直流電位差法による半だ円表面き裂形状・寸法測定のための電位解析*

多田直哉^{*1}, 坂之上悦典^{*2}
北村隆行^{*3}, 大谷隆一^{*3}

Electric Field Analysis for Determination of Shape and Size of Semi-Elliptical Surface-Crack by Means of D. C. Potential Drop Technique

Naoya TADA, Yoshinori SAKANOUE,
Takayuki KITAMURA, and Ryuichi OHTANI

It is necessary for determination of crack size and shape by means of D. C. potential drop technique to know electric potential distribution at the surface of cracked body beforehand. The potential distribution on a body with semi-elliptical surface-crack is investigated in this paper. The results obtained are summarized as follows. (i) Exact distribution is derived as Eqs. (1)~(3) for semi-infinite body with a semi-elliptical surface-crack. As it requires numerical integral to evaluate the potential, a simple approximation method (Eqs. (14) and (15)) is proposed for convenience. It is confirmed by numerical analysis that the error of approximation is very small. (ii) We propose an easy method to make a cracked body with an arbitrary crack shape and size for the calibration of electric potential distribution. Plate specimens with a semi-elliptical surface-crack are made of a wood metal, and the potential distribution is examined experimentally. The values measured coincide the solution of infinite body (see (i)) except that the crack depth is nearly equal to the thickness of plate. It implies that specimen's back surface affects fairly little on the potential distribution at the front surface.

Key Words: Nondestructive Inspection, Numerical Analysis, Inverse Problem, D. C. Potential Drop Technique, Electric Potential, Semi-Elliptical Surface Crack, Semi-Infinite Body, Exact Solution, Approximation, Plate Specimen

1. 緒言

直流電位差法は、き裂長さの非破壊的かつその場連続測定方法として多く用いられている⁽¹⁾⁽²⁾。中央貫通き裂平板試験片などでは、電位の分布は解析的に厳密解が求められており、その解はき裂長さが既知の試験片に対する実測値と一致することがよく知られている⁽³⁾。しかし、実用上重要である半だ円表面き裂に対しては電位差法の適用例は少ない⁽⁴⁾。これは、電位分布の解析が困難であることが一つの大きな要因である。最近では、有限要素法⁽⁵⁾や境界要素法⁽⁶⁾によって表面き裂の電位解析やき裂形状推定も行われている。しかし、その電位解析は三次元であるため、アスペクト比などを広い範囲にわたって変えて解析することは容易ではない。また、任意形状のき裂を導入した参照試験体を簡便に作成することができなかったため、試験体の電位の実測結果に基づいてき裂形状・寸法と電位分布の関係を求めることも困難であった⁽⁷⁾。

本研究では、板厚あるいは管壁に比べてき裂深さが

相対的に小さい、浅いき裂を対象として、まず、半だ円表面き裂を有する半無限体の厳密解を示す。しかし、同式では電位を求める場合に手数がかかるため、簡便に電位分布を評価できる式を提案し、その精度について検討する。さらに、低融点金属を用いて任意の形状・寸法のき裂を有する試験体を作成する方法を示すとともに、それを用いて半だ円表面き裂平板試験片の電位分布の実測を行う。

2. 半円および半だ円表面き裂を有する半無限体の電位分布

2・1 厳密解 図1に示すように、き裂面を xy -平面にとり、無限遠方において z 軸方向に一樣な直流電流が供給される半だ円表面き裂を有する半無限体を考える。一般に、流体力学における流れをポテンシャルの式および熱力学における熱伝導の式は、電位場に関する式と同形のラプラスの式で表されるので、流れポテンシャルの分布あるいは温度分布はそのまま電位分布に置き換えることができる。Kassir と Sih による一定温度こう配を有する無限体中に均一温度のだ円板が存在する場合の熱伝導解析の結果⁽⁸⁾から、図1に示す場合の電位分布(厳密解)は次式のようにになる。

$$V_E(c, \lambda) = E_0 z \cdot$$

* 平成元年10月15日 第67期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成元年3月20日。

^{*1} 学生員、京都大学大学院 (〒606 京都市左京区吉田本町)。

^{*2} 京都大学大学院。

^{*3} 正員、京都大学工学部。

$$\left\{1 + \frac{\lambda^2 c^4}{2a_0} \int_0^\infty \frac{ds}{s \sqrt{s(\lambda^2 c^2 + s)(c^2 + s)}}\right\} \dots\dots (1)$$

$$a_0 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\lambda^2 c^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta} d\theta \dots\dots (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{c^2 + \xi} + \frac{z^2}{\xi} = 1 \dots\dots (3)$$

ここで、 c は表面き裂半長、 a はき裂深さ、 λ はアスペクト比 ($=a/c$)、 E_0 は無限遠方における電界の強さ、 ξ は (x, y, z) のだ円面をなすだ円体座標値である。

