光塑性法による単軸応力場における
円孔切欠縁の塑性ひずみ集中*島 本 聡^{*1}, 高 橋 賞^{*2}Plastic Strain Concentration by Means of Photoplasticity at a Circular
Hole Edge in a Finite Sheet Subjected to Uniaxial Tension

Akira SHIMAMOTO and Susumu TAKAHASHI

High molecular materials are generally used for many important structural members of machines, in spite of the present circumstances where the ductile fracture characteristics have not been sufficiently known. The present study has been directed to determine the plastic strain concentration factor at the edge of a round-hole notch under the uniaxial stress field. Plastic strain concentration factors at the edge of around-hole notch were measured by photoelastic stress analysis technique under different tension rate. Concentration factors were calculated from results obtained and the experimental result was compared with the theoretical values. Fairly good agreement was found between them.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Stress Concentration, Photoplasticity, Plasticity, Plastic Strain Concentration

1. 結 言

アルミニウム合金, 炭素鋼, クローム・ニッケル鋼などの引張りにおける応力-ひずみ曲線に関する弾塑性問題および切欠きを有する帯板などに単軸引張荷重を静的に負荷したときの弾塑性応力集中に関する問題を光弾性的に解析するには, これらの材料と相似な弾塑性挙動を示すモデル材料が必要である。従来からも相似な弾塑性挙動を示す高分子材料の光弾性法による研究については多くの報告が見受けられる。これまでもセルロイドあるいはポリカーボネイトなどの材料は弾塑性挙動の解析に最も適した材料として考えられてきた。伊藤⁽¹⁾はポリカーボネイトによる弾塑性問題の解析について報告している。さらに Gurtman, Jenkins と Tung⁽²⁾, Brinson⁽³⁾はセルロイドとポリカーボネイトの両者を使用することによって, 弾塑性問題の解析に成功している。しかし, 各種の高分子材料における弾塑性領域での引張速度の差異による円孔切欠縁の弾

塑性応力集中係数についての系統的な研究はあまりなされていないようである。そこで, 著者らは⁽⁴⁾先にアルミニウム合金, ニッケルクロム鋼などの材料と相似な弾塑性挙動を示すモデル材料としてセルロイド, セルロースアセテートおよびポリカーボネイトの弾塑性域における応力-ひずみ曲線の解析式を得た。また, 弾塑性域の広いひずみ範囲において光塑性用材料として最も適した材料はポリカーボネイトであることを実験的に明かにした⁽⁵⁾。一般に高分子材料は, 延性破壊特性がまだ十分解明されていないにもかかわらず, すでにかなり重要な機械構造部品に使用されているのが現状である。そこで本研究では, このような観点から光塑性材料として最も適しているポリカーボネイト帯板に円孔切欠きを有する場合について各種ひずみ速度における円孔切欠縁の塑性ひずみ集中係数を実験的に求めるとともに Wu-Cheng Huang が提案⁽⁶⁾している理論解を適用し, これとの比較検討を行った。その結果, 実用材としても広く使用されているポリカーボネイトの破壊を考えると, その前駆症状としての塑性領域における塑性ひずみ集中係数に関する基礎資料を得ることができた。

* 平成元年 10 月 15 日 第 67 期全国大会講演会において講演, 原稿受付 昭和 63 年 12 月 15 日。

*¹ 正員, 埼玉工業大学工学部 (〒369-02 埼玉県大里郡岡部町普濟寺 1690)。

*² 正員, 関東学院大学工学部 (〒236 横浜市金沢区六浦町 4834)。

2. 試験片および実験方法

2.1 供試材および試験片 試料は、市販のポリカーボネイト(レキサン 9030)の帯板を供試材とした。試験片の厚さは $t=2\pm 0.05\text{mm}$ で、図 1 に示すような平滑および中央に直径 4 mm 一定の円孔をもつ帯板試験片を作成した。試験片は、温度 20°C 、湿度約 65% の恒温室において長時間乾燥させた後同室にて実験を行った。

本実験に用いた試験機は TENSILON/STM-F-1000 BP および RECORDER (MODEL-AR-6000 series) を使用し、ひずみ速度を 0.5, 0.33, 0.17, 0.083, 0.05, 0.017, 0.0083 (1/min) の 7 段階に変化させ、各試験片に引張荷重を負荷することにより光塑性じまの各パターンを観察し、各荷重点における円孔切欠き近傍の光塑性じまを連続的に順次写真撮影を行った。

