有限変形における客観性保持の構成式と数値アルゴリズム*

渡 部 修*¹Objective Constitutive Equation and Numerical Algorithm
in Finite Deformation

Osamu WATANABE

The present paper discusses rate-type elastic-plastic constitutive equations with the stress rates being taken as the Jaumann derivative and the Green derivative from the viewpoint of reference configuration and spin tensors. These equations are shown to be transformed in the rate-type forms so as to exclude the effects of rigid rotation. The obtained ordinary differential equations can be implemented to ensure objective numerical integration during finite deformation increment. The simple shear problem is taken for an example to demonstrate the accuracy of the present formulations based on the Euler method or the Runge-Kutta method of the second order.

Key Words: Constitutive Equation, Finite Deformation Theory, Objectivity, Numerical Algorithm, Simple Shear

1. 緒 言

有限変形での構成式として、通常全スピン W により応力の客観速度を得た Jaumann 速度の亜弾性体のそれが使用されている。著者は、これに対し、剛体回転スピン Ω により応力の客観速度を得た Green 速度の重要性を指摘した^{(1)~(4)}。Jaumann 速度を用いると、単純せん断を受けるブロックのせん断応力-ひずみ関係に、通常では予測されない「振動」が大ひずみ域で生ずるのに対し、Green 速度を用いると「振動」は抑制される⁽⁵⁾。しかし、変形後の現在の状態に基づく、Updated Lagrange 流の定式化においては、Green 速度は Jaumann 速度に帰着するとされている。

一方、近年、Jaumann 速度を用いる構成式に対し、有限の剛体回転を伴う場合に、高精度で応力増分を求める数値アルゴリズムが検討されている^{(6)~(10)}。この方法は基礎となる構成式を剛体回転前の量に変換し、純粋な変形による応力増分を数値積分し、その後剛体回転後の量を算定し直すものである。これにより、剛体回転に伴う応力増分のドリフトが防止でき、構成式の

客観性が保持できる。剛体回転前の構成式は常微分方程式で表示されるため、これを解く数値アルゴリズムと剛体回転角の算定に種々の方法がある⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。

本研究は、Green 速度あるいは Jaumann 速度を用いた構成式の相違と類似点について、基準配置とスピンの観点から考察する。両者について、有限剛体回転がある場合の客観性保持の構成式を示すとともに、これに基づく客観性保持の数値積分アルゴリズムを提案する。さらに、単純せん断問題を例に、構成式のスピンの違いと提案のアルゴリズムの精度を検討する。

2. 客観性保持の構成式

2.1 基礎関係式 変形前の固体の点 p_0 は、変形後に点 p に移動したと考える。位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}$ とする。また変形前の状態を C_0 、変形後の状態を C とする。周知のように、変形こう配テンソル $\mathbf{F}$ は、線素ベクトル $d\mathbf{r}_0$ と $d\mathbf{r}$ を 1 対 1 に写像する非特異テンソルであるから、直交テンソルと対称テンソルの積からなる次の極分解を得る。

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\mathbf{R}, \mathbf{U}$ には次の性質がある。

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^t, \mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1} \quad \dots\dots\dots (2)$$

記号「 $()^t$ 」と「 $()^{-1}$ 」はそれぞれ転置と逆変換を

* 平成元年 11 月 10 日 材料力学講演会において講演、原稿受付 平成元年 4 月 3 日。

*¹ 正員、筑波大学構造工学系 (〒305 つくば市天王台 1-1-1)。

表す。また、変形後の状態 C に対する点 p の速度 v は、位置ベクトル r の物質微分から得られる。

$$v = \dot{r} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、記号「 $(\cdot)$ 」は物質微分を表す。速度こう配テンソル L は、 F あるいは v を用いて次のように表示できる。

$$L = \dot{F} \cdot F^{-1} = v \nabla \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 ∇ は変形後の形状に対するこう配演算子である。 L は次のように対称のストレッチングテンソル D と反対称のスピントテンソル W に分離できる。

