の塑性流れ則に従う板や殻の弾塑性座屈荷重の理論値が実験値に対してかなり高くなることは従来より多くの研究者によって指摘されている。この差異の原因について考察し、理論の改善を試みたいいくつかの報告は、(1)実験では不可避な初期たわみ等の不整を考慮したもの、(2)応力ベクトルの急激な回転を伴う座屈現象の解析に Levy-Mises の関係式が適用可能か否かを検討し、これに代る新たな流れ則を提案することによって、理論値の低下を図ったものに大別される。これらの研究の中で、特に伊藤⁽¹⁾⁽²⁾は、この問題の総括的な考察を行い、 J_2 -流れ理論の座屈問題に対する本質的な欠陥を指摘し、降伏曲面のとりかたに関連した構成式を多結晶モデルに基づいて定式化した。

一方、初期不整感度についての理論的な研究は、Murphy⁽³⁾(円筒殻)、Neale⁽⁴⁾(長方形板)、Needleman⁽⁵⁾(円板)らによって行われている。それらの結果は、座屈荷重が初期不整に対してかなり敏感な場合があり、

幾何学的な不整を考慮すれば、理論値を実験値に近づけ得ることを示している。初期不整が存在すると、急激な曲げ変形を伴う分岐現象は起こらず、変形は滑らかに進行する。したがって、その全変形過程を解析することによって、現実的な意味での座屈荷重を得ることが期待できる。

本研究では、板における初期不整感度を調べる目的で、互いに直角な二方向に圧縮される弾塑性長方形板の座屈過程に及ぼす初期たわみの影響について解析を行う。一方向圧縮に関しては、既に Neale が周辺単純支持の場合の結果を得ているが、より一般的な問題としての二方向圧縮の結果はないようである。本解析では、Neale に従って、Reissner 形変分原理を用い、Rayleigh-Ritz 法によって、増分近似解を求める。

2. Reissner 形変分原理

弾塑性体の増分境界値問題は、Lagrange 表示により、次のように定式化される。

(1) 平衡方程式

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left(\dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\epsilon}_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \dot{\epsilon}_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \right) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

(2) ひずみ速度-変位速度関係式

* 平成元年 9 月 21 日 北陸信越支部信越地方講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 11 月 14 日。

^{*1} 正員、鶴岡工業高等専門学校 (〒997 鶴岡市大字井岡字沢田 104)。

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_j} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_i} \right) \dots \dots \dots (2)$$

(3) 境界条件式

S_F^0 上で,

$$\dot{F}_j = n_i^0 \left(\dot{t}_{ij} + \dot{t}_{ik} \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_k} + \tau_{ik} \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_k} \right) = \bar{F}_j \quad \dots (3)$$

S_u^0 上で,

$$\dot{u}_j = \bar{u}_j \quad \dots \dots \dots (4)$$

(4) 応力-ひずみ関係式

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\tau}_{ij}}, \quad W = \frac{1}{2} \dot{\tau}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} \quad \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 X_i は初期状態(無変形状態)において、空間に固定した基準直交デカルト座標、 S_F^0, S_u^0 は表面力速度 $\dot{F}_j$, 変位速度 $\dot{u}_j$ の規定される物体表面を表す。また、 τ_{ij} は X_i 座標系に関して定義される Kirchhoff の応力であり、真応力 σ_{ij} と次の関係にある。

$$\tau_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \sigma_{kl}, \quad x_i = X_i + u_i \quad \dots \dots \dots (6)$$

ただし、 ρ_0, ρ は初期状態および現在の密度を表す。なお、構成式(5)では、同次ポテンシャル関数 W の存在を仮定している。

式(1)~(5)で記述される境界値問題は、次の変分問題に置き換えることができる。

$$\delta \Pi_R = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$\Pi_R \equiv \int_{V_0} \left(\dot{\tau}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \frac{1}{2} \tau_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_j} - W \right) dV_0 - \int_{S_F^0} \bar{F}_j \dot{u}_j dS_0 - \int_{S_u^0} \bar{F}_j (\dot{u}_j - \bar{u}_j) dS_0 \quad \dots (8)$$

