有限変形における座標系の更新と変換*

渡 部 修^{*1}Renewal and Transformation of the Coordinate System
in Finite Deformation

Osamu WATANABE

The present paper describes the theoretical treatment of the updated Lagrangian formulation expressed by quantities in the current configuration through mathematically equivalent transformation of the fundamental equations in the reference configuration. Since no subsidiary condition is imposed on the transformation, the obtained variational principle can employ the constitutive equation as it is. Discussed are the relative advantages of the total or updated Lagrangian approaches from the viewpoint of numerical analysis. Also derived are the work theorem and constitutive equation to ensure objective numerical integration in the moving as well as rotating coordinate system.

Key Words: Updated Lagrangian Formulation, Finite Deformation, Constitutive Equation, Variational Principle, Change of Frame

1. 結 言

有限変形を受ける固体や構造物の有限要素解析は、増分理論に基づいて行われる。増分ごとに基礎方程式を線形化する過程において、変形前の初期形状に基づく量で表示した Total Lagrange 流の定式化と、変形後の現在の状態量を用いた Updated Lagrange 流の定式化がある。後者は変形後の実際の状態に基づいているため物理的に理解しやすく、また圧力などの変形依存形の荷重や接触等の現在の状態に基づいた問題に容易に適用できるため使用実績が多い。また、本来、移動・回転しながら荷重を受ける固体や構造物の解析や、塑性加工時等の大変形解析においては、座標系を変換し直して定式化したほうが合理的である。

従来の Updated Lagrange 流の座標系の更新は、変形前の Total Lagrange 流の定式化で得られた基礎方程式について、変形テンソルを単位テンソルに置換し、基準状態を変形後に設定し直す方法が用いられている⁽¹⁾。この手法を適用すると、単純せん断問題⁽²⁾の大ひずみ域におけるせん断応力-ひずみ関係式の「振動」

を抑制する Green 速度を用いた構成式^{(3)(4)~(7)}も、Jaumann 速度形に一致し、「振動」の困難が再び生ずる。すなわち、座標系の更新時に用いられる設定条件により、構成式が本質的に変化する。

本研究は、変形前の状態に基づいて定式化された Total Lagrange 流の仕事式⁽⁶⁾を、従来のように変形テンソルを単位テンソルに置換することなく、エネルギー的に等価に、変形後の現在の状態に置換する方法を示す。これにより、仕事式と構成式は独立の問題として扱うことができ、Green 速度の構成式は更新座標系においてもそのまま使用でき、「振動」の困難が回避される。得られた仕事式と構成式を基に、Total 形と Updated 形の定式化、および Green 速度と Jaumann 速度の構成式について、相違点と適用方法を考察する。さらに、別の座標系を用いて、現在の状態での仕事式の変換と、応力増分を高精度に求める客観性保持の構成式を導く。

2. 座 標 系 の 更 新

2・1 基礎関係式

2・1・1 テンソルの内積 以下の理論展開にテンソルの内積を用いるが、これには次の性質がある。

$$(A \cdot B) : C = A : (C \cdot B^t) = B : (A^t \cdot C) \cdots (1)$$

* 平成元年11月10日 材料力学講演会において講演、原稿受付 平成元年4月28日。

*¹ 正員、筑波大学構造工学会 (305 つくば市天王台 1-1-1)。

ここで記号「:」が内積を, 「()[']」が転置を表す。また

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A}' : \mathbf{B}' \dots\dots\dots (2)$$

であることから, $\mathbf{B}$ を一般のテンソルとして, 式(2)から次のことが成立する。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' \text{ ならば } \mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A} : \mathbf{B}_s \dots\dots\dots (3)$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}' \text{ ならば } \mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A} : \mathbf{B}_a \dots\dots\dots (4)$$

ここで記号「()_s」と「()_a」はそれぞれ()内のテンソルの対称成分と反対称成分を表す。

$$\mathbf{B}_s \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}') \dots\dots\dots (5\cdot a)$$

$$\mathbf{B}_a \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}') \dots\dots\dots (5\cdot b)$$

2・1・2 変形とひずみ速度 変形前の固体の点 p_0 は, 変形後に点 p に移動したと考える。位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}$ とし, 変形前の状態を C_0 , 変形後の状態を C とする。周知のように⁽⁸⁾, 変形こう配テンソル $\mathbf{F}$ は, 線素ベクトル $d\mathbf{r}_0$ と $d\mathbf{r}$ を1対1に写像する非特異テンソルであるから, 直交テンソルと対称テンソルの積からなる次の極分解を得る。

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \dots\dots\dots (6)$$

ここで, $\mathbf{R}$ と $\mathbf{U}$ には次の性質がある。

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}', \mathbf{R}' = \mathbf{R}^{-1} \dots\dots\dots (7)$$

記号「()⁻¹」は逆変換を表す。変形後の状態 C に対する点 p の速度 $\mathbf{v}$ は, 位置ベクトル $\mathbf{r}$ の物質微分から得られる。

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \dots\dots\dots (8)$$

ここで, 記号「()[']」は物質微分を表す。速度こう配テンソル $\mathbf{L}$ は, $\mathbf{F}$ または $\mathbf{v}$ を用いて次のように表示できる。

$$\mathbf{L} \equiv \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \equiv \mathbf{v} \nabla \dots\dots\dots (9)$$

ここで, ∇ は変形後の形状に対するこう配演算子である。 $\mathbf{L}$ は, 式(9)に式(6)を代入して次のとおりである。

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \mathbf{R}' \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$\dot{\mathbf{Q}} \equiv \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}' = -\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}' \dots\dots\dots (11)$$

$\mathbf{L}$ は次のように対称のストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ と, 反対称のスピニングテンソル $\mathbf{W}$ に分離できる。

$$\mathbf{D} \equiv (\mathbf{v} \nabla)_s = \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1})_s \cdot \mathbf{R}' \dots\dots\dots (12\cdot a)$$

$$\mathbf{W} \equiv (\mathbf{v} \nabla)_a = \mathbf{Q} + \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1})_a \cdot \mathbf{R}' \dots\dots\dots (12\cdot b)$$

2・2 エネルギー的に等価な座標系の更新

2・2・1 仮想仕事の原理 Total Lagrange 流の定式化では⁽⁶⁾, 変形後の状態 C での挙動を, 変形前の状態 C_0 に等価に置き換えて求める。状態 C_0 での第1,

2種の Piola-Kirchhoff 応力をそれぞれ $\mathbf{T}_{(1)}, \mathbf{T}_{(2)}$ とし, 状態 C での Cauchy の真応力を $\mathbf{T}$ とすると, これらの応力の間には次の関係がある。

$$\mathbf{T}_{(1)} \equiv J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \dots\dots\dots (13\cdot a)$$

$$\mathbf{T}_{(2)} \equiv J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-t} \dots\dots\dots (13\cdot b)$$

ここで, $\mathbf{F}^{-t} = (\mathbf{F}^{-1})' = (\mathbf{F}')^{-1}$ である。 J は体積変化率で次のように与えられる。

$$J \equiv \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho} \dots\dots\dots (14)$$

ここで, ρ_0, ρ は変形前後の密度, dV_0, dV は変形前後における同一粒子からなる体積要素である。

Total Lagrange 流の定式化では⁽⁶⁾, 状態 C_0 での速度形平衡方程式に速度あるいはスピンをかけ, 全領域について積分した次の仕事式を基礎に置いている。

$$\int (\dot{\mathbf{W}}_i + \dot{\mathbf{W}}_a) dV_0 = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$\dot{\mathbf{W}}_i \equiv \dot{\mathbf{f}}_i \cdot \dot{\mathbf{u}} \dots\dots\dots (16\cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{W}}_a \equiv \dot{\mathbf{f}}_a : \dot{\mathbf{S}} \dots\dots\dots (16\cdot b)$$