$$L = D + W \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで

$$D \equiv (L)_s = \frac{1}{2}(L + L') \quad \dots\dots\dots (6 \cdot a)$$

$$W \equiv (L)_a = \frac{1}{2}(L - L') \quad \dots\dots\dots (6 \cdot b)$$

記号「 $(\cdot)_s$ 」と「 $(\cdot)_a$ 」は $(\cdot)$ 内のテンソルの対称部分と反対部分を表す。 v と ∇ を用いて、 D と W を表示すると、式(4)から次の通りである。

$$D = (v \nabla)_s = \frac{1}{2}(v \nabla + \nabla v) \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$W = (v \nabla)_a = \frac{1}{2}(v \nabla - \nabla v) \quad \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

一方、 R と U を用いて D と W を表すには、式(1)を式(4)および式(6)に代入して次のとおりである。

$$D = R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1})_s \cdot R' \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$W = \Omega + R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1})_a \cdot R' \quad \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

ここで

$$\Omega \equiv \dot{R} \cdot R' = -R \cdot \dot{R}' \quad \dots\dots\dots (9)$$

変形後の現在の状態 C での時刻を t とし、それ以後の時刻 $\tau (\tau > t)$ での状態を C' とする。変形こう配テンソルには鎖則が成立するので、相対変形こう配テンソルを $F_t(\tau)$ とすると次式が成立する⁽¹³⁾。

$$F(\tau) = F_t(\tau) \cdot F(t) \quad \dots\dots\dots (10)$$

$F(\tau)$ および $F(t)$ は変形前の状態 C_0 ($t=0$) から計測した時刻 τ および t での変形こう配テンソルである。また、 $F_t(\tau)$ の添字 t は現在の時刻 t を基準とすることを表す。式(1)と同様に、 $F_t(\tau)$ を極分解する。

$$F_t(\tau) = R_t(\tau) \cdot U_t(\tau) \quad \dots\dots\dots (11)$$

このとき、相対変形テンソル U_t と回転テンソル R_t の変化率を $t=\tau$ で求めると、次のとおりである⁽¹³⁾。

$$D = \dot{U}_t(t), \quad W = \dot{R}_t(t) \quad \dots\dots\dots (12)$$

すなわち、 D と W の表示には、変形前の状態 C_0 から計測した式(8)と変形後の状態 C から計測した式(12)の2通りが可能である。

2.2 Green 速度を用いた構成式 著者は前報において⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾、弾塑性体の構成式として次の式を提案し

た。

$$T = \frac{1}{J} [2\mu_0 e_k^e + \lambda_0 (\text{tr } e_k^e) I] \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 T は Cauchy の真応力、 μ_0 と λ_0 は Lamè の定数、 e_k^e は剛体回転後の Stören-Rice の非回転ひずみの弾性成分⁽²⁾、 I は2階の単位テンソルである。また、記号「 $\text{tr}(\cdot)$ 」は $(\cdot)$ 内のテンソルと I との内積を表す。

$$\text{tr } e_k^e \equiv e_k^e : I \quad \dots\dots\dots (14)$$

また J は体積変化率で次のように定義できる。

$$J = \det F = \det U \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(13)を剛体回転 R を受ける前の応力 $\hat{T}$ とひずみ E_k^e を用いて表示しよう。

$$\hat{T} = JR' \cdot T \cdot R \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$E_k^e = R' \cdot e_k^e \cdot R \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(13)の左側から JR' 、右側から R を掛け、式(16)、(17)を代入して次式を得る。

$$\hat{T} = 2\mu_0 E_k^e + \lambda_0 (\text{tr } E_k^e) I \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、テンソルの内積の性質として、 A, B, C を2階のテンソルとすると

$$A : (B \cdot C) = (B' \cdot A) : C = (A \cdot C') : B \quad \dots\dots\dots (19)$$