3. 理論解析および数値計算

3.1 理論解⁽⁶⁾ 中心に円孔を有する無限平板が単純引張荷重(図 2 参照)を受けているものとする。平板は厚み方向の応力を生ずることなく平面応力のみとする。応力関数を ϕ とすると平面応力または平面ひずみに対する釣合い方程式は

$$\sigma_r = \frac{\phi'}{r} + \frac{\phi''}{r^2}, \quad \sigma_\theta = \phi'', \quad \sigma_{r\theta} = \frac{\phi'}{r^2} - \frac{\phi''}{r} \quad \dots (1)$$

ただし、 r, θ は円柱座標で、 $(\)' = \partial/\partial r$, $(\)'' = \partial/\partial \theta$ である。ひずみは適合方程式を満足しなければならない。

$$(r\epsilon_\theta)'' + \frac{1}{r}\epsilon_r'' - \epsilon_r' - \frac{1}{2r}(\epsilon_r'\theta_r)' = 0 \quad \dots (2)$$

また平面応力問題では板厚方向の応力成分は無視できるので、有効応力は、

$$\sigma^2 = \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta + 3\sigma_{r\theta}^2 \quad \dots (3)$$

ただし、ひずみは塑性変形理論および Von Mises の降伏のクライテリオン、

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= 1 + \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \cdot \delta_{kk} \\ &+ \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) S_{ij} \text{ より} \\ \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta \right) \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r \right) \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \sigma_{r\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで E_s は Ramberg-Osgood の式を用いるならば次式で表される。

$$\frac{1}{E_s} = \frac{1}{E} \left\{ 1 + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^{n-1} \right\} \quad \dots (5)$$

解析の簡素化のために次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{\sigma_r}{\sigma_\infty}, \quad S_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_\infty}, \quad S_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma_\infty} \\ S &= \frac{\sigma_r}{\sigma_\infty}, \quad \lambda = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_1}, \quad P = \frac{3}{7} \lambda^{n-1} \\ x &= \frac{a}{r}, \quad \Psi = x^2 \frac{\phi}{\sigma_\infty} \end{aligned} \right\} \quad \dots (6)$$

式(6)において σ_1 は公称降伏応力、 σ_0 は $E_s=0.7E$ によって定義されたセカント係数、 σ_∞ は無限遠点での一様応力、 n は材料の種類によって特性づけられる応力-ひずみ曲線に適用する値である。そこで適合方程式(2)を書き改めると次のようになる。

$$x^2 \epsilon_\theta'' + \epsilon_r'' + x \epsilon_r' - 2 \epsilon_r' + 2 x \epsilon_r' \theta_r = 0 \quad \dots (7)$$

ただし $(\)' = \partial/\partial x$, $(\)'' = \partial/\partial \theta$ である。また変形された応力関数 Ψ を用いると、各応力の無次元量成分は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} S_r &= 2\Psi - x\Psi' + \Psi'' \\ S_\theta &= 2\Psi - 2x\Psi' + x^2\Psi'' \\ S_{r\theta} &= x\Psi'' + \Psi' \end{aligned} \right\} \quad \dots (8)$$

応力とひずみの関係は

図 1 試験片の形状と寸法(mm)

図 2 円孔を有する無限板に単純引張りを負荷した場合

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_\infty}{E}(S_r - \nu S_\theta) + \sigma_\infty \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \left(S_r - \frac{1}{2} S_\theta \right) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_\infty}{E}(S_\theta - \nu S_r) + \sigma_\infty \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \left(S_\theta - \frac{1}{2} S_r \right) \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{\sigma_\infty}{E}(1 + \nu) S_{r\theta} + \frac{3}{2} \sigma_\infty \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) S_{r\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $1/E_s = 1/E \cdot (1 + PS^{n-1})$ である。式(8)、(9)を式(7)に代入すると、変形された応力関数 Ψ を用いた支配方程式は式(10)となる。