$\dot{\mathbf{f}}_i$ と $\dot{\mathbf{f}}_a$ は, それぞれ速度形の平衡方程式とモーメントの釣合式を表す。状態 C_0 での変位速度 $\dot{\mathbf{u}}$ とスピン $\dot{\mathbf{S}}$ は, 状態 C での速度 $\mathbf{v}$ とスピン $\mathbf{W}$ と次の関係がある⁽⁶⁾。

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} \dots\dots\dots (17\cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{F} \dots\dots\dots (17\cdot b)$$

$\dot{\mathbf{f}}_i$ と $\dot{\mathbf{f}}_a$ は $\mathbf{T}_{(1)}$ を用いると次のとおりである。

$$\dot{\mathbf{f}}_i = \nabla_0 \cdot \dot{\mathbf{T}}_{(1)} + \rho_0 \dot{\mathbf{a}}_0 \dots\dots\dots (18\cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{f}}_a = (\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{(1)} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{(1)})_a \dots\dots\dots (18\cdot b)$$

ここで, 状態 C_0 でのこう配演算子 ∇_0 と慣性力を含む有効体積力速度 $\dot{\mathbf{a}}_0$ は, 状態 C での ∇ と $\dot{\mathbf{a}}$ と次の関係がある。

$$\nabla = \mathbf{F}^{-t} \cdot \nabla_0 = \nabla_0 \cdot \mathbf{F}^{-1} \dots\dots\dots (19\cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_0 \dots\dots\dots (19\cdot b)$$

式(16)の仕事式を, 状態 C に等価に置き換える。そのためには, まず式(18)の平衡方程式を変形する必要がある。 $\mathbf{T}_{(1)}, \mathbf{T}_{(2)}$ の物質微分は式(13)から次のとおり。

$$\dot{\mathbf{T}}_{(1)} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{T}}_T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}') \dots\dots\dots (20\cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{(2)} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{T}}_T \cdot \mathbf{F}^{-t} \dots\dots\dots (20\cdot b)$$

ここで, $\dot{\mathbf{T}}_T$ は Truesdell の応力速度で次のとおり⁽⁹⁾。

$$\dot{\mathbf{T}}_T = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}' + (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{T} \dots\dots\dots (21)$$

$\text{tr } \mathbf{D}$ は $\mathbf{D}$ と単位テンソル $\mathbf{I}$ との内積を表す。

$$\text{tr } \mathbf{D} = \mathbf{D} : \mathbf{I} \dots\dots\dots (22)$$

式(18・a)に式(20・a), (19・a), (19・b), (14)を代入すると

$$\dot{\mathbf{f}}_i = J \{ \nabla \cdot (\dot{\mathbf{T}}_T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}') + \rho \dot{\mathbf{a}} \} \dots\dots\dots (23)$$

となる。同様に, 式(18・b)に式(20・a), (13・a)を代入

すると,

$$\dot{\mathbf{f}}_a = J(\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{T}}_T^t \cdot \mathbf{F}^{-t})_a = J\mathbf{F}^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{T}}_T^t)_a \cdot \mathbf{F}^{-t} \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。ここで式(9)から $\dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{L}$ を用いた,

次に, $\mathbf{T}_{(2)}$ を用いると, $\dot{\mathbf{f}}_t$ と $\dot{\mathbf{f}}_a$ は次のようになる,

$$\dot{\mathbf{f}}_t = \nabla_0 \cdot (\dot{\mathbf{T}}_{(2)} \cdot \mathbf{F}^t + \mathbf{T}_{(2)} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t) + \rho_0 \dot{\mathbf{a}} \quad \dots\dots\dots (25 \cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{f}}_a = (\dot{\mathbf{T}}_{(2)})_a \quad \dots\dots\dots (25 \cdot b)$$

$\mathbf{T}_{(1)}$ の場合と同様にして, 状態 C での量に変換すると式(23), (24)に一致する。すなわち, 状態 C_0 では平衡方程式 $\dot{\mathbf{f}}_t$ と $\dot{\mathbf{f}}_a$ は用いる応力 $\mathbf{T}_{(1)}$, $\mathbf{T}_{(2)}$ により異なる表示となるが, 状態 C では当然のことながら同一の表示となる。

次に, 仕事式 $\dot{W}_t$ と $\dot{W}_a$ を状態 C について求める。式(16・a)に式(23) (17・a)を代入すると

$$\dot{W}_t = J[\nabla \cdot (\dot{\mathbf{T}}_T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^t) + \rho \dot{\mathbf{a}}] \cdot \mathbf{v} \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。式(16・b)に式(24) (17・b)を代入すると

$$\dot{W}_a = J\{\mathbf{F}^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{T}}_T^t)_a \cdot \mathbf{F}^{-t}\} : \dot{\mathbf{S}} = J(\dot{\mathbf{T}}_T^t)_a : \mathbf{W} \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。ここに式(1)を用いて変形した。したがって, 式(26), (27)を式(15)に代入し, 式(14)を考慮すると,

$$\int [\{ \nabla \cdot (\dot{\mathbf{T}}_T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^t) + \rho \dot{\mathbf{a}} \} \cdot \mathbf{v} + (\dot{\mathbf{T}}_T^t)_a : \mathbf{W}] dV = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。これが座標系を更新する Updated Lagrange 流定式化の基礎となる仕事式である。式(28)の第1項は次のように変形できる。

$$\{ \nabla \cdot (\dot{\mathbf{T}}_T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^t) \} \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \{ (\dot{\mathbf{T}}_T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^t) \cdot \mathbf{v} \} - (\dot{\mathbf{T}}_T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^t) : \nabla \mathbf{v} \quad \dots\dots\dots (29)$$

式(28)の第3項は, $\mathbf{W}$ が反対称テンソルであることから, 式(4)の性質を用いると次のように変形できる。

$$(\dot{\mathbf{T}}_T^t)_a : \mathbf{W} = \dot{\mathbf{T}}_T^t : \mathbf{W} = -\dot{\mathbf{T}}_T : \mathbf{W} \quad \dots\dots\dots (30)$$

また, 式(12)から, 次の適合条件を得るので,

$$\mathbf{D} + \mathbf{W} = \mathbf{v} \nabla \quad \dots\dots\dots (31)$$

式(29), (30), (31)を式(28)に代入して, 発散定理を用いると, 次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int \{ \dot{\mathbf{T}}_T : \mathbf{D} + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^t) : \nabla \mathbf{v} \} dV \\ & = \int \rho \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{v} dV + \int \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} dS \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

すなわち, スピン $\mathbf{W}$ を含まない形で求めることができた。式(32)中, dS は面積要素である。 $\dot{\mathbf{t}}$ は表面力速度で, $\mathbf{n}$ を固体表面の外向き単位法線ベクトルとすると, 次のように計算できる。

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{T}}_T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^t) \quad \dots\dots\dots (33)$$

式(32)に基づき, 前報⁽⁶⁾と同様にして各種の変分原理を導くことができるが, ここでは最も広く用いられている仮想仕事の原理について論ずる。式(32)から, 幾何学的境界条件を乱さない速度 $\mathbf{v}$ の変分を $\delta \mathbf{v}$ とすると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int \{ \dot{\mathbf{T}}_T : \delta \mathbf{D} + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^t) : \nabla \delta \mathbf{v} \} dV \\ & = \int \rho \dot{\mathbf{a}} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int \dot{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