であることから、 $\text{tr } e_k^e = \text{tr } E_k^e$ を用いた。式(18)の物質微分をとり、塑性則として Prager の線形移動硬化剤を例にとると、次の構成式が得られる⁽²⁾⁽³⁾。

$$\dot{\hat{T}} = \hat{f}_C(\dot{E}_R, (\hat{T}' - \hat{A}'), \xi) \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで

$$\begin{aligned} \hat{f}_C &\equiv 2\mu_0 \dot{E}_R + \lambda_0 (\text{tr } \dot{E}_R) I - 2\mu_0 \frac{(\hat{T}' - \hat{A}')}{C(S_y^0)^2} \\ &\quad \times \langle (\hat{T}' - \hat{A}') : \dot{E}_R \rangle \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

記号「 $\langle \cdot \rangle$ 」は偏差成分を表し、 $\hat{A}'$ は降伏曲面の中心、 S_y^0 は降伏曲面の大きさ、 C は線形移動硬化則に関する係数である。 $\hat{A}'$ は $\hat{T}'$ と同様に扱う。式(20)中の ξ は塑性履歴を表現するためのスカラーであり、 $\dot{E}_R$ の塑性成分 $\dot{E}_k^e$ から次のように計算できる。

$$\xi \equiv \int_0^t (\dot{E}_k^e : \dot{E}_k^e)^{1/2} dt' \quad \dots\dots\dots (22)$$

また $\dot{E}_R$ は U あるいは D を用いて表すと次のとおり⁽¹⁾⁽²⁾。

$$\dot{E}_R \equiv (\dot{U} \cdot U^{-1})_s = R' \cdot D \cdot R \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(20)に着目すると、剛体変形前の応力 $\hat{T}$ の変化率を変形テンソル U だけからなるひずみ速度 $\dot{E}_R$ で表示しており、有限な剛体回転を伴う場合の客観性保持の構成式として用いることができる。

式(20)を剛体回転後の量で表示する。剛体回転前の応力 $\hat{T}$ の物質微分は次のとおりである。

$$\dot{\hat{T}} = JR' \cdot \dot{T}_C \cdot R \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで

$$\dot{\mathbf{T}}_c \equiv \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} + (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{T} \quad (25)$$

式(25)は、従来の Green 速度⁽⁵⁾と比べて、 $(\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{T}$ の項を含んでいる点で異なる。したがって、式(20)の構成式は、式(23)、(24)を代入して次のように変換できる。

$$\dot{\mathbf{T}}_c = \frac{1}{J} \mathbf{f}_c(\mathbf{D}, J(\mathbf{T}' - \mathbf{A}'), \zeta) \quad (26)$$

ここで

$$\mathbf{f}_c \equiv 2\mu_0 \mathbf{D} + \lambda_0 (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{I} - 2\mu_0 \frac{J(\mathbf{T}' - \mathbf{A}')}{C(S_y^0)^2} \times \langle J(\mathbf{T}' - \mathbf{A}') : \mathbf{D} \rangle \quad (27)$$

式(26)中の ζ は、 $\mathbf{D}$ の塑性成分 $\mathbf{D}^p$ から次のように計算できるが⁽²⁾、

$$\zeta = \int_0^t (\mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p)^{1/2} dt' \quad (28)$$

式(19)、(22)を用いると、塑性成分についても式(23)が成立することから、次のことがわかる。

$$\zeta = \bar{\zeta} \quad (29)$$

式(21)の $\hat{\mathbf{f}}_c$ と式(27)の $\mathbf{f}_c$ はともに等方関数であり⁽¹⁴⁾、特に直交テンソルとして $\mathbf{R}$ を用いると次式が成立する。

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{f}}_c \cdot \mathbf{R}' \quad (30)$$