ここで独立な変関数は、 $\dot{\tau}_{ij}$ と $\dot{u}_j$ の二つである。停留原理(7)は、直接解法によって近似解を得ようとする際、応力速度場と変位速度場の双方を独立に選べるという基礎を与えるもので、板殻等の弾塑性変形を近似的に取扱う場合、極めて有用な解析手法の一つと考えられる⁽⁴⁾⁽⁶⁾。

3. 初期たわみをもつ

長方形板の座屈変形

図1に示すような長方形板が初期たわみをもつとき、面内圧縮による座屈曲げ変形の過程を解析し、最大荷重点としての座屈限界点を求める。周辺条件は、面内変位に関しては一様圧縮変位を仮定し、面外変形については全辺単純支持あるいは全辺固定の場合を取扱う。解析では、上述の Reissner 形変分原理を用い、Rayleigh-Ritz 法により、段階的に増分解を求める。

3.1 Green のひずみ速度および構成式 薄板の曲げにおける Kirchhoff-Love の仮定が成立するもの

とし、また、面外変位に関する非線形項のみを考慮すると、Green のひずみ速度は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_x &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \\ \dot{\gamma}_y &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 (u, v, w) は板の中央面の変位成分を表す。

応力-ひずみ関係は、Prandtl-Reuss の流れ則を用いる。これは通常、Euler 表示の応力とひずみ速度によって記述されるが、ここでは、 $\dot{\gamma}_{ij}$ と $\dot{\tau}_{ij}$ の関係として次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{ij} &= \frac{1}{E} [(1+\nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl}] \dot{\tau}_{kl} \\ &\quad + \alpha^* \hat{G} \tau'_{ij} \tau'_{kl} \dot{\tau}_{kl} \\ \alpha^* &= \begin{cases} 1: \text{塑性変形, 負荷} \\ 0: \text{弾性変形, 除荷} \end{cases} \\ \hat{G} &= \frac{3}{4J_2 H'}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \tau'_{ij} \tau'_{ij} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

ここに E, ν はそれぞれ縦弾性係数、ポアソン比を表す。また、 H' は硬化係数であって、塑性曲線が n 乗硬化則 $\tau_{ij} = \tau^*(\gamma_{ij}^p)^n$ で与えられるとすれば、

$$H' = \frac{d\tau_{ij}}{d\gamma_{ij}^p} = n \tau^* \left(\frac{\tau_{ij}}{\tau^*} \right)^{1-1/n}, \quad \tau_{ij} = \sqrt{3} J_2 \quad \dots \dots (11)$$

となる。式(10)をまとめて $\dot{\gamma}_{ij} = L_{ijkl} \dot{\tau}_{kl}$ と書けば、 $L_{ijkl} = L_{klij}$ より、ここで用いる流れ則は構成式(5)に属する。

平面応力に対して、式(10)を具体的に書き表すと次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y \\ 2\dot{\gamma}_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ & C_{22} & C_{23} \\ \text{SYM} & & C_{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\tau}_x \\ \dot{\tau}_y \\ \dot{\tau}_{xy} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots (12)$$

図1 二方向圧縮を受ける長方形板

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{E} + \alpha^* \frac{\bar{G}}{9} (2\tau_x - \tau_y)^2, C_{12} = -\frac{\nu}{E} + \alpha^* \frac{\bar{G}}{9} (2\tau_x - \tau_y)(2\tau_y - \tau_x), C_{13} = \alpha^* \frac{2\bar{G}}{3} \tau_{xy} (2\tau_x - \tau_y) \\ C_{22} &= \frac{1}{E} + \alpha^* \frac{\bar{G}}{9} (2\tau_y - \tau_x)^2, C_{23} = \alpha^* \frac{2\bar{G}}{3} \tau_{xy} (2\tau_y - \tau_x), C_{33} = \frac{2(1+\nu)}{E} + 4\alpha^* \bar{G} \tau_{xy}^2 \\ \bar{G} &= \frac{3(\sqrt{3}J_2)^{1/n-1}}{4J_2 n \tau^*^{1/n}}, J_2 = \frac{1}{3} (\tau_x^2 - \tau_x \tau_y + \tau_y^2) + \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