上式によって電位分布を求めた際の数値計算の条件を表1に示す。図2は計算結果の一例であって、表面における z 軸上 ($x/c=y/c=0$) およびそれに平行な直線上 ($x/c=0, y/c=1$) の電位とアスペクト比の関係を示す(図中の実線)。式(1)~(3)は、 $\lambda=1(a=c)$ の場合には半円き裂の解となり、 $\lambda \rightarrow \infty(a \gg c)$ の場合には貫通き裂の解に接近する。表面における貫通き裂と半円き裂の電位分布は次のような簡単な式で表される。

(貫通き裂)

$$V_T(c) = V_E(c, \infty)$$

$$= E_0 c \sin \psi \cosh \eta \dots\dots (4)$$

$$y = c \cosh \eta \cos \psi \dots\dots (5)$$

$$z = c \sinh \eta \sin \psi \dots\dots (6)$$

(x, ψ, η) は、 (x, y, z) のだ円柱座標表示である。

(半円き裂)

$$V_C(c) = V_E(c, 1)$$

$$= E_0 c \cos \theta$$

$$\times \left\{ \sinh \nu - \frac{2}{\pi} \sinh \nu \cot^{-1}(\sinh \nu) + \frac{2}{\pi} \right\} \dots\dots (7)$$

$$y = c \cosh \nu \sin \theta \dots\dots (8)$$

$$z = c \sinh \nu \cos \theta \dots\dots (9)$$

$(\psi = \pi/2, \nu, \theta)$ は、 (x, y, z) の回転だ円体座標表示である。なお、境界条件を考えれば、式(1)~(3)はだ円き裂を有する無限体の電位分布と同じになる。

半無限体中に表面半だ円体(主軸 a, c, b)の切欠きがある場合の電位分布は、Lamb⁽⁹⁾およびMilne-Thomson⁽¹⁰⁾の完全流体に関する解析より

表1 数値計算の条件

Aspect ratio λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100
Location ($y/c, z/c$)	(0,0.1)(0.1,0.1).....(0.9,0.1)(1.0,0.1)(1.5,0.1)(2.0,0.1)(2.5,0.1)										
	(0,0.2)										
	(0,0.9)										
	(0,1.0)										
	(0,1.5)										
	(0,2.0)										
	(0,2.5)(0.1,2.5).....(0.9,2.5)(1.0,2.5)(1.5,2.5)(2.0,2.5)(2.5,2.5)										

A diagram showing a quarter-elliptical arch in a 2D coordinate system. The horizontal axis is labeled y and the vertical axis is labeled z . The origin is marked with 0 . A shaded region is bounded by the y -axis, the z -axis, and a quarter-elliptical curve. The curve starts at the origin and extends into the first quadrant.

A diagram showing a quarter-elliptical arch in a 2D coordinate system. The horizontal axis is labeled y and the vertical axis is labeled z . The origin is marked with 0 . A shaded region is bounded by the y -axis, the z -axis, and a quarter-elliptical curve. The curve starts at the origin and extends into the first quadrant. This diagram represents a different aspect ratio compared to the one on the left.

図1 半だ円表面き裂を有する半無限体

(a) $(x/c, y/c) = (0, 0)$

(b) $(x/c, y/c) = (0, 1)$

図2 半だ円表面き裂を有する半無限体表面の電位

$$V(c, a, b) = E_0 z$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{abc}{2 - \alpha_0} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(b^2 + s)^3 (a^2 + s)(c^2 + s)}} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\alpha_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(b^2 + s)^3 (a^2 + s)(c^2 + s)}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{c^2 + \xi} + \frac{z^2}{b^2 + \xi} = 1 \quad \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。ただし、式(1)～(3)は、単純に式(10)～(12)において $b=0$ としては得られないことに注意を要する⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

2・2 簡便評価法 式(1)～(3)より電位分布を求めるためには数値積分が必要であり、簡便に任意の位置における電位が求められない。本節では、電位差法によりき裂形状・寸法を決定する上で必要な表面における電位分布を簡便に与える評価式について考察する。

(a) $\lambda \geq 1$ の場合 アスペクト比 $\lambda (=a/c)$ が 1 に近い半だ円の電位分布は半円のそれに近く、アスペクト比が非常に大きいときは貫通き裂の電位分布に近くなる。これを考慮して、

$$V_E(c, \lambda) = \frac{1}{\lambda} V_C(c) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) V_T(c) \quad \dots\dots\dots (13)$$

なる近似式を提案する。ただし、 $V_E(c, \lambda)$ は、表面き裂半長 c 、アスペクト比 λ の半だ円き裂の電位であり、右辺の $V_C(c)$ と $V_T(c)$ は半円き裂と貫通き裂の電位である。 $V_C(c)$ と $V_T(c)$ は、各々式(7)～(9)と(4)～(6)より簡単に求められる。