ここに付帯条件は次のとおりである。

$$\delta \mathbf{D} = (\delta \mathbf{v} \nabla)_s : V \text{ 内で} \quad \dots\dots\dots (35 \cdot a)$$

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{0} : S_v \text{ 上で} \quad \dots\dots\dots (35 \cdot b)$$

ここで, S_t , S_v はそれぞれ力学的, 幾何学的境界の表面を表す。記号「()」は与えられた量であることを表す。

変形前の状態 C_0 での仕事式(15)から変形後の状態 C での仕事式(28)への変換は等価なものであり, 変換に付帯する条件はない。したがって, 構成式に課せられた条件はなく, 任意の形式のものが使用できる。

2・2・2 Green 速度形構成式を用いた定式化

前報^{(4)~(6)}において提案した Green の応力速度を用いた構成式による定式化を示す。構成式は次のように与えられる。

$$\dot{\mathbf{T}}_C = \frac{1}{J} \mathbf{f}(\mathbf{D}, J(\mathbf{T}' - \mathbf{A}')) \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここで

$$\dot{\mathbf{T}}_C \equiv \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} + (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{T} \quad \dots\dots\dots (37)$$

応答関数 $\mathbf{f}$ は等方関数⁽⁹⁾であり, 後で異なるひずみ速度と応力で表示するが, いずれも同一形式で表現できるため, ひずみ速度を $\mathbf{X}$, 偏差応力を $\mathbf{Y}$ として次のように表示する。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) & \equiv 2\mu_0 \mathbf{X} + \lambda_0 (\text{tr } \mathbf{X}) \mathbf{I} \\ & - 2\mu_0 \frac{\mathbf{Y}}{C(S_y^0)^2} \langle \mathbf{Y} : \mathbf{X} \rangle^2 \quad \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

式(38)において, $\mathbf{X} = \mathbf{D}$, $\mathbf{Y} = J(\mathbf{T}' - \mathbf{A}')$ を代入すれば式(37)が得られる。式(38)で, μ_0 , λ_0 は Lamé の定数, 記号「()」は偏差成分, $\mathbf{A}'$ は降伏曲面の中心, S_y^0 は降伏曲面の大きさ, C は線形移動硬化則に関する係数である。 $\dot{\mathbf{T}}_T$ と $\dot{\mathbf{T}}_C$ は式(21), (37)から次の関係がある。

$$\dot{\mathbf{T}}_T = \dot{\mathbf{T}}_C - (\mathbf{L} - \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{L}^t + \mathbf{Q}^t) \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここで $\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}^t$ を用いた。また式(10), (12)を用いれば, 式(39)はさらに次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_T & = \dot{\mathbf{T}}_C - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1})_a \cdot \mathbf{R}^t \\ & - \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1})_a^t \cdot \mathbf{R}^t \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

したがって, 式(34)中の $\dot{\mathbf{T}}_T$ に係かる内部仕事は次のように表示できる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_7: \delta \mathbf{D} = \dot{\mathbf{T}}_c \cdot \delta \mathbf{D} - \mathbf{T}: \delta(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \\ - 2\{\mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1})_a \cdot \mathbf{R}' \cdot \mathbf{T}\}: \delta \mathbf{D} \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

ここで式(1)～(4)を用いた。式(41)の内部仕事を、ひずみエネルギーの変分として次のように定義する。

$$\delta U^p = \delta U_\ell + \delta U_{\ell r} \quad \dots\dots\dots (42)$$

ここで

$$\delta U^p \equiv \dot{\mathbf{T}}_7: \delta \mathbf{D} \quad \dots\dots\dots (43 \cdot a)$$

$$\delta U_\ell \equiv \dot{\mathbf{T}}_c: \delta \mathbf{D} - \mathbf{T}: \delta(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \quad \dots\dots\dots (43 \cdot b)$$

$$\delta U_{\ell r} \equiv -2\{\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}\}_a \cdot \mathbf{R}' \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}: (\mathbf{R}' \cdot \delta \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}) \quad \dots\dots\dots (43 \cdot c)$$

δU_ℓ のポテンシャルは存在し、式(36)を考慮すると次のように表示できる。

$$U_\ell = \frac{1}{J} U_\ell(\mathbf{D}, J(\mathbf{T}' - \mathbf{A}'), J\mathbf{T}) \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここで、式(44)の U_ℓ は、後で示すように、異なるひずみ速度と応力の構成式で表示する場合も、同一形式で表示できるため、 $\mathbf{X}$ をひずみ速度、 $\mathbf{Y}$ を偏差応力、 $\mathbf{Z}$ を応力として、次のように置く。

$$\begin{aligned} U_\ell(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \equiv \frac{1}{2} \{ 2\mu_0(\mathbf{X} : \mathbf{X}) + \lambda_0(\text{tr } \mathbf{X})^2 \\ - \frac{2\mu_0}{C(S_0^2)^2} \langle \mathbf{Y} : \mathbf{X} \rangle^2 - 2\mathbf{Z} : (\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) \} \quad \dots (45) \end{aligned}$$

式(45)で、 $\mathbf{X} = \mathbf{D}$, $\mathbf{Y} = J(\mathbf{T}' - \mathbf{A}')$, $\mathbf{Z} = J\mathbf{T}$ を代入すれば式(44)が得られる。

$\delta U_{\ell r}$ は変形スピンによる仕事でポテンシャルとして表現できないが、次のように置く。

$$\delta U_{\ell r} = \frac{1}{J} \delta U_{\ell r}(\mathbf{D}, J\mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{R}) \quad \dots\dots\dots (46)$$

ここで

$$\begin{aligned} \delta U_{\ell r}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{A}) = -2\{(\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{-1})_a \\ \cdot \mathbf{A}' \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}\}: (\mathbf{A}' \cdot \delta \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}) \quad \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

以上の準備から、式(34)の仮想仕事の原理は、次のポテンシャルエネルギー停留原理に変換できる。

$$\begin{aligned} \Pi^p(v) = \int \left\{ U^p + \frac{1}{2} \mathbf{T}: (\nabla v \cdot v \nabla) \right\} dV \\ - \int \rho \dot{\mathbf{a}} \cdot v dV - \int \dot{\mathbf{t}} \cdot v dS_t \quad \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

ここに付帯条件は式(35)と同一である。式(48)中の U^p は変分をとると式(42)になる。 $\delta U_{\ell r}$ はポテンシャルとして表すことができないので、数値計算において、荷重ベクトルとして扱う必要がある。

応力増分は、式(36)の代わりに、次の客観性保持の構成式を用いれば、より高精度に求めることができる⁽⁷⁾。

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{E}}_R, (\hat{\mathbf{T}}' - \hat{\mathbf{A}}')) \quad \dots\dots\dots (49)$$

ここで

$$\hat{\mathbf{T}} \equiv J\mathbf{R}' \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \quad \dots\dots\dots (50 \cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_R \equiv \mathbf{R}' \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} \quad \dots\dots\dots (50 \cdot b)$$

式(50)のひずみ速度と応力を用いれば、式(44)、(46)のひずみエネルギーは次のように表示できる。

$$U_\ell = \frac{1}{J} U_\ell(\dot{\mathbf{E}}_R, (\hat{\mathbf{T}}' - \hat{\mathbf{A}}'), \hat{\mathbf{T}}) \quad \dots\dots\dots (51 \cdot a)$$

$$\delta U_{\ell r} = \frac{1}{J} \delta U_{\ell r}(\dot{\mathbf{E}}_R, \hat{\mathbf{T}}, \mathbf{U}, \mathbf{I}) \quad \dots\dots\dots (51 \cdot b)$$