式(20)と(26)の構成式は等価である。これらの構成式は、塑性変形を計算するのに現在の状態での応力が必要であるように、有限変形においては、変形前の状態 C_0 を基準配置とし、 C_0 から現在の変形後の状態 C への剛体回転テンソル $\mathbf{R}$ と変形テンソル $\mathbf{U}$ が必要であることを示している。

2.3 Jaumann 速度を用いた構成式 基準配置

を導入することなく、弾性応答を記述する目的で提案された構成式として、亜弾性体のそれがある⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。応力速度 $\dot{\mathbf{T}}$ は、現時点での応力 $\mathbf{T}$ と速度こう配テンソル $\mathbf{L}$ にのみ依存するとして、通常、Jaumann 速度を客観応力速度とする次式が用いられている。

$$\dot{\mathbf{T}}_J = \mathbf{g}(\mathbf{D}, (\mathbf{T}' - \mathbf{A}'), \zeta) \quad (31)$$

ここで

$$\dot{\mathbf{T}}_J \equiv \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} + (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{T} \quad (32)$$

$$\mathbf{g} \equiv 2\mu_0 \mathbf{D} + \lambda_0 (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{I} - 2\mu_0 \frac{J(\mathbf{T}' - \mathbf{A}')}{C(S_y^0)^2} \times \langle (\mathbf{T}' - \mathbf{A}') : \mathbf{D} \rangle \quad (33)$$

Green 速度の構成式と対応をとるため、Prager の線形移動硬化則による塑性項を付加している。式(31)、(32)、(33)からわかるように、スピン $\mathbf{W}$ が式(66)から現地点での量から計算されることから、塑性変形の項を除き、応力速度 $\dot{\mathbf{T}}$ は基準配置の選択とは無関係に、現在の量だけを基に計算できる。

一方、変形後の状態を基準配置に設定すると、

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} = \mathbf{I}, J = 1 \quad (34)$$

と置けるので、式(8)から

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \quad (35)$$

となり、 $\dot{\mathbf{T}}_J$ と $\dot{\mathbf{T}}_c$ は一致し、

$$\dot{\mathbf{T}}_J = \dot{\mathbf{T}}_c (\mathbf{R} = \mathbf{U} = \mathbf{I}, J = 1) \quad (36)$$

式(26)の右辺の応答関数 $\mathbf{f}_c$ は、式(31)の $\mathbf{f}_J$ と一致する。

$$\mathbf{f}_J = \mathbf{f}_c (J = 1) \quad (37)$$

したがって、式(31)の構成式は、式(26)の構成式を基に、基準配置を現在の状態 C に置くことにより、求めることができることを示している。

式(26)、(31)の構成式は共に現在の状態 C で弾塑性応答を記述するが、基準配置の選択が異なっている。Green 速度を用いる構成式でも、変形前の状態 C_0 では式(36)のように Jaumann 速度を用いることに相当する。しかし、変形が進行してくると、式(8・b)に示すように、全スピン $\mathbf{W}$ の中には剛体スピン $\boldsymbol{\Omega}$ のほか、変形によるスピン $\mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1})_a \cdot \mathbf{R}'$ が混在し、これが無視できない量となる。これに対し、Jaumann 速度を用いた構成式は、変形後の状態 C を初期状態とみなしているため、全スピン $\mathbf{W}$ が剛体スピンを表す。全スピン $\mathbf{W}$ は式(7・b)に示すように、現在の状態での $\mathbf{v}$ と ∇ から計算されるため、変形が進行した段階で、全スピン $\mathbf{W}$ を用いるか、その一部分である $\boldsymbol{\Omega}$ を用いるかにより、応答は異なるものになる。また、Updated Lagrange 流の定式化は現在の状態に基づいているが、構成式の基準配置を変形後の状態に置かなければならない必然性はない。