(b) $\lambda < 1$ の場合 アスペクト比 $\lambda (=a/c)$ が零に近づくに従い、 z 軸近傍の電位分布は長さ $a (= \lambda c)$ の y 軸方向の貫通き裂(片側き裂)の解に近づく。したがって、式(13)と同様に考えて、

$$V_E(c, \lambda) = \lambda V_C(c) + (1 - \lambda) V_T(\lambda c) \quad \dots\dots\dots (14)$$

を得る。ここで、 $V_T(\lambda c)$ は y 軸方向貫通き裂の電位である。

式(13)または(14)より求められる電位と、数値積分によって値を求めた厳密解〔式(1)～(3)〕の電位を以下に比較する。計算は表 1 に示した半だ円き裂の各位置に対して行った。簡便式より求めた電位を図 2 (a)と(b)に破線で示す。厳密解(実線)と比較して、図 2 (b)中の一部を除いて、簡便式がほぼ妥当な値を与えることがわかる。また、図 3 (a)と(b)はそれぞれアスペクト比 3 と 0.3 の場合の簡便式と厳密解の誤差(百分率で表示)の分布を示す。図では対称性を考慮して第 1 象限の結果のみを示した。図 3 (a)より、アスペクト比が 3 の場合には誤差は $\pm 3\%$ 以内であり、表面全域にわたり簡便式は良好な近似となっている。一般に、アスペクト比が 1 より大きい場合には表面全域にわたり簡便式の誤差は最大 $\pm 3\%$ 程度であることが、この計算より明らかになった。一方、図 3 (b)より、アスペクト比が 0.3 の場合にはき裂面近傍、き裂先端、き裂前方に誤差の大きな領域が認められる。図 2 (b)からもわかるように、一般に、アスペクト比が 1 以下の場合にはこのような誤差の大きな領域がある。図 4 は、アスペクト比が 1 以下の場合について誤差 $\pm 5\%$ 以上の領域を示したものである。図の右方およびき裂面近傍を除くと、誤差は常に $\pm 5\%$ 以内であることがわかる。すなわち、この領域では簡便式により比較的精度良く電位を求めることができる。さらに、き裂中央 z 軸上 ($x/c=0, y/c=0$) ではアスペクト比の大きさを問わず簡便式の誤差は $\pm 3\%$ 以内である。

3. 半だ円表面き裂を有する 平板の電位分布

半だ円表面き裂を有する有限寸法の平板の電位分布

図 3 半だ円表面き裂に関する近似解の誤差 (%)

に関する厳密解を解析的に求めることは非常に困難である。そこで、ここでは実際に半だ円表面き裂平板試験体を作成し、その電位分布を測定する。

3・1 試験体作成方法および電位測定方法 試験体は、融点が70～80℃前後と極めて低いウッド合金（成分重量比：Bi 40%，Pb 20%，Sn 10%，その他20%）を用いて作成した。成形したアクリル容器に溶融したウッド合金を流し込み、後述の電気抵抗の高い材料で作成した模擬き裂を挿入した後冷却した。平板試験体の寸法を表2に示す。なお、容器両端に銅板を張り付け、これに直流電流を供給してき裂遠方で電流が一様になるようにした。ウッド合金は容易に溶融させることができるため、短時間でき裂形状・寸法などを変えて、新たな測定を行うことが可能である。例えば、ハンダゴテを用いてき裂近傍のみを溶融させて異なる形状・寸法の模擬き裂に容易に交換することができる。また、電位差を測定するプローブの設置方法に

についても同様である。

模擬き裂材料には厚さ0.15 mmのガラス薄片と厚さ約0.2 mmの雲母片を用いた。模擬き裂の形状は図5に示した貫通、半円、半だ円の3種類である。なお、図中の斜線部がき裂体に挿入されたき裂部分であり、残りは支持部である。

本研究では貫通、半円、半だ円き裂を有する平板試験体のみを作成したが、容器や模擬き裂の形状・寸法またはき裂の数などを変えて、本方法によって任意のき裂を有する試験体を極めて容易に作成することができる。

3・2 測定結果および考察 最初に貫通き裂平板の測定結果を図6に示す。電位は、き裂中央上下で測定したものであり、 $c/W=0.15$ の電位で無次元化して示してある。また、き裂長さも板幅で無次元化している。図中に示す曲線はJohnson⁽³⁾によって導かれた厳密解である。従来報告されている結果と同様、本測定値はJohnsonの解に良く一致している。これは、本方法による電位分布測定の妥当性を示している。

半円表面き裂平板の電位測定結果を図7に示す。なお、電位は $c/t(=a/t)=0.3$ における値で、き裂長さは

表2 平板試験体の寸法

	Width 2W(mm)	Thickness t(mm)	Length 2L(mm)
Type I	50	20	100
Type II	60	50	100
Type III	80	20	100

