影響関数法による三次元混合モードき裂の
応力拡大係数の解析*白 鳥 正 樹^{*1}, 生 方 清 美^{*2}Analysis of Stress Intensity Factors for Three Dimensional
Mixed Mode Cracks by an Influence Function Method

Masaki SHIRATORI and Kiyomi UBUKATA

The authors have developed an influence function method (IFM) to analyze effectively the stress intensity factor, K , for surface cracks subjected to arbitrarily distributed surface stresses. In the developed IFM the influence coefficients are calculated by boundary element method in order to save the computing time and the labor of generating the input data. Some examples show that the developed method gives accurate values of K and that it is effective especially for the analysis of the mixed mode cracks.

Key Words: Fracture, Stress Intensity Factor, Mixed Mode Crack, Boundary Element Method, Influence Function Method

1. 緒 言

近年, 任意分布力を受ける三次元き裂の問題に対して, 影響関数法という手法が提案されている^{(1)~(4)}. これらの多くの研究は, き裂面の垂直方向に分布力を加えた場合のモード I き裂の K 値の解析がほとんどである. しかし, 実際の問題では, き裂面に垂直方向の分布力が負荷するだけでなく, き裂面に平行方向の分布力を受ける混合モードの三次元き裂となる場合もあると思われる. 混合モードの三次元き裂の K 値の解析は比較的少なく, 体積力法を用いて解析した石田・野口⁽⁵⁾⁽⁶⁾, 村上・石田⁽⁷⁾, 西谷・陳⁽⁸⁾の研究や, 有限要素法を用いて解析した東郷ら⁽⁹⁾, 吉岡ら⁽¹⁰⁾の研究が報告されている. 本研究では, 影響関数法を用いて三次元の任意方向に分布力が負荷する場合のき裂の K 値の解析を行った.

従来, 著者らが提案した影響関数法では, 影響係数を求める方法として, 有限要素法(FEM)を用いてい

た⁽⁴⁾. しかし, この手法で混合モードの三次元き裂の影響係数を求めるとき, 入力データの作成に手間がかかり, 影響係数の増大によって計算領域が大幅に増大するという難点が生じる. そこで, 本研究ではこの点を克服するため, 境界要素法(BEM)を用いることにより影響係数を求める手法を提案する. この手法を用いて混合モードのき裂問題や任意方向に分布力が加わるときの問題が簡単に求められることを示す.

2. 影 響 関 数 法

本手法は, 図 1 に示す重ね合わせの原理を基礎とする. すなわち, 図 1(a)に示すような任意分布力 q_0 を受けるき裂を有する弾性体の問題は, 図 1(b)に示すき裂のない弾性体が分布力 q_0 を受ける問題と, 図 1(b)の仮想き裂面上に生じる分布力 σ と等値逆符号の分布力 $-\sigma$ をき裂に受けるき裂材の問題[図 1(c)]の和として与えられる⁽¹¹⁾. したがって, 図 1(a)で示される問題の K 値は, 図 1(c)で示される問題の K 値と等しく, き裂面上で任意分布力を受けるき裂材の K 値を求める手法を開発しておけば十分である.

さて, ここでき裂面に任意の表面応力を受ける三次元の問題を考える. き裂面に任意の分布力を作用させたとき, き裂面に存在するある要素上での表面応力の

* 平成元年 10 月 14 日 第 67 期全国大会講演会において講演.
原稿受付 平成元年 3 月 29 日.

^{*1} 正員, 横浜国立大学工学部 (〒240 横浜市保土ヶ谷区常盤台 156).

^{*2} 学生員, 横浜国立大学大学院.

分布を図2に示すような二次の形状関数を用いて近似する。すなわち、き裂面を構成するある要素を正規化座標系 ξ_1 - ξ_2 とすれば、この面上に分布する表面応力ベクトル $\{p(\xi_1, \xi_2)\}$ は、

$$\{p(\xi_1, \xi_2)\} = \sum_{j=1}^8 N_j(\xi_1, \xi_2) \{p_j\} \quad (1)$$

または、

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^8 N_j(\xi_1, \xi_2) \begin{Bmatrix} p_x^j \\ p_y^j \\ p_z^j \end{Bmatrix} \quad (2)$$