現在の状態 C に基準配置を置く場合の、式(20)に対応する客観性保持の構成式を求める。この場合には、現在の時刻 t からわずかに時間が経過した時刻 τ での構成式を求めることになる。すなわち、式(20)における変形テンソル $\mathbf{U}$ 、回転テンソル $\mathbf{R}$ 、体積変化率 J が、それぞれ式(11)の相対的な量 $\mathbf{U}_t$ 、 $\mathbf{R}_t$ 、 J_t に置き変わる。 J_t は式(15)と同様に、次のように求める。

$$J_t = \det \mathbf{F}_t = \det \mathbf{U}_t \quad (38)$$

したがって、次の構成式を得る。

$$\dot{\mathbf{T}}_t = \hat{\mathbf{f}}_J(\dot{\mathbf{E}}_{Rt}, (\hat{\mathbf{T}}'_t - \hat{\mathbf{A}}'_t), \hat{\zeta}_t) \quad (39)$$

ここで

$$\hat{\mathbf{T}}_t \equiv J_t \mathbf{R}'_t \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_t \quad (40)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{Rt} \equiv \mathbf{R}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}_t \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_J \equiv 2\mu_0 \dot{\mathbf{E}}_{Rt} + \lambda_0 (\text{tr } \dot{\mathbf{E}}_{Rt}) \mathbf{I} - 2\mu_0 \frac{J(\hat{\mathbf{T}}'_t - \hat{\mathbf{A}}'_t)}{C(S_y^0)^2} \times \langle (\hat{\mathbf{T}}'_t - \hat{\mathbf{A}}'_t) : \dot{\mathbf{E}}_{Rt} \rangle \quad (42)$$

また、 $\hat{\zeta}_t$ は $\dot{\mathbf{E}}_{Rt}$ の塑性成分から計算できる。

$$\xi_t \equiv \int_0^t (\dot{\mathbf{E}}k_t : \dot{\mathbf{E}}k_t)^{1/2} dt' = \xi \quad \dots\dots\dots (43)$$

$\tau = t$ の初期条件として次式が成立する。

$$\mathbf{R}_t(t) = \mathbf{U}_t(t) = \mathbf{I}, J_t(t) = 1 \quad \dots\dots\dots (44)$$

また、回転テンソル $\mathbf{R}_t$ は全スピン $\mathbf{W}$ と式(12)から次の関係がある。

$$\mathbf{W}(\tau) = \dot{\mathbf{R}}_t(\tau) \cdot \mathbf{R}_t^t(\tau) \quad \dots\dots\dots (45)$$

また、 J_t の変化率は次のように表示できるので

$$\dot{J}_t/J_t = \text{tr } \dot{\mathbf{U}}_t = \text{tr } \mathbf{D} \quad \dots\dots\dots (46)$$

式(40)の物質微分は、式(45)(46)から

$$\dot{\mathbf{T}}_t = J_t \mathbf{R}_t^t \cdot \dot{\mathbf{T}}_t \cdot \mathbf{R}_t \quad \dots\dots\dots (47)$$

となる。したがって、式(39)の構成式は、次のように変換できる。

$$\dot{\mathbf{T}}_t = \frac{1}{J_t} \mathbf{f}_t(\mathbf{D}, J_t(\mathbf{T}' - \mathbf{A}'), \xi_t) \quad \dots\dots\dots (48)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t &\equiv 2\mu_0 \mathbf{D} + \lambda_0 (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{I} - 2\mu_0 \frac{J_t(\mathbf{T}' - \mathbf{A}')}{C(S_0^2)} \\ &\quad \times \langle J_t(\mathbf{T}' - \mathbf{A}') : \mathbf{D} \rangle \quad \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

また、式(48)中の ξ_t は次のようになる。

$$\xi_t = \int_0^t (\mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p)^{1/2} dt' = \xi \quad \dots\dots\dots (50)$$

$\mathbf{f}_t$ は塑性項の応力に J_t が加わっている点で、式(33)の $\mathbf{g}$ と異なる。また、 $\mathbf{f}_t$ と式(42)の $\hat{\mathbf{f}}_t$ は等方関数で、次式が成立する。