$$\begin{aligned} & (1 + PS^{n-1})(2x^4 \Psi'''' + 4x^3 \Psi''' - 2x \Psi'' \\ & + 4x^2 \Psi'''' + 2x \Psi' - 4x \Psi'' + 8 \Psi' + 2 \Psi''') \\ & + P\{(S^{n-1})'(4x^4 \Psi''' + x^3 \Psi'' - 2x^2 \Psi' \\ & + 4x^2 \Psi'' + 2x \Psi - 4x \Psi') \\ & + (S^{n-1})'(4x^2 \Psi'' - 6x \Psi' + 10 \Psi + 4 \Psi') \\ & + 6(S^{n-1})''(x^2 \Psi'' - x \Psi') \\ & + (S^{n-1})''(2x^2 \Psi - 3x^3 \Psi' + 2x^4 \Psi'' - x^2 \Psi') \\ & + (S^{n-1})''(2 \Psi + 2 \Psi'' - x^2 \Psi'')\} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 $S = (S_r^2 + S_\theta^2 - S_r S_\theta + 3S_{r\theta}^2)^{1/2}$ である。またここで平面応力の場合と同じ無次元量を導入し、さらに Ramberg-Osgood の式を用いれば平面ひずみの場合の支配方程式は、次の常微分方程式で表される。

$$\sum_{m=0,2,4,\dots} (B_{4m} \psi_m'''' + B_{3m} \psi_m''' + B_{2m} \psi_m'' + B_{1m} \psi_m' + B_{0m} \psi_m) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

ここで $j=0, 2, 4, \dots$ である。よってニュートン法により支配方程式(11)を $G(\Psi)=0$ として近似解を求めた。

3.2 応力集中係数の数値計算 単純引張りを受ける円孔を有する無限平板(図2参照)が板の厚さ方向の応力(σ_x)はなく平面応力のみとすれば、変形された応力関数 Ψ は

$$\Psi = \sum_{m=0,2,4,\dots} \Psi_m(x) \cos m\theta$$

である。一方円孔縁での境界条件は

$$S_r = 0, S_{r\theta} = 0$$

または式(8)より

$$\left. \begin{aligned} 2\Psi(1) - \Psi'(1) + \Psi''(1) &= 0 \\ \Psi''(1) - \Psi'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

一方無限遠方($x=0$)での各応力無次元量の成分は、

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), S_\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ S_{r\theta} &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

そこで式(8)より

$$\Psi(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\theta \dots\dots\dots (13)$$

次に $x=0$ での第2の境界条件を得るために式(7)を

書き改めると次のようになる。

$$x\varepsilon_r'' + \varepsilon_r' + 2\varepsilon_{r\theta}' = \frac{-\varepsilon_r'' + 2\varepsilon_{r\theta}'}{x}$$

ただし式(7)を x で微分し、さらに $x=0$ で特異がないものとするれば、

$$\varepsilon_r''(0) + \varepsilon_{r\theta}'(0) = 0$$

ところで ε_r は

$$\varepsilon_r = \sum_{m=0,2,4,\dots} h_m(x) \cos m\theta$$

の形をもっているので

$$\varepsilon_r'(0) = 0$$

そこで応力ひずみの関係式(9)は

$$\Psi'(0) + \Psi''(0) = 0$$

ここで Ψ は

$$\Psi = \sum_{m=0,2,4,\dots} \Psi_m(x) \cos m\theta$$

の形をしている。そこで無限遠での第2の境界条件は

$$\Psi'(0) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

境界条件(12)は $\phi_0(1)$ に対する一つの境界条件を与え、また第2の境界条件は $\phi_0(1)$ を任意の定数に等しいとおくことにより求められる。式(8)、(9)を式(7)に代入し、 λ が有限の場合、方程式(10)を式(12)、(13)および(14)の境界条件のもとでニュートン法を用いて数値計算すれば容易に解(k_σ)が得られる。数値計算により得られた応力集中係数と荷重パラメータ線図を図3に示す。

4. 円孔縁の塑性ひずみ集中係数

円孔縁では $\varepsilon_1 = (10/7)(\sigma_1/E)$ の関係があり、円孔縁における塑性ひずみ集中係数 $K\varepsilon = (\varepsilon_\theta)_{\text{hole}}/\varepsilon_1$ は Ramberg-Osgood の式(5)より得られる。

$$(\varepsilon_\theta)_{\text{hole}}/\varepsilon_1 = 0.7\lambda K_\sigma + 0.3(\lambda \cdot k_\sigma)^n \dots\dots\dots (15)$$