2.3 従来の方法による座標系の更新 従来⁽¹⁾、適用されている座標系の更新は、変位 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ と設定することにより、状態 C_0 での量を状態 C でのそれに置き換える。このときの変形テンソルは、次のように単位テンソルになる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} = \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad \dots\dots\dots (52)$$

また、体積変化率 J は式(14)の代わりに、

$$J = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} \quad \dots\dots\dots (53)$$

と求めることができるので、式(52)を式(53)に代入して、次の値を得る。

$$J = 1 \quad \dots\dots\dots (54)$$

このとき、式(13)の応力や、式(11)、(12・b)、(17・b)のスピンには、式(52)を考慮すると、差がなくなる。

$$\mathbf{T}_{(1)} = \mathbf{T}_{(2)} = \mathbf{T} \quad \dots\dots\dots (55 \cdot a)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Omega} = \mathbf{W} \quad \dots\dots\dots (55 \cdot b)$$

$\dot{\mathbf{F}}^{-1}$ や $\dot{\mathbf{F}}'$ は式(9)から次のとおり。

$$\dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{L}, \dot{\mathbf{F}}' = \mathbf{L}' \quad \dots\dots\dots (56)$$

式(20)の応力速度は次のようになる。

$$\dot{\mathbf{T}}_{(1)} = \dot{\mathbf{T}}_7 + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}' \quad \dots\dots\dots (57 \cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{(2)} = \dot{\mathbf{T}}_7 \quad \dots\dots\dots (57 \cdot b)$$

また、こう配演算子、密度、面積要素、体積要素は、次のように置ける。

$$\nabla_0 = \nabla, \rho_0 = \rho \quad \dots\dots\dots (58 \cdot a)$$

$$dS_0 = dS, dV_0 = dV \quad \dots\dots\dots (58 \cdot b)$$

式(55)～(58)を式(15)に代入すると、次の仕事式を導くことができる。

$$\begin{aligned} \int [(\nabla \cdot (\dot{\mathbf{T}}_7 + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}') + \rho \dot{\mathbf{a}}) \cdot \mathbf{v} + (\dot{\mathbf{T}})_a: \mathbf{W}] dV = 0 \\ \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

式(59)は、2.2 節で導いた仕事式(28)に一致する。

これに対し、構成式にも式(52)、(54)の条件が加わるため、Green 形の構成式(36)を適用する場合は、次の Jaumann 形に変換される。

$$\dot{\mathbf{T}}_J = \mathbf{f}(\mathbf{D}, (\mathbf{T}' - \mathbf{A}')) \quad \dots\dots\dots (60)$$

ここで

$$\dot{\mathbf{T}}_J \equiv \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} + (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{T} \quad \dots\dots\dots (61)$$

Green 形の構成式(36)と Jaumann 形の構成式(60)は、ともに状態 C の応答を記述するものであるが、その応答は大ひずみの場合、異なる⁽⁷⁾。すなわち、従来の方法によって座標系の更新を行うと、基礎となる仕事式は同一になるものの、変換の条件式(52)、(54)は、Green

形の構成式の場合には、本質的に変化させる。

さて、 $\dot{\mathbf{T}}_I$ を用いた場合の定式化を示す。この場合も式(59)から、式(34)の仮想仕事の原理を導くことができる。 $\dot{\mathbf{T}}_I$ と $\dot{\mathbf{T}}_I$ の関係は、式(21)、(61)から次のとおり。

$$\dot{\mathbf{T}}_I = \dot{\mathbf{T}}_I - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad \dots\dots\dots (62)$$

したがって、式(42)のひずみエネルギーの変分は、次のように表示できる。

$$\delta U^p = \delta U^p + \delta U^p_f \quad \dots\dots\dots (63)$$

ここで

$$\delta U^p \equiv \dot{\mathbf{T}}_I : \delta \mathbf{D} \quad \dots\dots\dots (64 \cdot a)$$

$$\delta U^p_f \equiv \dot{\mathbf{T}}_I : \delta \mathbf{D} - \mathbf{T} : \delta (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \quad \dots\dots\dots (64 \cdot b)$$

$$\delta U^p_f = 0 \quad \dots\dots\dots (64 \cdot c)$$

すなわち、変形スピンに関する仕事式(64・c)が消える。式(64・b)のポテンシャルは存在し、式(60)を考慮すると、次のように表示できる。

$$U^p = U^p(\mathbf{D}, (\mathbf{T}' - \mathbf{A}'), \mathbf{T}) \quad \dots\dots\dots (65)$$

式(65)はMcMeeking-Rice⁽¹⁾の結果に一致している。この場合のポテンシャルエネルギー停留原理は、式(48)と同一形となる。

式(60)の代わりに、客観性保持の構成式⁽⁷⁾を用いることを考える。この構成式は、現在の状態Cでの時刻を t とし、この状態からわずかに時間が経過した時刻 $\tau (\tau > t)$ での応力増分を求めるもので、次のようになる。

$$\dot{\mathbf{T}}_I(\tau) = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{E}}_{Rt}(\tau), (\hat{\mathbf{T}}_I'(\tau) - \hat{\mathbf{A}}_I'(\tau))) \quad \dots\dots\dots (66)$$

ここで

$$\hat{\mathbf{T}}_I(\tau) \equiv \mathbf{J}_I(\tau) \mathbf{R}_I'(\tau) \cdot \mathbf{T}(\tau) \cdot \mathbf{R}_I(\tau) \quad \dots\dots\dots (67 \cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{Rt}(\tau) \equiv \mathbf{R}_I'(\tau) \cdot \mathbf{D}(\tau) \cdot \mathbf{R}_I(\tau) \quad \dots\dots\dots (67 \cdot b)$$

すなわち、式(49)、(50)において相対的な量で置換した形になっている。ここで、相対体積変化率 $J_I(\tau)$ と相対回転テンソル $\mathbf{R}_I(\tau)$ の求め方は次のとおりである⁽⁷⁾。まず、相対変形こう配テンソル $\mathbf{F}_I(\tau)$ を、次の再帰的な形式から求める。

$$\mathbf{F}_I(\tau) = \mathbf{I} + \int_t^\tau \mathbf{L}(t') \cdot \mathbf{F}_I(t') dt' \quad \dots\dots\dots (68)$$

式(68)を極分解し

$$\mathbf{F}_I(\tau) = \mathbf{R}_I(\tau) \cdot \mathbf{U}_I(\tau) \quad \dots\dots\dots (69)$$

得られた直交テンソル $\mathbf{R}_I(\tau)$ が、式(67)中の回転テンソルである。 $J_I(\tau)$ は、 $\mathbf{U}_I(\tau)$ から次のように求める。

$$J_I(\tau) = \det \mathbf{U}_I(\tau) \quad \dots\dots\dots (70)$$

$\hat{\mathbf{T}}_I(\tau)$ の物質微分は、式(67・a)から

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}}_I(\tau) = J_I(\tau) \mathbf{R}_I'(\tau) \cdot \dot{\mathbf{T}}_I(\tau) \cdot \mathbf{R}_I(\tau) \quad \dots\dots\dots (71)$$

となるので⁽⁷⁾、式(67・b)、(71)と式(66)が等方関数で与えられていることを考慮すると、式(65)の U^p は次のように表示できる。

$$U^p = \frac{1}{J_I(\tau)} U^p(\dot{\mathbf{E}}_{Rt}(\tau), (\hat{\mathbf{T}}_I'(\tau) - \hat{\mathbf{A}}_I'(\tau)), \hat{\mathbf{T}}_I(\tau)) \quad \dots\dots\dots (72)$$