上式において、加工硬化指数 $n=1/3$ のとき、 $\bar{G}$ は一定値 ($=27/4\tau^*$) をとる。

3・2 解析の手法 四辺を支持あるいは固定された長方形板が、互いに直角な二方向に圧縮されるとき荷重-たわみ曲線を求める。この関係は相対する二辺での面内変位増分を規定し、それに対する応力増分、たわみ増分を Rayleigh-Ritz 法を用いて逐次求めることによって得られる。本解析の基礎となる変分原理の汎関数は次式で表される。

$$\begin{aligned} \Pi_R &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ \dot{\tau}_x \dot{\gamma}_x + 2\dot{\tau}_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + \dot{\tau}_y \dot{\gamma}_y + \frac{1}{2} \left[\tau_x \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \tau_y \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \{ C_{11} \dot{\tau}_x^2 + 2C_{12} \dot{\tau}_x \dot{\tau}_y + C_{22} \dot{\tau}_y^2 + 2C_{13} \dot{\tau}_x \dot{\tau}_{xy} + 2C_{23} \dot{\tau}_y \dot{\tau}_{xy} + C_{33} \dot{\tau}_{xy}^2 \} \right\} dx dy dz \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

変位速度場および応力速度場を次のように仮定する。ただし、たわみ増分は基本モードのみをとり上げる。

$$\dot{u} = -\bar{\alpha}x, \dot{v} = -\bar{\beta}y, \dot{w} = \begin{cases} \dot{b}_1 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} : \text{単純支持} \\ \dot{b}_1 \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b} : \text{固定} \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

$$\dot{\tau}_x = -\dot{b}_2 + \dot{b}_4 g_1, \dot{\tau}_y = -\dot{b}_3 + \dot{b}_5 g_2, \dot{\tau}_{xy} = \dot{b}_6 g_3 \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \begin{cases} \frac{z}{h} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} : \text{単純支持} \\ \frac{z}{h} \cos \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b} : \text{固定} \end{cases} \\ g_2 &= \begin{cases} \frac{z}{h} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} : \text{単純支持} \\ \frac{z}{h} \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{b} : \text{固定} \end{cases} \\ g_3 &= \begin{cases} \frac{z}{h} \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b} : \text{単純支持} \\ \frac{z}{h} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} : \text{固定} \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 $-\bar{\alpha}$ 、 $-\bar{\beta}$ は中央面のひずみ速度であって、一定値として規定される量である。係数 $\dot{b}_i$ は Π_R の停留条件

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \dot{b}_i} = 0 \quad (i=1 \sim 6) \dots\dots\dots (18)$$

を用いて定める。

以上の手法を繰返し適用することによって、任意時刻における変位、応力の近似解が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} u &= -\bar{\alpha}x, v = -\bar{\beta}y \\ w &= \begin{cases} b_1 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} : \text{単純支持} \\ b_1 \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b} : \text{固定} \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= -b_2 + b_4 g_1, \tau_y = -b_3 + b_5 g_2 \\ \tau_{xy} &= b_6 g_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\bar{\alpha} = \sum \bar{\alpha}, \bar{\beta} = \sum \bar{\beta}, b_i = \sum \dot{b}_i \dots\dots\dots (21)$$

初期たわみは次のものを考える。

$$w^0 = \begin{cases} b_1^0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} : \text{単純支持} \\ b_1^0 \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b} : \text{固定} \end{cases} \dots\dots\dots (22)$$