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{R}_t \cdot \hat{\mathbf{f}}_t \cdot \mathbf{R}_t^t \quad \dots\dots\dots (51)$$

さらに、式(44)の初期条件を用いれば、式(48)の構成式は式(31)に一致させることができる。

3. 数値アルゴリズム

式(20)、(39)の客観性保持の構成式は、常微分方程式であるので、Euler法、Runge-Kutta法などの各種のアルゴリズムが適用できる。

3・1 厳密解

3・1・1 Green速度を用いた構成式 式(20)を時刻 t から τ まで積分すると次のとおりである。

$$\hat{\mathbf{T}}(\tau) = \hat{\mathbf{T}}(t) + \int_t^\tau \dot{\hat{\mathbf{T}}}(t') dt' \quad \dots\dots\dots (52)$$

ここで

$$\hat{\mathbf{T}}(\tau) = J(\tau) \mathbf{R}'(\tau) \cdot \mathbf{T}(\tau) \cdot \mathbf{R}(\tau) \quad \dots\dots\dots (53\cdot a)$$

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = J(t) \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{R}(t) \quad \dots\dots\dots (53\cdot b)$$

式(20)の $\hat{\mathbf{f}}_c$ は回転テンソル $\mathbf{R}$ を含む量で定義されているので、速度 $\mathbf{v}$ から直接計算できる式(27)の $\mathbf{f}_c$ を用いる方が便利である。式(30)を考慮すると、

$$\int_t^\tau \dot{\hat{\mathbf{T}}}(t') dt' = \int_t^\tau \mathbf{R}'(t') \cdot \mathbf{f}_c(t') \cdot \mathbf{R}(t') dt' \quad \dots\dots\dots (54)$$

したがって、式(53)(54)を式(52)に代入して次式を得

る。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\tau) &= \frac{1}{J_{0t}(\tau)} \mathbf{R}_{0t}(\tau) \cdot \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{R}_{0t}^t(\tau) \\ &\quad + \frac{1}{J_{0t}(\tau)} \int_t^\tau \mathbf{R}_{0t}(t') \cdot \mathbf{f}_c(t') \cdot \mathbf{R}_{0t}^t(t') dt' \quad \dots\dots\dots (55) \end{aligned}$$

ここで

$$J_{0t}(\tau) \equiv J(\tau)/J(t) \quad \dots\dots\dots (56\cdot a)$$

$$\mathbf{R}_{0t}(\tau) \equiv \mathbf{R}(\tau) \cdot \mathbf{R}^t(t) \quad \dots\dots\dots (56\cdot b)$$

$$\mathbf{R}_{0t}^t(\tau) \equiv \mathbf{R}(\tau) \cdot \mathbf{R}^t(t') \quad \dots\dots\dots (56\cdot c)$$

時刻 t での $\mathbf{R}(t)$ および $J(t)$ は既知であるので、時刻 τ およびその途中の t' ($t < t' < \tau$) での量を求める必要がある。そのためには、まず式(10)から相対変形こう配テンソル $\mathbf{F}_t(\tau)$ を求める必要がある。時刻 τ での $\mathbf{F}(\tau)$ は次のように積分して求めることができる。

$$\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}(t) + \int_t^\tau \dot{\mathbf{F}}(t') dt' \quad \dots\dots\dots (57)$$

式(57)の右辺の第2項に、式(4)を代入して

$$\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}(t) + \int_t^\tau \mathbf{L}(t') \cdot \mathbf{F}(t') dt' \quad \dots\dots\dots (58)$$

式(58)と式(10)を等置して、 $\mathbf{F}_t(\tau)$ を求めると

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{I} + \int_t^\tau \mathbf{L}(t') \cdot \mathbf{F}_t(t') dt' \quad \dots\dots\dots (59)$$