構成式(66)は時刻 t から τ まで変化することを前提としたものであるから、それに対応するひずみエネルギー式(72)も、静的問題の場合でも、運動方程式を解析する場合のように、時間方向に離散化が必要であることを示している。このことはGreen速度の構成式についても同様で、より高精度のひずみエネルギーを得るためには、式(45)、(46)を時間方向に離散化し、Euler法以来の高精度アルゴリズムを用いて評価する必要がある。

2.4 Total形とUpdated形定式化の相違

変形前の状態に基づくTotal Lagrange流の仕事原理と変形後の状態に基づくUpdated Lagrange流の仕事原理は、2・2節で示したように、完全に等価で相互に変換できる。変換に当たって課せられた付帯条件はないため、構成式は任意に選択できる。通常、構成式は変形後の状態について記述されるため、Total Lagrange流の定式化で用いる場合は、変形前の状態に等価に変換する必要がある⁽⁶⁾。Total形、Updated形の定式化のいずれの方法を用いたとしても、本来、同一の固体・構造物の挙動を異なる視点で解析していることを意味する。

これに対し、2・3節で示した従来の方法では、Total形とUpdated形の仕事原理は同一になるとは言え、変換に当たって制約条件が課せられるため、Green速度形の構成式のように変形テンソル $\mathbf{F}$ に依存する構成式を用いる場合には、Total形とUpdated形では構成式は本質的に異なるものを使用することになる。しかし、Jaumann速度形のように、現在の状態だけで記述された構成式の場合には、Total形とUpdated形における構成式による相違はなくなる。

Total形とUpdated形の定式化は本質的に同一のものであるが、得られた数値解において差が生ずることも事実である。Total形の困難な点は、変形後の挙動を仮想的に変形前の状態に置き換えなければならないことである。このため、内部仕事を評価するのに、右Cauchy-Green変形テンソルの逆変換 $\mathbf{C}^{-1} (= \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1})$ を用いる必要があるが⁽⁶⁾、数値解析上、逆変換を直接行う代わりに、変形は微小として便宜的に簡易化して評価することがある⁽¹⁰⁾。これが本来の挙動に対する近似を生む。Updated形の困難な点は、Total形の困難と相補的なものである。変形後の幾何形状は本質的に曲線・曲面から構成され、これを有限要素の形状関数で近似することになる。例えば、かく

の表面の変形後の形状を、低次の多項式で展開した形状関数の要素で、有限個によって近似することは容易ではない。ここに、Updated 形の誤差の原因があると考えられる。すなわち、かくなどの初期不整が挙動に重大な影響を与え、初期形状に近い状態で非線形解析が必要な場合には、変形前の状態に基づきこれを補正する形の Total 形のアプローチが適切と言えよう。また、衝突・圧壊などの大変形解析のように、変形後の形状が初期形状と著しく異なる場合の非線形解析には、Total 形では用いる変形テンソル C^{-1} を正確に評価する必要がある。これは、数値計算上、不利であるばかりでなく、接触などの現在の状態に基づく問題に対して現実的でなくなる。このような場合には Updated 形のアプローチが適切と言えよう。

2.5 Green 形と Jaumann 形の構成式の相違

Green 形と Jaumann 形の構成式の相違については、前報⁽⁷⁾において基準配置とスピンの点から考察した。Green 形の構成式は、応力増分を求めるのに現在の状態における変形テンソル F を記憶しておく必要があるばかりでなく、仮想仕事の原理に基づき有限要素の剛性方程式を求める場合、式(43・c)の変形スピンに関する仕事を荷重ベクトルとして求める必要がある。しかしながら、単純せん断問題⁽³⁾のように、大変形・大ひずみ解析に対して合理的な解を与え、Jaumann 速度形に比べ有利である。

Green 形構成式は基準配置を変形後の状態に設定すれば、Jaumann 形に帰着することは既に検討した⁽⁷⁾。しかしながら、剛体回転 R が有限で、正味の変形が小さく変形テンソル U が単位テンソルにみなし得る場合、すなわち、

$$U \cong I \quad \dots\dots\dots (73)$$

のとき、式(53)から体積変化率 J と変形スピンについて、次のことが成立するため

$$J \cong 1 \quad \dots\dots\dots (74\cdot a)$$

$$R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1})_a \cdot R' \cong 0 \quad \dots\dots\dots (74\cdot b)$$

剛体スピン Ω と全スピン W は、式(12・b)から、近似的に等しくなる。

$$\Omega \cong W \quad \dots\dots\dots (75)$$

したがって、式(36)と(60)の構成式は同一となり、有限変形・微小ひずみ問題に対し、Jaumann 速度の構成式は Green 速度の構成式の近似形として用いることができる。単純せん断問題の解析で得られたように⁽⁷⁾、両者の相違が顕著になるのは、40～50 %の大ひずみ域からであることを考慮すると、Jaumann 速度型構成式の実用上の有用性がわかる。特に、Jaumann 速度の構成式を用いると、Green 速度と異なり、応力速度が

現在の状態だけで評価でき、仮想仕事の原理において変形スピンに関する荷重ベクトルを考慮しなくて済む点が、有利となる。

3. 座 標 系 の 変 換

固体・構造物が大変形し、初期状態からの剛体移動や回転が著しい場合には、座標系を新たに設定し直すほうが便利な場合がある。また固体・構造物が本来、剛体移動・回転しながら荷重を受け変形する場合には、静止座標系からよりも、固体とともに移動・回転する座標系から測定するほうが合理的である。ここでは前者を含む形で、移動・回転座標系からの仮想仕事と構成式について検討する。

3.1 仮想仕事の原理

二人の観測者から、現在の状態 C での固体の運動を測定する。二人の用いる座標系をそれぞれ $F(o-x_i)$ 系、 $F^*(o^*-x_i^*)$ 系とする。両者は初期状態で一致しており、 F 系が静止座標系、 F^* 系を移動・回転座標系とする。 F, F^* 系から測定した状態 C の固体中の点 p の位置ベクトルを r, r^* とし、次の関係が成立するものとする⁽⁸⁾。

$$r^* = Q(t) \cdot r + c(t) \quad \dots\dots\dots (76)$$

$Q(t)$ は回転テンソルで、直交の性質がある。 $c(t)$ は原点 o, o^* を結ぶベクトルである。式(76)の物質微分をとると、 F, F^* 系から測定した速度 v, v^* には次の関係がある。

$$v^* = Q \cdot v + \dot{Q} \cdot r + \dot{c} \quad \dots\dots\dots (77)$$

また、 F^* 系でのこう配演算子を ∇^* とすると⁽¹¹⁾、

$$\nabla^* = Q \cdot \nabla = \nabla \cdot Q' \quad \dots\dots\dots (78)$$

となる。 F, F^* 系での変形こう配テンソルを F, F^* 、直交テンソルを R, R^* 、変形テンソルを U, U^* とすると、次の関係が知られている⁽⁸⁾。

$$F^* = Q \cdot F \quad \dots\dots\dots (79\cdot a)$$

$$R^* = Q \cdot R \quad \dots\dots\dots (79\cdot b)$$

$$U^* = U \quad \dots\dots\dots (79\cdot c)$$

また、 F^* 系での体積力ベクトル $\bar{b}^*$ と表面力ベクトル $\bar{t}^*$ には次の客観性がある。

$$\bar{b}^* = Q \cdot \bar{b} \quad \dots\dots\dots (80\cdot a)$$

$$\bar{t}^* = Q \cdot \bar{t} \quad \dots\dots\dots (80\cdot b)$$

F^* 系での密度 ρ^* と体積、面積要素 dV^*, dS^* はスカラーであるので次のとおり。

$$\rho^* = \rho \quad \dots\dots\dots (81\cdot a)$$

$$dV^* = dV, dS^* = dS \quad \dots\dots\dots (81\cdot b)$$

ストレッチングテンソル D と Cauchy の真応力テンソル T にも次の客観性がある⁽⁸⁾。

$$D^* = Q \cdot D \cdot Q' \quad \dots\dots\dots (82\cdot a)$$

$$T^* = Q \cdot T \cdot Q' \quad \dots\dots\dots (82\cdot b)$$

また、 F^* 系での速度こう配テンソル L^* は、式(9)、(79)から次のとおりである。

$$L^* \equiv \dot{F}^* \cdot F^{*-1} \equiv v^* \nabla^* \\ = \Omega_0 + Q \cdot L \cdot Q' \dots\dots\dots (83)$$