3・3 数値計算 比較速度場(15)、比較応力速度場(16)を式(14)に代入し整理すると、 Π_R はつぎのように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Pi_R &= F_{ij} \dot{b}_i \dot{b}_j + \bar{\alpha} V_0 \delta_{2j} \dot{b}_j \\ &\quad + \bar{\beta} V_0 \delta_{3j} \dot{b}_j \quad (i, j=1 \sim 6) \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここに、 $F_{ij}(=F_{ji})$ は次の定積分によって与えられる。

$$F_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a f_{ij}(x, y, z) dx dy dz \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 f_{ij} は現在の状態量によって決まる座標関数である。また、 $V_0=4abh$ であり、板の体積を表す。式(23)の表示によれば、 Π_R の停留条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_R}{\partial \dot{b}_i} &= 2F_{ij} \dot{b}_j + \bar{\alpha} V_0 \delta_{2i} + \bar{\beta} V_0 \delta_{3i} = 0 \\ (i, j=1 \sim 6) \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

実際の数値計算では、応力の次元をもつ諸量は塑性定数 τ^* で、長さの次元をもつ諸量は板厚 h で無次元化して用いる。すなわち、それらの無次元量を“ $\sim$ ”を付して表すと、 $\bar{\alpha}=a/h, \dots, \bar{E}=E/\tau^*, \dots$ 等となる。 Π_R は板の四半分 ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) について考え、 F_{ij} は次の数値積分によって評価する。

$$\bar{F}_{ij} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^b \int_0^a \bar{f}_{ij}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta \bar{x} \Delta \bar{y} \Delta \bar{z} \sum_{q=1}^{p_z} \left\{ \sum_{r=2}^{p_x-1} \sum_{s=2}^{p_y-1} \bar{f}_{ij}(r, s, q) \right. \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{p_x-1} [\bar{f}_{ij}(r, 1, q) + \bar{f}_{ij}(r, p_y, q)] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{s=2}^{p_y-1} [\bar{f}_{ij}(1, s, q) + \bar{f}_{ij}(p_x, s, q)] \\
&+ \frac{1}{4} [\bar{f}_{ij}(1, 1, q) + \bar{f}_{ij}(1, p_y, q) \\
&+ \bar{f}_{ij}(p_x, 1, q) + \bar{f}_{ij}(p_x, p_y, q)] \Big\} \quad \dots\dots\dots (26)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
\Delta \bar{x} &= \frac{\bar{a}}{p_x - 1}, \Delta \bar{y} = \frac{\bar{b}}{p_y - 1}, \Delta \bar{z} = \frac{1}{p_z} \\
\bar{x} &= \Delta \bar{x}(r - 1) \quad r = 1 \sim p_x \\
\bar{y} &= \Delta \bar{y}(s - 1) \quad s = 1 \sim p_y \\
\bar{z} &= \frac{\Delta \bar{z}}{2} [2q - (p_z + 1)] \quad q = 1 \sim p_z
\end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 $(p_x - 1), (p_y - 1), p_z$ は x, y および z 方向の分割数を表す。板厚方向に分割した要素の z 座標は、要素中心の値で代表させるものとする。

数値積分において、 $\bar{f}_{ij}$ は係数 $\bar{C}_{ij}$ を含むので、方程式系(25)は非線形となる。そこで、いったん、除荷・負荷域を仮定して $\bar{f}_{ij}$ を評価し、線形化された式(25)によって粗い近似解を作り、それを所要の精度の解になるまで繰返し修正する。

なお、加工硬化指数 $n=1/3$ で、かつ変形が全域負荷のもとで進行する場合は、 $\bar{F}_{ij}$ の解析的な表示が可能であり、全辺単純支持の場合について付録に示す。

4. 計算結果および考察

数値計算は正方形 ($a=b$) について行った。数値積分の際の分割数は、 x, y 方向を 20 等分、 z 方向は 10 等分とした。各ステージでの解の収束基準には相対誤差 $\epsilon=10^{-4}$ を用いた。また、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。結果は慣用の記号によって表すことにし、本文で使った記号を次のように書き改めた。

$$b_1 + b_1^0 \rightarrow \delta, b_2 \rightarrow \tau_{x0}, b_4 \rightarrow \tau_{y0}$$

$$\bar{a}a \rightarrow \bar{u}, \bar{b}b \rightarrow \bar{v}, b_1^0 \rightarrow \delta^0$$