で近似できる。ただし、 p_x, p_y, p_z は、それぞれ x, y, z 方向に作用する表面応力を示している。また、 $\{p_j\}$ は節点 j における表面応力ベクトルを示し、 p_x^j, p_y^j, p_z^j は、それぞれ節点 j における x, y, z 方向に作用する表面応力である。 $N_j(\xi_1, \xi_2)$ は節点 j における二次の形状関数を示す。図3には形状関数 N_j で表される z 方向の単位分布力 p_z^j を示す。 x, y 方向の単位分布力も同様に示すことができる。このような単位分布力ベクトルを節点 j ($j=1 \sim 8$) に与えたときのき裂前縁上の節点 i の K 値のマトリックスを $[K_{ij}]$ (図4に示す) とすれば、式(1)の分布で表される表面力ベクトルに対する節点 i の K 値のベクトルは、重ね合わせの原

理より、

$$\{K_i\} = \sum_{j=1}^8 [K_{ij}] \{p_j\} \quad (3)$$

または、

$$\begin{Bmatrix} K_I^i \\ K_{II}^i \\ K_{III}^i \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} K_{Ij}^{ix} & K_{Ij}^{iy} & K_{Ij}^{iz} \\ K_{IIj}^{ix} & K_{IIj}^{iy} & K_{IIj}^{iz} \\ K_{IIIj}^{ix} & K_{IIIj}^{iy} & K_{IIIj}^{iz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x^j \\ p_y^j \\ p_z^j \end{Bmatrix} \quad (4)$$

で表される。ここで、 $K_I^i, K_{II}^i, K_{III}^i$ はき裂前縁上の節点 i における K_I, K_{II}, K_{III} の値である。 K_{Ij}^{ix} はき裂面上の節点 j の x 方向に単位の分布力をかけたときのき裂前縁上の節点 i の K_I の値である。ほかの八つの成分も同様に定義できる。

一般に、き裂面上には複数個の要素があり、一つの節点がいくつかの要素の構成節点となっている場合は、各要素におけるその節点の形状関数で表される単位分布力を作成すればよい。

上記の定義にしたがって、効率的に K 値を解析することができる手順を以下に示す。

[STEP 1] き裂面上の全節点に対して、その節点で1、他の節点で零となるような単位の表面応力に対する K 値、すなわち影響係数マトリックス $[K_{ij}]$ をあらかじめ作成しておく。

[STEP 2] き裂のない部材の応力解析を行い、仮想き

図1 重ね合わせの原理

図3 単位分布力

図2 8節点アイソパラメトリック二次要素

図4 影響係数 $[K_{ij}]$ の定義

m : the number of nodes on crack front

n : the number of nodes on crack plane

$[K_{ij}]$: influence coefficient matrix

裂面上の表面応力を求める。この解析により、式(3)の $\{p_j\}$ が求められることになる。

[STEP 3] STEP 1で求めた影響係数マトリックス $[K_{ij}]$ のリストと、STEP 2で求めた仮想き裂面上の表面応力ベクトル $\{p_j\}$ を重ね合わせることにより、き裂面上に任意に分布する表面力を受ける問題の K 値は、

$$\{K_i\} = \sum_{j=1}^n [K_{ij}] \{p_j\} \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

で与えられる。ここで、 n はき裂面上の節点の数である。

上記の手法によれば、STEP 2はき裂のない応力解析であるため解析は容易である。そこで、STEP 1における K 値のリスト $[K_{ij}]$ を作成することが重要となる。

この影響係数を作成するのは、従来、著者らは有限要素法を用いてきた⁽⁴⁾。この場合の影響係数はき裂面に垂直な方向に単位分布力を与えたときの K_I 値、すなわち式(4)の K_{II}^* しか解析していない。ここでは、任意方向の単位分布力を与えたときの K_I 、 K_{II} 、 K_{III} の影響係数を作成することとする。従来ではき裂面上の節点の数の単位分布力に対する荷重ベクトルがあればよかったものが、今回の場合はその3倍の荷重ベクトルが必要となる。また、混合モードのき裂の問題では対称性を利用できないので、全体の領域を解析しなければならない。そのため、入力データの作成に手間がかかり、計算領域が大きくなるという問題が生じる。

3. 境界要素法に基づく 影響関数法の定式化

上記の問題を解析するため、本研究では、有限要素法の代わりに境界要素法を用いる手法を開発した。

まず、境界要素法の定式化について簡単に示しておく。物体力のない三次元弾性問題における境界積分方程式は、

$$\begin{aligned} C_{ij}(P)u_j(P) + \int_{\Gamma} p_j^*(P, Q)u_j(Q)d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} u_j^*(P, Q)p_j(Q)d\Gamma \quad \cdots \cdots \cdots (6) \end{aligned}$$