ここで

$$\Omega_0 \equiv \dot{Q} \cdot Q' = -Q \cdot \dot{Q}' \dots\dots\dots (84)$$

したがって、式(82)、(83)から、Truesdell の応力速度 $\dot{T}_T$ には次の客観性がある⁽⁸⁾。

$$\dot{T}_T^* = Q \cdot \dot{T}_T \cdot Q' \dots\dots\dots (85)$$

一方、体積力速度 $\dot{b}^*$ と表面力速度 $\dot{t}^*$ は、式(80)、(84)から次のとおり。

$$\dot{b}^* = Q' \cdot (\dot{b}^* - \Omega_0 \cdot \bar{b}^*) \dots\dots\dots (86\cdot a)$$

$$\dot{t}^* = Q' \cdot (\dot{t}^* - \Omega_0 \cdot \bar{t}^*) \dots\dots\dots (86\cdot b)$$

また、加速度 $\ddot{v}$ の物質微分は式(77)、(84)から次のとおり。

$$\ddot{v} = Q' \cdot \ddot{v}^* \dots\dots\dots (87)$$

ここで

$$\ddot{v}^* = (\ddot{v}^* - \ddot{c}) - 3\Omega_0 \cdot (\dot{v}^* - \dot{c}) - 3(\dot{\Omega}_0 - \Omega_0^2) \\ \cdot (v^* - \dot{c}) - (\ddot{\Omega}_0 - \dot{\Omega}_0 \cdot \Omega_0 - 2\Omega_0 \cdot \dot{\Omega}_0 + \Omega_0^3) \\ \cdot (r^* - c) \dots\dots\dots (88)$$

また、仮想変位 δv^* は、式(77)から次のとおり。

$$\delta v^* = Q \cdot \delta v \dots\dots\dots (89)$$

式(83)から、次の関係が成立する。

$$\nabla^* \delta v^* = Q \cdot (\nabla \delta v) \cdot Q' \dots\dots\dots (90)$$

以上の準備のもとに、静止座標系で得られた仮想仕事の原理の式(34)に、式(81)～(90)を代入して、移動・回転座標系での仮想仕事の原理を次のように得る。

$$\int [\dot{T}_T^* : \delta D^* + \{T^* \cdot (L^* - \Omega_0)\} : \nabla^* \delta v^*] dV^* \\ = \int \rho^* \dot{\bar{a}}^* \cdot \delta v^* dV^* + \int \dot{t}^* \cdot \delta v^* dS^* \\ \dots\dots\dots (91)$$

ここで

$$\dot{\bar{a}}^* \equiv (\dot{\bar{b}}^* - \Omega_0 \cdot \bar{b}^*) - \ddot{v}^* \dots\dots\dots (92\cdot a)$$

$$\dot{t}^* \equiv \dot{\bar{t}}^* - \Omega_0 \cdot \bar{t}^* \dots\dots\dots (92\cdot b)$$

式(91)の式の変形において、テンソルの内積の性質(1)を用いている。式(91)から、 $(\dot{T}_T^* : \delta D^*)$ の内部仕事のみ座標系不依存であり、これをひずみエネルギーとしたのは妥当である。

3.2 Green 速度形構成式を用いた定式化 剛体スピン Ω には式(83)と同様な関係が成立するので、Green の応力速度 $\dot{T}_G$ には次の客観性がある。

$$\dot{T}_G^* = Q \cdot \dot{T}_G \cdot Q' \dots\dots\dots (93)$$

また体積変化率 J^* には、式(79・c)から次の関係がある。

$$J^* = J \dots\dots\dots (94)$$

したがって、式(82)、(93)、(94)を式(36)に代入し、 f が等方関数であることを用いると、移動・回転座標系での構成式は次のように表示できる。

$$\dot{T}_G^* = \frac{1}{J^*} f(D^*, J^*(T^* - A^*)) \dots\dots\dots (95)$$

式(95)は構成式が座標系不依存であることを示している。

次に、式(49)に対応する客観性保持の構成式を求める。応力 $\hat{T}$ とひずみ速度 $\dot{E}_R$ には、式(79)から次の関係が存在する。

$$\hat{T}^* \equiv J^* R^{*t} \cdot T^* \cdot R^* = \hat{T} \dots\dots\dots (96\cdot a)$$

$$\dot{E}_R^* \equiv R^{*t} \cdot D^* \cdot R^* = \dot{E}_R \dots\dots\dots (96\cdot b)$$

式(96)を式(49)に代入して次式を得る。

$$\dot{T}^* = f(\dot{E}_R^*, (\hat{T}^* - \hat{A}^*)) \dots\dots\dots (97)$$

式(97)も構成式が座標系不依存であることを示す。

式(91)に基づくと、ポテンシャルエネルギー停留原理は次のようになる。

$$\Pi^p(v^*) = \int \left[U^p + \frac{1}{2} T^* : \{(\nabla^* v^* + \Omega_0) \cdot (v^* \nabla^* - \Omega_0)\} \right] dV^* - \int \rho^* \dot{\bar{a}}^* \cdot v^* dV^* \\ - \int \dot{t}^* \cdot v^* dS^* \dots\dots\dots (98)$$

ここで、 U^p は式(42)に対応させ次のように置く。

$$U^p = U\mathcal{E}^* + U\mathcal{E}_T^* \dots\dots\dots (99)$$

式(99)を剛体回転後の量で表示すると次のとおり。

$$U\mathcal{E}^* = \frac{1}{J^*} U\mathcal{E}(D^*, J^*(T^* - A^*), J^* T^*) \\ \dots\dots\dots (100\cdot a)$$

$$\delta U\mathcal{E}_T^* = \frac{1}{J^*} \delta U\mathcal{E}_T(D^*, J^* T^*, U^*, R^*) \\ \dots\dots\dots (100\cdot b)$$

剛体回転前の量で表示すると、次のとおり。

$$U\mathcal{E}^* = \frac{1}{J^*} U\mathcal{E}(\dot{E}_R^*, (\hat{T}^* - \hat{A}^*), T^*) \\ \dots\dots\dots (101\cdot a)$$

$$\delta U\mathcal{E}_T^* = \frac{1}{J^*} \delta U\mathcal{E}_T(\dot{E}_R^*, \hat{T}^*, U^*, I) \\ \dots\dots\dots (101\cdot b)$$

Green 速度の構成式は、式(95)、(97)からわかるように、変形こう配テンソル F^* を必要とする。現在の時刻 t での $F^*(t)$ を既知とし、 t よりわずかに時間が経過した時刻 τ での $F^*(\tau)$ の算定法を示す。このためには、次式で定義される相対変形こう配テンソル $F_t^*(\tau)$ を、まず求める必要がある。

$$F^*(\tau) \equiv F_t^*(\tau) \cdot F^*(t) \dots\dots\dots (102)$$

式(102)の $F^*(\tau)$ と $F^*(t)$ は、式(79)から、静止座標系での $F(\tau)$ と $F(t)$ と次の関係がある。

$$\mathbf{F}^*(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\tau) \quad \dots\dots\dots (103\cdot a)$$

$$\mathbf{F}^*(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{F}(t) \quad \dots\dots\dots (103\cdot b)$$