図2は $\bar{v}/\bar{u}=1$ に対する応力-たわみ線図である。応力は変形の初期段階で急激に増加するが、やがて上昇率が鈍り、たわみが増大する。以後、極めてゆるやかなカーブで応力は微増し、ついに最大点に達する。たわみが大きくなると、曲げ変形は除荷を伴う。除荷開始点は最大応力点に先行するが、除荷開始点以降の応力上昇は、初期たわみが小さければ、ほとんど無視し得る程度である。

表1に圧縮量の比 $\bar{v}/\bar{u}$ による最大応力 $(\tau_{x0})_{\max}$ の変化を示す。等二軸圧縮 ($\bar{v}/\bar{u}=1$) から一方向圧縮に近づくにつれて $(\tau_{x0})_{\max}$ は増大し、 $\bar{v}/\bar{u} \rightarrow 0$ の極限值が x

方向のみに強制変位を与えたときの最大応力を表す。しかしながら、この値は Neale の結果⁽⁴⁾と一致しない。例えば、単純支持、 $\delta^0/h=10^{-6}$ の場合、 $\bar{v}/\bar{u}=0.001$ に対する最大応力は $(\tau_{x0})_{\max}/\tau^*=0.345$ であるが、Neale は $(\tau_{x0})_{\max}/\tau^*=0.448$ を得ている。これは、Neale が $\dot{v}=\tau_{y0} \equiv 0$ (これは非現実的と思われる) なる比較速度場および応力速度場を仮定しているために、本結果より高い値となったと考えることができる。なお、本例において、 $(\tau_{x0})_{\max}/\tau^*=0.345$ に対して $\tau_{y0}/\tau^*=0.166$ である。

一般の二方向圧縮では、 τ_{y0} も最大値をとる。これは主圧縮方向における $(\tau_{x0})_{\max}$ 点に先行して現れることがわかった。

図3は、初期たわみ $\delta^0/h=10^{-6} \sim 10^{-1}$ の範囲での $(\tau_{x0})_{\max}$ を圧縮比 $\bar{v}/\bar{u}$ をパラメータにして示したもの

表1 最大応力 $(\tau_{x0})_{\max}/\tau^*$
 $a/h=10, E/\tau^*=300, n=1/3$

(a) 単純支持

$\delta^0/h \backslash \bar{v}/\bar{u}$	1.0	0.5	0.1	0.01
10^{-6}	0.243	0.273	0.327	0.343
10^{-4}	0.207	0.240	0.284	0.297
10^{-2}	0.160	0.185	0.214	0.223

(b) 固定

$\delta^0/h \backslash \bar{v}/\bar{u}$	1.0	0.5	0.1	0.01
10^{-6}	0.312	0.358	0.465	0.492
10^{-4}	0.282	0.325	0.400	0.423
10^{-2}	0.233	0.269	0.310	0.317

図2 荷重-変位曲線

である。最大応力の減少率は初期たわみ $\delta^0/h > 10^{-3}$ において比較的大きい。

表2に板寸法比 $2a/h$ に対する最大応力値を示す。表中、完全系 $\delta^0/h=0$ の場合の値は、Sewell⁽⁷⁾に従って求めた、 J_2 流れ則による分岐点応力 τ_c である。最小の初期たわみ $\delta^0/h=10^{-6}$ に対する最大応力と完全系の分岐点応力を比較してみると、 $2a/h=20$ の場合、全辺単純支持では約1/2、固定の場合は約1/4である。両者の差は、 $2a/h$ が大きくなるにつれて減少する。このような傾向は、分岐点が高くなるほど、実験値との差

表2 最大応力 $(\tau_{x0})_{\max}/\tau^*$
 $\bar{v}/\bar{u}=1.0, E/\tau^*=300, n=1/3$

(a) 単純支持

$\delta^0/h \backslash 2a/h$	20	30	40
0	0.480	0.223	0.136
10^{-6}	0.243	0.171	0.128
10^{-4}	0.207	0.149	0.114
10^{-2}	0.160	0.118	0.093