で与えられる⁽¹²⁾。ここで、 $C_{ij}(P)$ は境界 Γ 上の点 i の幾何学的形状によって決まる定数であり、 u_j 、 p_j は、それぞれ変位ベクトルと表面力ベクトルである。 u_{ij} 、 p_{ij} は基本解で、ここでは無限媒体中の一点に単位集中力を作用させたときの解(Kelvinの解)を用いる。物体の境界を N 個の境界要素に分割し、式(6)の境界積分方程式を離散化する。このとき、要素内の変位と表面力は式(1)の二次の形状関数 $N_j(\xi_1, \xi_2)$ ($j=1$

～8)を用いて近似する。

$$\begin{aligned} C_{ij}(P)u_j(P) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} p_{ij}^*(P, Q)u_j(Q)d\Gamma \\ = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u_{ij}^*(P, Q)p_j(Q)d\Gamma \quad \cdots \cdots \cdots (7) \end{aligned}$$

上式をすべての節点 P について求めると次式のマトリックス方程式が得られる。

$$HU = GP \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

ここで、 U は全節点の変位ベクトル、 P は全節点の表面力ベクトル、 H 、 G はそれぞれ変位と表面力の係数マトリックスとなる。普通の境界要素法では式(8)に境界条件を代入し、連立一次方程式としてこの問題を解析する。

しかし、影響係数を求める手法では以下に示すような考え方をする。いま、簡単のため式(8)を次のような式として表す。

$$[H_1 H_2] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [G_1 G_2] \begin{Bmatrix} p_1 \\ \bar{p}_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

ここにおいて、 $-$ を付けたのはあらかじめ規定されていることを意味する。したがって、未知節点量は次式により得られる。

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [-G_1 H_2]^{-1} [-H_1 G_2] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{p}_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

ところで、式(10)において G 、 H マトリックスの係数の値は荷重ベクトルの値によって変わらないので、式(11)に示すように荷重ベクトルを並べることで、一度の解析で複数の荷重条件に対する結果が得ることができる。

$$\begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{Bmatrix} = [-G_1 H_2]^{-1} [-H_1 G_2] \begin{Bmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{12} \\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

ここで、荷重ベクトルとして単位行列 $[I]$ を考える。

$$\begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{Bmatrix} = [-G_1 H_2]^{-1} [-H_1 G_2] [I] \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

この単位行列は、ある節点で1、その他の節点で零となる分布力、すなわち単位分布力を示している。そのため、荷重ベクトルとして新たな領域を作成する必要がなく、式の変形のみで式(12)が求められる。式(12)は、任意の節点(ただし、変位既知節点を除く)に単位分布力を負荷した場合のそれぞれの節点における変位が求められることを示している。これらの変位のうち必要な節点を用いて、変位外そう法により K 値を求める。これはすなわち、影響係数 $[K_{ij}]$ を求めているにほかならない。

このように境界要素法を用いて影響係数 $[K_{ij}]$ を作成し、データベースとして蓄えておく。影響関数法を

適用して $[K_{ij}]$ としき裂のない部材の仮想き裂面上の応力分布を重ね合わせるにより、簡単に K 値を求めることができる。

4. 解析例

以上の手法に基づいて三次元影響関数法プログラムを開発した。このプログラムの特徴を以下に示す。

本プログラムで使用する要素は、8 節点アイソパラメトリック二次要素(図2)である。この要素には、Gauss-Legendre の 8 点公式により、面内 64 の積分点を設けて積分評価を行う。また、特異積分の評価方法としてサブエレメント法⁽¹³⁾を用いた。

き裂の問題では、き裂前縁からの距離 r に応じて変位と応力が $\sqrt{r}$, $1/\sqrt{r}$ の特性を持つので、き裂前縁に接する要素に変位形、および応力形特異要素を用いた⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。

また、混合モードの K 値が解析できるように、プログラムに領域分割法⁽¹⁶⁾を組み込んだ。

K 値の決定法としては変位外そう法を用いた。

最後に計算時間の短縮をはかるために、このプログラムはスーパーコンピュータで計算を行えるようにプログラミングをした⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾。

このプログラムを用いて、解析したいいくつかの例を以下に示す。ただし、以下の問題は材料定数として、縦弾性係数 $E=206$ GPa, ポアソン比 $\nu=0.3$ で解析を行った。