式(83), (103)を式(68)に代入し, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^*(\tau) = & \mathbf{Q}_t(\tau) \cdot \mathbf{F}^*(t) + \int_t^\tau \mathbf{Q}_{t'}(\tau) \cdot (\mathbf{L}^*(t') \\ & - \boldsymbol{\Omega}_0(t')) \cdot \mathbf{F}^*(t') dt' \quad \dots\dots\dots (104) \end{aligned}$$

ここで

$$\mathbf{Q}_t(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{Q}'(t) \quad \dots\dots\dots (105\cdot a)$$

$$\mathbf{Q}_{t'}(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{Q}'(t') \quad \dots\dots\dots (105\cdot b)$$

$$\mathbf{F}^*(t') = \mathbf{Q}(t') \cdot \mathbf{F}(t') \quad \dots\dots\dots (105\cdot c)$$

式(102)と式(104)を等価すると, 移動・回転座標系での相対変形こう配テンソル $\mathbf{F}_t^*(\tau)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t^*(\tau) = & \mathbf{Q}_t(\tau) + \int_t^\tau \mathbf{Q}_{t'}(\tau) \cdot (\mathbf{L}^*(t') - \boldsymbol{\Omega}_0(t')) \\ & \cdot \mathbf{F}_t^*(t') dt' \quad \dots\dots\dots (106) \end{aligned}$$

すなわち, $\mathbf{F}^*$ 系だけの量で表示できた. 式(106)を式(102)に代入して $\mathbf{F}^*(\tau)$ を求め, これを次のように極分解する.

$$\mathbf{F}^*(\tau) = \mathbf{R}^*(\tau) \cdot \mathbf{U}^*(\tau) \quad \dots\dots\dots (107)$$

得られた $\mathbf{R}^*(\tau)$, $\mathbf{U}^*(\tau)$ を用い, 時刻 τ での応力を求める.

3.3 Jaumann 速度形構成式を用いた定式化

$\mathbf{F}^*$ 系での全スピン $\mathbf{W}$ には, 式(83)の関係が成立するので, Jaumann 速度 $\dot{\mathbf{T}}_J^*$ には客観性がある⁽⁸⁾.

$$\dot{\mathbf{T}}_J^* = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}_J \cdot \mathbf{Q}' \quad \dots\dots\dots (108)$$

したがって, 移動・回転座標系での構成式は次のとおり.

$$\dot{\mathbf{T}}_J^* = \mathbf{f}(\mathbf{D}^*, (\mathbf{T}^* - \mathbf{A}^*)) \quad \dots\dots\dots (109)$$

次に, 式(66)に対応する客観性保持の構成式を求める. このため, 式(106)から求められた相対変形こう配テンソル $\mathbf{F}_t^*(\tau)$ を次のように極分解する.

$$\mathbf{F}_t^*(\tau) = \mathbf{R}_t^*(\tau) \cdot \mathbf{U}_t^*(\tau) \quad \dots\dots\dots (110)$$

$\mathbf{F}_t^*(\tau)$ は静止座標系の $\mathbf{F}_t(\tau)$ と次の関係がある⁽¹²⁾.

$$\mathbf{F}_t^*(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{F}_t(\tau) \cdot \mathbf{Q}'(t) \quad \dots\dots\dots (111)$$

$\mathbf{F}_t(\tau)$ は式(69)のように極分解されているので, 式(110)と式(111)を等置して, 次のように分解する.

$$\mathbf{R}_t^*(\tau) \equiv \mathbf{Q}(\tau) \cdot \mathbf{R}_t(\tau) \cdot \mathbf{Q}'(t) \quad \dots\dots\dots (112\cdot a)$$

$$\mathbf{U}_t^*(\tau) \equiv \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{U}_t(\tau) \cdot \mathbf{Q}'(t) \quad \dots\dots\dots (112\cdot b)$$

式(112)で求めた $\mathbf{R}_t^*(\tau)$ と $\mathbf{U}_t^*(\tau)$ には, 次のようにそれぞれ直交テンソルと対称テンソルの性質があることは容易にわかるので,

$$(\mathbf{R}_t^*(\tau))^{-1} = (\mathbf{R}_t^*(\tau))' \quad \dots\dots\dots (113\cdot a)$$

$$\mathbf{U}_t^*(\tau) = (\mathbf{U}_t^*(\tau))' \quad \dots\dots\dots (113\cdot b)$$

式(112)の極分解は正しく, 一意的である.

また, 移動・回転座標系での剛体回転前応力 $\hat{\mathbf{T}}_t^*(\tau)$

には, 式(112)から, $\hat{\mathbf{T}}_t(\tau)$ と次の関係がある.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_t^*(\tau) & \equiv \mathbf{J}_t^*(\tau) \mathbf{R}_t^*(\tau)' \cdot \mathbf{T}^*(\tau) \cdot \mathbf{R}_t^*(\tau) \\ & = \mathbf{Q}(t) \cdot \hat{\mathbf{T}}_t(\tau) \cdot \mathbf{Q}'(t) \quad \dots\dots\dots (114) \end{aligned}$$

ここで, 式(112・b)から次式を用いている.

$$\mathbf{J}_t^*(\tau) = \mathbf{J}_t(\tau) \quad \dots\dots\dots (115)$$

したがって, 時刻 τ での剛体回転前の応力の物質微分には次の関係がある.

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}}_t^*(\tau) = \mathbf{Q}(t) \cdot \dot{\hat{\mathbf{T}}}_t(\tau) \cdot \mathbf{Q}'(t) \quad \dots\dots\dots (116)$$

ここで

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}}_t^*(\tau) \equiv \frac{d}{dt'} \hat{\mathbf{T}}_t^*(t')|_{t'=\tau} \quad \dots\dots\dots (117\cdot a)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}}_t(\tau) \equiv \frac{d}{dt'} \hat{\mathbf{T}}_t(t')|_{t'=\tau} \quad \dots\dots\dots (117\cdot b)$$

一方, 移動・回転座標系から測定した剛体回転前のひずみ速度には, 式(112)から次の関係がある.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{Rt}^*(\tau) & \equiv \mathbf{R}_t^*(\tau)' \cdot \mathbf{D}^*(\tau) \cdot \mathbf{R}_t^*(\tau) \\ & = \mathbf{Q}(t) \cdot \dot{\mathbf{E}}_{Rt}(\tau) \cdot \mathbf{Q}'(t) \quad \dots\dots\dots (118) \end{aligned}$$

式(114), (118)から, $\hat{\mathbf{T}}_t^*(\tau)$ と $\dot{\mathbf{E}}_{Rt}^*(\tau)$ には, $\mathbf{Q}(\tau)$ ではなく $\mathbf{Q}(t)$ であることから, 客観性はない. 式(114), (116), (118)を式(66)に代入し, 次の構成式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{T}}}_t^*(\tau) = & \mathbf{f}(\dot{\mathbf{E}}_{Rt}^*(\tau), (\hat{\mathbf{T}}_t^*(\tau) - \hat{\mathbf{A}}_t^*(\tau))) \\ & \dots\dots\dots (119) \end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{f}$ が等方関数であることを用いた. 式(119)は式(66)と同一関数で表示でき, 用いる応力・ひずみ速度に客観性はないものの, 構成式自身は座標系不依存であることがわかる.