(b) 固定

$\delta^0/h \backslash 2a/h$	20	30	40
0	1.266	0.567	0.325
10^{-6}	0.312	0.228	0.179
10^{-4}	0.282	0.208	0.165
10^{-2}	0.233	0.175	0.140

図3 最大応力と初期たわみの関係

異が大きくなるという従来の指摘と符合する。

初期たわみの大きさによる最大応力の変化の様子を a/h をパラメータにして図4に示す。 $\delta^0/h=10^{-1}$ における最大応力は、 $\delta^0/h=10^{-6}$ に対するその約50~60%に減少している。

表3、表4は材料定数による最大応力の変化を示したものである。まず、縦弾性係数の影響をみてみると、 E/τ^* が小さくなるに従って、すなわち、弾性変形の占める割合が大きくなるにつれて、初期不整感が鈍くなることわかる。特に、全辺単純支持、 $E/\tau^*=50$ の場合は、 $\delta^0/h < 10^{-3}$ に対して $(\tau_{x0})_{\max}/\tau_c > 1$ である。これは分岐後変形が荷重の増加を伴う安定な変形であることを示唆している。次に、 n 値の影響をみてみると、 n 値が大きくなるに従って、最大応力は減少する。な

表3 最大応力 $(\tau_{x0})_{\max}/\tau^*$
 $\bar{v}/\bar{u}=1.0, a/h=10, n=1/3$

(a) 単純支持

$\delta^0/h \backslash E/\tau^*$	50	100	300
0	0.131	0.191	0.480
10^{-6}	0.169	0.194	0.243
10^{-4}	0.151	0.176	0.207
10^{-2}	0.126	0.144	0.160

(b) 固定

$\delta^0/h \backslash E/\tau^*$	50	100	300
0	0.259	0.440	1.266
10^{-6}	0.244	0.279	0.312
10^{-4}	0.233	0.258	0.282
10^{-2}	0.203	0.220	0.233

図4 最大応力と初期たわみの関係

お、ここで与えた計算条件では、分岐点応力が n 値にほとんど依存しない結果となっているが、一般には、分岐点も n 値が大きくなると低下することが確認できる。

図5、図6は材料定数をパラメータにして最大応力の変化の様子を示したものである。初期たわみによる変化の傾向は、両周辺条件とも同様である。

5. 結 言

全辺が単純支持あるいは固定された長方形板が二方向圧縮の作用を受けるとき、最大荷重に及ぼす初期たわみの影響を調べ、座屈問題における幾何学的な初期不整の感度を明らかにした。Reissner 形変分原理の適

表4 最大応力 $(\tau_{x0})_{\max}/\tau^*$
 $\bar{v}/\bar{u}=1.0, a/h=10, E/\tau^*=300$

(a) 単純支持

$\delta^0/h \backslash n$	1/4	1/3	1/2
0	0.483	0.480	0.478
10^{-6}	0.329	0.243	0.130
10^{-4}	0.295	0.207	0.106
10^{-2}	0.234	0.160	0.075

(b) 固定

$\delta^0/h \backslash n$	1/4	1/3	1/2
0	1.266	1.266	1.268
10^{-6}	0.398	0.312	0.192
10^{-4}	0.365	0.282	0.166
10^{-2}	0.312	0.233	0.129

図5 最大応力と初期たわみの関係

用により得られた結果は、微小な初期たわみによって、座屈強度がかなり低下することを示しており、実験値の推定に資するいくつかの基礎的な情報を得ることができた。

等二軸圧縮の数値例から明らかになったことを要約すると以下ようになる。

(1) $E/\tau^*=300, n=1/3, 2a/h=20, \delta^0/h=10^{-6}$ に対する最大応力は、完全系の分岐点応力の約 1/2 (全辺単純支持), 1/4 (全辺固定) 程度である。