4・1 内部に円形き裂を持つ丸棒の解析 はじめに、開発したプログラムの信頼性を調べるため、すでに解の得られている丸棒中の内部円形き裂(図5)の K 値の解析を行った。形状は $H/R=6.0$ の丸棒で、 $a/R=$

図5 円形内部き裂を持つ丸棒

0.2, 0.4, 0.6, 0.8 の 4 種類の円形き裂の形状で解析した。混合モードの解析ができるように対称性を利用せず全体の解析を行った。総節点数は 628, 総要素数は 168 である。この影響係数を作成し、図6に示す(a)一様引張り, (b)ねじり, (c)せん断(ただし、 $a/R=0.2$ のときのみ)をき裂面上に作用させたときの解を求めた。

まず、一様引張りとねじりの解析結果を Benthem-Koiter の解⁽¹⁹⁾と併せて図7に示す。図7は、 $a/R=0.6$ の場合の解析結果を示している。縦軸の F は、 K 値を $\sigma_0\sqrt{\pi a}$ で正規化した値で、一様引張りの F は F_I を、ねじりの F は F_{III} を示す。横軸は、き裂前縁に沿う角度の無次元表示である。一様引張り、ねじりともに Benthem らの解と良く一致している。

次に、き裂長さを変化させた場合の解析結果を図8に示す。この横軸はき裂長さを無次元化した値である。き裂長さが変化しても精度良く解析できている。

次は、せん断を与えたときのき裂前縁に沿う K 値の分布を図9に示す。この解析では $a/R=0.2$ の場合を示している。ここで、円形き裂が存在する無限媒体中にせん断を与えたときの解析解である Kassir-Sih の解⁽²⁰⁾も併せて載せておく。これを見ても角度によらず良い解が得られている。

このように影響係数を一度求めておけば、種々な荷重条件の場合に、重ね合わせをするだけで簡単に K 値が求められる。また、これらの結果の良好な一致は、本プログラムの信頼性を保証するものであると考えられる。

なお、計算時間に関しては、スーパーコンピュータとして東京大学大型計算機センターの HITAC S 820 を用いた場合には 21 s (VPU 時間は約 20 s) を要した。

4・2 半円表面き裂を持つ平板の解析 著者らが有限要素法で求めた影響係数を用いた方法と比較を行うため、平板中の半円表面き裂(図10)の K 値の解析を行った。図10中の $a/t=0.2$, $a/b=a/h=0.2$ である。混合モードの解析ができるように対称性を利用せず、

(a) 一様引張り (b) ねじり (c) せん断

図6 き裂面上に負荷する分布力

全体の解析を行った。総節点数は 846, 総要素数は 208 である。この影響係数を作成し、図 11 に示すき裂面上のき裂深さ方向(図 11 中の ξ 方向)に対して零、一、二、三次に変化するき裂面に垂直な方向の分布力の 4 種類をき裂面に作用させたときの解析を行う。

図 12 に解析結果を FEM で求めた影響係数を用いた解⁽²¹⁾と Raju-Newman の解⁽²²⁾を併せて示した。ただし、Raju-Newman の解は、荷重分布が一樣と線形のときのみで、線形分布は一樣引張りと一樣曲げに対する解を重ね合わせて求めた結果である。縦軸の F は、 K 値の無次元表示である。横軸はき裂前縁に沿う角度の無次元化である。本例題では、表面部を平面応力状態とし、その他は平面ひずみ状態を仮定して解析した。FEM で求めたものと比較すると良く一致していることがわかる。

また、本例題について任意方向に分布力を負荷した

場合の混合モードの K 値の影響係数を作成するのに、FEM を用いて解析しようとする、節点数で 4000, 要素数で 800 程度必要となり、入力データが膨大になることがわかる。このように入力データが膨大となる FEM に比べて、本手法を用いると節点数が 850 程度で任意方向に負荷された場合の K 値の解析ができる。

4.3 傾斜する半円表面き裂を持つ平板の解析

混合モードのき裂の問題として、平板中の傾斜する半円表面き裂(図 13)の問題を解析する。 $a/t=0.2$ のき裂形状で、 $a/b=0.2$, $a/h=1/7$ の平板である。傾斜角 θ は 15, 30, 45° の 3 とおりの解析を行った。節点数は 846, 要素数は 208 である。この影響係数を作成して、荷重条件として一樣引張りと曲げの 2 とおりの解析を行った。