この場合のポテンシャルエネルギー停留原理は, 式(98)に一致する. ひずみエネルギーは次のとおりである.

$$U^{P*} = U^P = U^P(\mathbf{D}^*, (\mathbf{T}^* - \mathbf{A}^*), \mathbf{T}^*) \quad \dots\dots\dots (120)$$

客観性保持の構成式を用いると次のとおりである.

$$\begin{aligned} U^{P*} = U^P = & \frac{1}{J_t^*(\tau)} U^P(\dot{\mathbf{E}}_{Rt}^*(\tau), (\hat{\mathbf{T}}_t^*(\tau) - \hat{\mathbf{A}}_t^*(\tau)), \\ & \hat{\mathbf{T}}_t^*(\tau)) \quad \dots\dots\dots (121) \end{aligned}$$

また, 座標系を単に再設定する場合には, $\mathbf{Q}$ を一定, $\boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{0}$ とすればよい. 要素形状が極端に変形して計算条件が悪くなった場合の再分割は, Green の構成式の場合は応力 $\mathbf{T}^*$ と同様, $\mathbf{F}^*$ を補間しこれを記憶する.

4. 結 論

有限変形を受ける固体の挙動を, 変形前の状態で記述する Total Lagrange 流の基礎方程式を基に, 物理的近似を含むことなく数学的に変換し, 変形後の状態で記述する Updated Lagrange 流の基礎方程式を得た. 変換に付随する制約条件はないため, 単純せん断問題の「振動」の困難が回避できる Green 速度の構成

式もそのままの形で使用できる。Total 形と Updated 形の定式化の得失を論じるとともに、Jaumann 速度の構成式は有限変形・微小ひずみ問題に対して有効であることを指摘した。また、変形後の Updated 形定式化について、移動・回転座標系での仕事原理と、高精度の客観性保持の構成式を導いた。

文 献

- (1) McMeeking, R. M. and Rice, J. R., *Int. J. Solids Struct.*, **11** (1975), 601.
- (2) Nagtegaal, J. C. and de Jong, J. E. (Lee, G. H. and Mallett, R. L. 編), *Plasticity of Metals at Finite Strain: Theory, Experiment and Computation*, (1982),

- 65.
- (3) Dienes, J. K., *Acta Mech.*, **32** (1979), 217.
- (4) 渡部, 機論, **54**-497, A (1988), 100.
- (5) 渡部, 機論, **54**-501, A (1988), 992.
- (6) 渡部, 機論, **55**-510, A (1989), 257.
- (7) 本論文集 893 ページ
- (8) Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, (1969), Prentice-Hall.
- (9) Truesdell, C. and Noll, W., (Flügge, S. 編), *The Non-linear Field Theory of Mechanics, Encyclopedia of Physics*, III/3, (1965), Springer.
- (10) Hibbitt, H. D., ほか 2 名, *Int. J. Solids Struct.*, **6** (1970), 1069.
- (11) 棚橋, 連続体の力学 (3), (1986), 理工図書.
- (12) 北川, 弾・塑性力学, (1987), 裳華房.

討 論

〔質問〕 後 藤 学 (岐阜大学工学部)

(1) J_2 -流れ理論(J_2F)では, 大きな単純せん断に対して, Jaumann 応力率を用いても τ は振動しない, Green-Naghi 応力率を用いたのとはほとんど差はない。その理由について質問者が論じている(付1)。移動硬化則を導入するとき, (ただし, これはあくまでも strain-induced 異方性の一表現法にすぎない), 背応力の発展式に用いるスピンは応力率に用いるスピンと同一である必要はない。そのことも質問者が論じ済みである(付1)。Lee や Dafalias らも同発展式用のスピンを案出している。

(2) 2・4 節などで, total 形と Updated 形定式化は全く等価だと言われる。一方, Green 形の構成式は基準のとり方の影響を受け, Updated 形式では Jaumann 形に一致する。例えば, 大きな単純せん断変形で, Green 形によると, せん断応力 τ は total 形で振動せず, Updated 形では振動することとなる(少なくとも有限弾性で)。これは明らかに定式化の等価性と矛盾する。この矛盾は Green 形構成式に内蔵されているのではないか。

(3) 全体に, 既存理論の変形ないし焼き直しに過ぎない, との印象を受ける。

〔回答〕 (1) 単純せん断問題の「振動」の困難は, Lee や Dafalias のように塑性特有の材質の問題として, 移動硬化の背応力スピンに新たなものを導入すれば解決できる。また, ご指摘の論文のように応力のスピンに新たなものを導入することでも解決できる。しかしながら, これらのアプローチでは大変形時において新たな材料パラメータが必要になるのに対し, 運動学的に定まる剛体スピン Ω を用いた Green

速度の構成式に基づけば, 新たなパラメータを導入することなく「振動」の困難が有限弾性変形においても容易に解決できる。

(2) 基準配置の最も自然な設定の方法は変形前の状態に置くことであるが, 基準配置はどの状態にも設定できるものである⁽⁹⁾(付2)。ここで示した Green 形の構成式は変形前の状態に基準配置を置いているが, 変形後の現在の状態に再設定し直すため変形こう配テンソル $\mathbf{F}$ を単位テンソルに置き換えれば, Green 形構成式は Jaumann 形に一致する。しかしながら, このような基準配置の再設定の仕方は, Green 形構成式や次のような周知の非線形構成式⁽⁹⁾の場合のように,

$$\mathbf{T} = \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \mathbf{B} + \phi_2 \mathbf{B}_2$$

過去の履歴, すなわち変形のこう配テンソル $\mathbf{F}$ に依存する構成式の場合には, 過去の履歴の影響を消去するもので, 構成式を本質的に変化させる。また有理力学で論じられている基準配置の再設定の方法も, 変形こう配テンソル $\mathbf{F}$ を単位テンソルに置換するものではない⁽⁹⁾(付2) 著者も従来の研究において⁽⁴⁾(付3), Updated 座標系では Green 形構成式は Jaumann 形に一致すると考えていたが, Jaumann 形を用いる限り更新座標系でも単純せん断問題で「振動」の生ずることから, この矛盾を解消するため本研究および客観性保持の構成式の研究(付4)を行った。

(3) 本研究の目的は, 座標系の更新において仕事式と構成式が独立の問題として扱えることを示したも

(付1) Gotoh, M., *JSME Int. J.*, Ser. I., **32**-2(1989), 230.

(付2) 徳岡, 機械の研究, **28**-5(1976), 683.

(付3) 文献(5)における後藤氏との討論.

(付4) 渡部, 機論, **56**-524, A (1990), 893.

ので、ここに展開したような仕事式の誘導は、著者の知る限りない。ご指摘の印象は構成式に関するものと考えられる。著者のこれまでの構成式に関する研究⁽⁴⁾⁽⁵⁾は、せん断問題の「振動」の困難を従来の連続体力学の範疇内で解決しようとするもので、このことがご指摘の印象を与えたと思われる。構成式の最終的な形のみに着目するならば、既に提案されていることで新しい点はないが、最終的な形に至るまでの論旨には、論文中⁽⁴⁾⁽⁵⁾で示しているように、新しい点があると思

えている。また本研究では、単純せん断問題における困難は仕事式に用いる構成式の取扱いに起因するものであることを示したもので、このような考察は著者の知る限りない。しかしながら、Green 形構成式は有理力学において十分に論じられておらず、今後、主軸のスピン、弾性ポテンシャル、経路独立性などの観点からのより詳細な理論的考察が必要であるほか、実験結果との比較も必要と思われるが、これについては次の機会に報告したい。