(2) 縦弾性係数 E/τ^* の減少とともに、不完全系の最大応力と分岐点応力の差が小さくなり、両者の大小関係が逆転する。

(3) n 値の増加は座屈強度の低下をもたらす。

最後に、本研究の解析手法について付言したい。停留原理を用いて得られる境界値問題の近似解の精度は、比較関数(変形モード)の選択に左右されるところが大である。ここで仮定した変形モードの構成の良否を検討するために、有限要素法による数値実験を行う必要があろう。座屈モードの影響の考察とともに今後の課題としたい。

付録. 式(25)の係数 (全辺単純支持, $n=1/3$, 全域負荷の場合)

板の四半分について、無次元表示による係数 $\tilde{F}_{ij}$ は次のようになる。ただし、簡単のために $\tilde{F}_{ij}/\tilde{a}\tilde{b}$ を改めて F_{ij} と書き、無次元量 $\tilde{b}_i$ の代わりに b_i 等と書く。また、 $\tilde{G}=27/4$ である。

$$F_{11} = -\frac{1}{8} \left[b_2 \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 + b_3 \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \right]$$

図6 最大応力と初期たわみの関係

$$\begin{aligned}
F_{12} &= -\frac{b_1}{8} \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2, F_{13} = -\frac{b_1}{8} \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \\
F_{14} &= \frac{1}{96} \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2, F_{15} = \frac{1}{96} \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \\
F_{16} &= -\frac{1}{48} \left(\frac{\pi}{2a} \right) \left(\frac{\pi}{2b} \right) \\
F_{22} &= -\frac{1}{2E} - \frac{\hat{G}}{72} \left[4(2b_2 - b_3)^2 + \frac{1}{12}(2b_4 - b_5)^2 \right] \\
F_{23} &= \frac{\nu}{2E} - \frac{\hat{G}}{72} \left[4(2b_2 - b_3)(2b_3 - b_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12}(2b_4 - b_5)(2b_5 - b_4) \right] \\
F_{24} &= \frac{\hat{G}}{432} (b_3 - 2b_2)(2b_4 - b_5) \\
F_{25} &= \frac{\hat{G}}{864} [(b_3 - 2b_2)(2b_5 - b_4) \\
&\quad + (b_2 - 2b_3)(2b_4 - b_5)] \\
F_{26} &= \frac{\hat{G}}{144} b_6(b_3 - 2b_2) \\
F_{33} &= -\frac{1}{2E} - \frac{\hat{G}}{72} \left[4(2b_3 - b_2)^2 + \frac{1}{12}(2b_5 - b_4)^2 \right] \\
F_{34} &= F_{25}, F_{35} = \frac{\hat{G}}{432} (b_2 - 2b_3)(2b_5 - b_4) \\
F_{36} &= \frac{\hat{G}}{144} b_6(b_2 - 2b_3) \\
F_{44} &= -\frac{1}{96E} - \hat{G} \left[\frac{1}{864} (b_3 - 2b_2)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{10240} (2b_4 - b_5)^2 \right] \\
F_{45} &= \frac{\nu}{96E} - \hat{G} \left[\frac{1}{864} (b_3 - 2b_2)(b_2 - 2b_3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{10240} (2b_4 - b_5)(2b_5 - b_4) \right] \\
F_{46} &= -\frac{\hat{G}}{15360} b_6(2b_4 - b_5) \\
F_{55} &= -\frac{1}{96E} - \hat{G} \left[\frac{1}{864} (b_2 - 2b_3)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{10240} (2b_5 - b_4)^2 \right] \\
F_{56} &= -\frac{\hat{G}}{15360} b_6(2b_5 - b_4) \\
F_{66} &= -\frac{1+\nu}{48E} - \frac{9}{2560} \hat{G} b_6^2
\end{aligned}$$

文 献

- (1) 伊藤・竹山, 塑性と加工, **23**-254(1982), 254.
- (2) 伊藤・竹山, 塑性と加工, **23**-256(1982), 410.
- (3) Murphy, L. M. and Lee, L. H. N., *Int. J. Solids Struct.*, **7**-9(1971), 1153.
- (4) Neale, K. W., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **42**-1(1975), 115.
- (5) Needleman, A., *Int. J. Mech. Sci.*, **17**-1(1975), 1.
- (6) Neale, K. W., *Int. J. Solids Struct.*, **10**-2(1974), 217.
- (7) Sewell, M. J., *J. Mech. Phys. Solids*, **12**-5(1964), 279.