図 14 に一樣引張りを与えたときの解析結果を示す。これは傾斜角 θ を変化させたときの最深部(点 A)の

図 7 き裂前縁に沿う F 値の分布 (一樣引張り, ねじり)

図 8 き裂長さの変化による応力拡大係数(一樣引張り, ねじり)

図 9 き裂前縁に沿う F 値の分布 (せん断)

図 10 半円表面き裂を持つ平板

図 11 代表的な基本モードの分布力

結果で、半無限体中に傾斜する半円表面き裂の解析結果である村上・石田の解⁽⁷⁾も併せて示した。横軸は傾斜角を示している。両者は良く一致している。また、一様引張りと曲げの解析結果を図15に示しておく。

混合モードのき裂の問題でも、影響係数を求めておくことにより違う応力分布の解析が式(5)のアルゴリズムにより簡単に求められる。

図12 き裂前縁に沿う F 値の分布

図13 傾斜する半円表面き裂を持つ平板

図14 傾斜角度の変化による最深部の応力拡大係数(一様引張り)

(a) 一様引張り

(b) 曲げ

図15 解析結果

5. 結 言

影響関数法によれば、以下の手順で応力拡大係数が解析できる。

(1) き裂面上に形状関数で表される単位分布力を負荷した場合の K 値のリスト $[K_{ij}]$ をあらかじめ作っておく。

(2) き裂のない部材の応力解析を行い、仮想き裂面上の応力分布を求める。

(3) 上記(1)で求めた影響係数 $[K_{ij}]$ のリストと(2)で求めた仮想き裂面上の応力分布を重ね合わせるにより、(2)で扱った問題でき裂が存在する場合の K 値が簡単に求められる。

ここでは、境界要素法を用いてこの影響係数を作成する手法を提案した。この手法を用いることにより、

以下のメリットが得られた。

- (i) 入力データの作成の手間が軽減された。
- (ii) 境界要素法では、影響関数法の考えを導入するのが簡単である。
- (iii) 新たに荷重ベクトルの領域を確保する必要がない。

この手法を使って、丸棒中の円形き裂、平板中の半円表面き裂の問題を精度良く解析できることを示した。また、平板中に傾斜する半円表面き裂の問題で、混合モードのき裂の問題でも簡単に K 値が評価できることを示した。このように、任意の方向に分布する表面力に対し、き裂前縁の各点の K_I , K_{II} , K_{III} を効率的に評価できることが確認された。

文 献

- (1) 矢川・ほか2名, 機論, 45-395, A(1979), 734.
- (2) Besuner, P. B., *ASTM Spec. Tech. Publ.*, 590(1976), 403.
- (3) 相沢・矢川, 機構論, No.814-12(1982), 35.
- (4) 白鳥・ほか2名, 機論, 51-467, A(1985), 1828.
- (5) 石田・野口, 機論, 49-442, A(1983), 707.
- (6) 石田・野口, 機論, 50-450, A(1984), 148.
- (7) 村上・石田, 機論, 50-455, A(1984), 1359.
- (8) 西谷・陳, 機論, 50-455, A(1984), 1376.
- (9) 東郷・ほか2名, 機論, 52-476, A(1986), 909.
- (10) 吉岡・ほか4名, 機構論, No.830-2(1983), 175.
- (11) 岡村, 線形破壊力学入門, (1976), 40, 培風館.
- (12) Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*, (1978), ページ, Pentech Press.
- (13) 北川・ほか3名, 機論, 51-463, A(1985), 129.
- (14) Cruse, T. A. and Wilson, R. B., *AFSOR-TR*, 78-0355(1977).
- (15) 浅野・ほか3名, 機論, 51-465, A(1985), 1515.
- (16) Blandford, G. E., *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 17(1981), 387.
- (17) 村田・ほか2名, スーパーコンピュータ, (1985), 丸善.
- (18) 三好・平井, 機論, 53-486, A(1987), 250.
- (19) Benthem, J. P. and Koiter, W. T., *Stress Intensity Factors Handbook*, 2(1987), ページ, Pergamon Press.
- (20) Kassir, M. K. and Sih, G. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 33(1966), 601.
- (21) 白鳥・ほか2名, 機論, 52-474, A(1986), 390.
- (22) Raju, I. S. and Newman, J. C., *Eng. Fract. Mech.*, 11(1979), 817.