図4 近似解の誤差が±5%を超える範囲

図5 電位差測定に用いた模擬き裂の形状

図6 貫通き裂の長さ（測定結果）と電位の関係（測定結果）

板厚で各々無次元化して示してある。図中の曲線は半無限体中の半円き裂に対する厳密解である。測定結果と実線は $a/t=1$ 近傍を除き各位置とも良い一致を示している。 $a/t=1$ 近傍の不一致は背面の影響によるものと考えられる。栗原⁽¹¹⁾によって得られている半円表面き裂平板に対する有限要素法解析の結果を半無限体に対する厳密解として比較しても同様の結果が得られた(図8参照)。図8を詳細に見ると、プローブの位置がき裂に近い(z/t が小さい)ほど背面の影響は小さい a/t から現れる傾向がある。なお、境界条件の yz -平面と xz -平面に対する対称性を考慮すれば、上述の背面の影響は側面の影響と読み換えることが可能である。

図9(a)にアスペクト比 $\lambda \geq 1$ の半だ円表面き裂平板に対する測定結果($c=\text{const.}$)を示す。なお、電位は半円き裂の電位で無次元化してある。また、図中の曲線は式(1)~(3)の半無限体中の半だ円表面き裂の厳密解である。両者は比較的良く一致している。ただ

し、図の上端に示したように a/t が1に近い場合には、測定値は背面の影響を受けて実線の関係より上方へ逸脱する傾向が見られる。また、この逸脱は、 z/t が小さい程顕著である。ただし、 $\lambda \rightarrow \infty$ の場合の電位分布は貫通き裂のそれに近づくことより、その逸脱は貫通き裂の値が上限になると考えられる。

図9(b)はアスペクト比 $\lambda \leq 1$ の半だ円表面き裂平板に対する測定結果($c=\text{const.}$)である。測定結果は曲線で示した式(1)~(3)の関係と比較的良く対応している。

4. 結 言

半だ円表面き裂の形状・寸法を電位差法によって求める上で重要な電位分布について検討した。まず、半無限体中に存在する半だ円表面き裂の電位の厳密解を求めるとともに、簡便評価法について考察した。つづいて低融点金属を用いて作成した平板試験体により、

図7 半円き裂の表面長さ(=深さ)と電位の関係(測定結果)

図8 半円き裂に関するFEM解⁽¹¹⁾(有限体)と厳密解(半無限体)の比較

(a) $\lambda \geq 1$

(b) $\lambda \leq 1$

図9 半だ円き裂のアスペクト比と電位の関係(測定結果)

その電位分布を実測した。得られた結果は次のように要約できる。

(1) 半だ円表面き裂を有する半無限体中の電位分布は式(1)～(3)により求められる。しかし、この評価には数値積分が必要であるため、その計算は簡単ではない。そこで、初等関数の範囲で簡単に評価できる簡便式〔式(13)と(14)〕を提案した。アスペクト比が1以上の場合には、簡便式は表面全域にわたり $\pm 3\%$ 以内の誤差で電位分布を評価できる。アスペクト比が1以下でも $z/c > y/c$ では $\pm 5\%$ 以内の誤差である。

(2) 低融点金属により容易に任意形状試験体の電位分布を実験的に得る方法を提案した。この方法を用いて半円および半だ円表面き裂平板試験体の電位分布を測定した。平板試験体の電位は $a/t=1$ 近傍を除き半無限体の電位と良く一致した。

文 献

- (1) Beevers, C. J., *The Measurement of Crack Length and Shape During Fracture and Fatigue*, (1980), 85, Engineering Materials Advisory Services.
- (2) 矢川・福田, 機械の研究, **35**-11 (1983), 1237; **35**-12 (1983), 1324; **36**-1 (1984), 27.
- (3) Johnson, H. H., *Mat. Res. Stds.*, **5** (1965), 442.
- (4) Gangloff, R. P., *Fatigue Eng. Mat. Struct.*, **4**-1 (1981), 15.
- (5) 林・坂田・清水・志田, 材料, **33**-368 (1984), 602.
- (6) 大路・久保・阪上, 機論, **52**-477, A (1986), 1352.
- (7) Hicks, M. A. and Pickard, A. C., *Int. J. Fract.*, **20** (1982), 91.
- (8) Kassir, M. K. and Sih, G. C., *Development in Theoretical and Applied Mechanics*, **3** (1969), 117.
- (9) Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th ed. (1932), 110, Cambridge Univ. Press.
- (10) Milne-Thomson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, 4th ed., (1960), 493, London Macmillan & Co Ltd.
- (11) 栗原・藤田・老川, 機講論, No. 830-2 (1983-4), 50.