図3から λ と k_σ の値を読み取ることにより式(15)から塑性ひずみ集中係数は求まる。その結果を表1と図4に示す。

本実験で用いたポリカーボネイトの材料定数は $n=11$ であり⁽⁴⁾、光塑性的性質(光弾性しまたは塑性域において主ひずみの差に比例する⁽⁵⁾)を用いて単軸応力場における円孔縁近傍の塑性ひずみ集中係数を求めた。その結果の一例を表2～表4と図4に示す。また、平滑材の各ひずみ速度における応力-ひずみ線図および等色線しま写真の一例[引張ひずみ速度 0.0083(1/min)]を図5と図6に示す。図4は数値計算および実験により求めた結果を示したもので、弾塑性域において実験値は数値計算値に対して引張ひずみ速度が 0.083～0.0083(1/min)の場合には全般にわたりわずかながら低めであるが、引張ひずみ速度が 0.5, 0.33,

0.17(1/min)の場合は荷重パラメータが0.25近傍を境に数値計算値とほぼ一致することが確かめられた。以上の結果よりわかるように、ポリカーボネイト材のひずみ集中係数(K_ϵ)は材料定数の影響⁽⁴⁾よりも、引張ひずみ速度の依存性(図5参照)による影響のほうが著しいことが確かめられた。図5においてa, b, cグループは0.5~0.17(1/min)の比較的速い場合のひずみ速度であり、d, e, f, gグループはひずみ速度が0.083~0.0083(1/min)の極めて遅い場合である。また応力-ひずみ曲線d, e, f, gグループはa, b, c, グループのひずみ速度の約1/2~1/60のひずみ速度の場合であり、cとdの間にその間のひずみ速度の応力-ひずみ曲線が挿入される。特に引張ひずみ速度0.0083(1/min)の場合は表1と表4および図4より明らかに数値計算値との差が約1.3%であり、引張ひずみ速度による影響が最も著しい。しかし、傾向としては、ほぼ一致することがわかった。したがって、本実験結果から考えられることは材料定数 n の値よりも引張ひずみ速度をある速度まで速くする必要があるも

のと思われる。また、荷重パラメータが0.25近傍において塑性が始まり、荷重パラメータの増加に伴って塑性ひずみ集中係数も増加することが確かめられた。

5. 結 論

円孔切欠きを有する帯板が単軸引張応力を受ける場合の塑性ひずみ集中係数を光塑性実験および数値計算により求め比較検討した結果、次のことが明らかになった。

(1) 数値計算および実験により求められたひずみ集中係数の値は、荷重パラメータ $\lambda(=\sigma_\infty/\sigma_1)$ の増加とともに増加していく傾向を示す。

(2) 荷重パラメータ λ が0.25近傍において塑性

表1 数値計算により求めた弾塑性ひずみ集中係数

NO	λ	$K\sigma$	σ_{nom} (MPa)	ϵ_{nom} ($\times 10^{-3}$)	ϵ_{max} ($\times 10^{-3}$)	$K\epsilon$	$\frac{\epsilon_{nom}}{\epsilon_1}$
1	0.1	2.97	5.69	2.71	6.69	2.47	0.084
2	0.2	2.96	11.38	5.42	13.44	2.47	0.169
3	0.3	2.84	17.06	8.13	20.24	2.49	0.254
4	0.4	2.48	22.75	10.84	27.20	2.51	0.338
5	0.5	2.16	28.44	13.55	34.55	2.55	0.423
6	0.6	1.90	34.13	16.26	46.05	2.83	0.508
7	0.7	1.74	39.81	18.97	59.76	3.15	0.592
8	0.8	1.56	45.50	21.68	81.54	3.76	0.677
9	0.9	1.48	51.19	24.39	116.72	4.78	0.762
10	1.0	1.36	56.88	27.10	175.45	6.47	0.846

図3 応力集中係数-荷重パラメータ線図

図4 ひずみ集中係数-荷重パラメータ線図

表 2 実験より求めた弾塑性ひずみ集中係数
[0.083(1/min)]