討 論

〔質問〕 後 藤 学〔岐阜大学工学部〕

(1) n 乗硬化式 $\tau_y = \tau^*(\gamma_y^n)$ だとすると, $\gamma_y^n = 0$ で $\tau_y = 0$, つまり初期降伏応力 $= 0$, としていることになるが, 問題ないか. また, もし $\tau_y = \tau^*(\gamma_y^n)$ で計算が行われているとすると, 図 6 では $\tau^* = \text{一定}$, $E = \text{一定}$ としているから, 付図 1 のとおり n によって初期降伏応力 σ_0 を変えていることになる (n 小で σ_0 大). よって, 図 6 の n 値依存性には初期降伏応力に依存する部分も大きい. σ_0 を一定にして n を変えたほうがよくないか(このとき τ^* が変化). また, 図 5 ではいかがか.

(2) 図 2 で, 各初期不整量の曲線が一つの曲線に漸近していないのはなぜか(大変形効果無視のためか).

(3) 任意に与えられる板について, ‘初期不整’量は知りようがないのだから‘初期不整モデル’で‘座屈応力’をどのように決めよといっておられるのか, はっきりしない. ご教示願いたい.

〔回答〕 (1) 本解析では, Ramberg-Osgood の関係を用い, 塑性曲線を n 乗硬化式 $\tau_0 = \tau^*(\gamma_0^n)$ で表した. したがって, 変形直後に塑性変形が生じることになり, その意味ではご指摘のように初期降伏応力を 0 にしたことになる. この表現は一見奇異に思われるが, 変形初期の段階では弾性変形が支配的であり, 初期降伏応力を有限値に規定する取扱いと本質的な違いはない. いま, 全ひずみを弾性成分と塑性成分に分けると, 両者の比は, $\alpha = (\tau^*/E)(\tau_0/\tau^*)^{1-(1/n)}$ と書ける. 図 5, 図 6 は, E/τ^* あるいは n の変化が α を通して座屈強度に及ぼす影響を示している. 図 6 に関して付図 1 に示されるように, 仮りに $\alpha = 1$ で初期降伏応力 σ_0 を決めるとすれば, σ_0 は n に依存する(塑性ひずみ量を規定するやり方でも同じ). したがって, その場合の座屈強度は初期降伏応力の影響を受ける. ここでは初期降伏応力 $= 0$ の取扱いをしているが, ご指摘のように, $\sigma_0 = \text{一定} (\neq 0)$ とした場合の検討もまた重要であると考え.

付図 1

(2) 図2の荷重-たわみ曲線は最大荷重に達した後、数ステップまでを示しており(計算時間節約のため)、これだけでは、たわみの増加によって各曲線が漸近していく様子がわからない。その確認のため、単純

支持の場合について、 $\delta/h=0.25$ までの変形を調べたところ、例えば、 $\delta^0/h=10^{-6}$ と $\delta^0/h=10^{-2}$ に対する応力差は $\delta/h=0.1$ で $\Delta(\tau_{x0}/\tau^*)=0.078$ 、 $\delta/h=0.25$ で $\Delta(\tau_{x0}/\tau^*)=0.051$ となり、各曲線の漸近する傾向がわかった。

(3) これまでの解析⁽³⁾⁻⁽⁵⁾がそうであるように、ここでも J_2 -流れ則に従う弾塑性板の初期不整感度を解析した。本結果からただちに座屈強度を予測することは困難である。しかしながら、個々の実験との対応において、不確定因子である不整量の概略値を評価することはある程度可能であろう。そういったことも含め、塑性座屈理論改善への一つのアプローチとして、基本的な形状の板に対する初期不整感度をできるだけ一般的な形で調べておくことは意義があると考え。