NO	P(N)	n	E_{max} ($\times 10^{-3}$)	E_{nom} ($\times 10^{-3}$)	$K\epsilon$	$\frac{E_{nom}}{E_1}$
1	167	3	4.90	2.48	1.97	0.057
2	304	5	8.17	4.53	1.81	0.110
3	451	8	13.07	6.72	1.94	0.164
4	588	10	16.34	8.76	1.87	0.214
5	716	12	19.61	10.66	1.84	0.260
6	843	15	24.51	12.56	1.95	0.304
7	981	19	31.04	14.60	2.13	0.351
8	1167	23	37.58	17.38	2.17	0.424
9	1236	25	40.85	18.40	2.21	0.449
10	1324	27	44.11	19.71	2.24	0.481
11	1559	37	60.45	23.22	2.60	0.566
12	1608	40	65.36	23.95	2.73	0.584

表 3 実験より求めた弾塑性ひずみ集中係数 [0.5(1/min)]

NO	P(N)	n	E_{max} ($\times 10^{-3}$)	E_{nom} ($\times 10^{-3}$)	$K\epsilon$	$\frac{E_{nom}}{E_1}$
1	270	5	8.16	4.02	2.03	0.086
2	512	10	16.32	7.62	2.14	0.162
3	768	16	26.11	11.45	2.28	0.244
4	996	21	34.26	14.83	2.31	0.316
5	1223	26	42.42	18.21	2.33	0.387
6	1451	34	55.47	21.60	2.57	0.460
7	1701	42	68.53	25.41	2.70	0.541
8	1948	55	89.74	29.00	3.09	0.617
9	2233	83	135.42	33.24	4.07	0.707

表 4 実験より求めた弾塑性ひずみ集中係数
[0.0083(1/min)]

NO	P(N)	n	E_{max} ($\times 10^{-3}$)	E_{nom} ($\times 10^{-3}$)	$K\epsilon$	$\frac{E_{nom}}{E_1}$
1	186	3	4.90	2.77	1.77	0.060
2	304	5	8.17	4.45	1.81	0.096
3	441	7	11.48	6.57	1.75	0.142
4	569	9	16.34	8.46	1.75	0.184
5	696	11	17.97	10.36	1.74	0.225
6	824	13	21.24	12.26	1.75	0.266
7	941	15	24.51	14.00	1.75	0.304
8	1059	17	27.78	15.77	1.76	0.342
9	1177	20	32.68	17.52	1.87	0.380
10	1275	22	35.95	18.98	1.89	0.412
11	1373	24	39.21	20.44	1.92	0.444
12	1461	27	44.11	21.75	2.00	0.473
13	1549	29	47.38	23.07	2.06	0.501
14	1687	34	55.56	25.11	2.21	0.546
15	1844	43	70.26	27.45	2.56	0.596

図 5 応力-ひずみ曲線(ひずみ速度の影響)

図 6 光弾性しまの変化例

が始まっているものと思われる。

(3) 光塑性実験により単軸応力場における円孔縁の塑性ひずみ集中係数を求めた結果、数値計算により求めた値とほぼ一致することが確かめられた。

(4) 引張ひずみ速度の変化による円孔縁の塑性ひずみ集中係数 K_e は荷重パラメータが 0.25 まで引張ひずみ速度による影響は認められない。しかし、 $\epsilon_{nom}/\epsilon_1 > 0.25$ になると引張ひずみ速度 0.083 (1/min) を境にしてひずみ速度 0.083 (1/min) 以下の場合には K_e に対してひずみ速度の影響は認められず、ひず

み速度 0.083 (1/min) 以上の場合は K_e に対して影響あることが確かめられた。

文 献

- (1) Ito, K., *Jml. of the Science Res. Inst.*, **50**(1956), 19-28.
- (2) Gurtman, G. A., ほか 2 名, *Douglas Rep.* SM-47796(1965).
- (3) Brinson, H. F., *Exp. Mech.*, **11**-10(1971), 467.
- (4) 高橋・島本, 機論, **44**-382(1978), 1901.
- (5) 島本, 機論, 47-421, A(1981), 959.
- (6) Wu-Cheng Huang, *Int. J. Solids Struct.*, **8**(1972), 149-192.