ここで

$$\mathbf{F}_t(t') = \mathbf{F}(t') \cdot \mathbf{F}^{-1}(t) \quad \dots\dots\dots (60)$$

得られた式(59)の $\mathbf{F}_t(\tau)$ を式(10)に代入して、 $\mathbf{F}(\tau)$ を求め、これを極分解する。

$$\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{R}(\tau) \cdot \mathbf{U}(\tau) \quad \dots\dots\dots (61)$$

式(61)から $J(\tau)$ は次のように求める。

$$J(\tau) = \det \mathbf{F}(\tau) = \det \mathbf{U}(\tau) \quad \dots\dots\dots (62)$$

時刻 t' での量も、 $\tau = t'$ として同様に求める。

3・1・2 Jaumann速度を用いた構成式 式(39)の構成式を積分すると次のとおりである。

$$\hat{\mathbf{T}}_t(\tau) = \hat{\mathbf{T}}_t(t) + \int_t^\tau \dot{\hat{\mathbf{T}}}_t(t') dt' \quad \dots\dots\dots (63)$$

ここで

$$\hat{\mathbf{T}}_t(\tau) = J_t(\tau) \mathbf{R}_t^t(\tau) \cdot \mathbf{T}(\tau) \cdot \mathbf{R}_t(\tau) \quad \dots\dots\dots (64\cdot a)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_t(t) = \mathbf{T}(t) \quad \dots\dots\dots (64\cdot b)$$

式(63)の右辺の第2項は次のように計算する。

$$\int_t^\tau \dot{\hat{\mathbf{T}}}_t(t') dt' = \int_t^\tau \mathbf{R}_t^t(t') \cdot \mathbf{f}_t(t') \cdot \mathbf{R}_t(t') dt' \quad \dots\dots\dots (65)$$

したがって、式(64)、(65)を式(63)に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\tau) &= \frac{1}{J_t(\tau)} \mathbf{R}_t(\tau) \cdot \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{R}_t^t(\tau) \\ &\quad + \frac{1}{J_t(\tau)} \int_t^\tau \mathbf{R}_t(t') \cdot \mathbf{f}_t(t') \cdot \mathbf{R}_t^t(t') dt' \quad \dots\dots\dots (66) \end{aligned}$$

式(66)中の $\mathbf{R}_i(\tau)$ および $J_i(\tau)$ は、式(59)に基づいた相対変形こう配テンソル $\mathbf{F}_i(\tau)$ を式(11)のように極分解して求める。なおここで、式(56・b), (11)で求めた相対回転テンソルと体積変化率は異なる。

$$\mathbf{R}_{0i}(\tau) \equiv \mathbf{R}_i(\tau), J_{0i}(\tau) \equiv J_i(\tau) \cdots \cdots (67)$$

3・2 Euler 法

3・2・1 Green 速度を用いた構成式 $\tau = t + \Delta t$ として計算する。式(52)から次のとおり。

$$\hat{\mathbf{T}}(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{T}}(t) + \dot{\hat{\mathbf{T}}}(t) \Delta t \cdots \cdots (68)$$

ここで式(54)から右辺第2項は次のとおり。

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}}(t) \Delta t = \mathbf{R}^t(t) \cdot \mathbf{f}_c(t) \cdot \mathbf{R}(t) \Delta t \cdots \cdots (69)$$

一方、相対変形こう配テンソルは、式(58)から次のように求めることができる。

$$\mathbf{F}_i(t + \Delta t) = \mathbf{I} + \mathbf{L}(t) \Delta t \cdots \cdots (70)$$

3・2・2 Jaumann 速度を用いた構成式 式(63)から次のとおりである。

$$\hat{\mathbf{T}}_i(t + \Delta t) = \mathbf{T}(t) + \dot{\hat{\mathbf{T}}}_i(t) \Delta t \cdots \cdots (71)$$

ここで、式(65)から右辺第2項は次のとおりである。

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}}_i(t) \Delta t = \mathbf{f}_j(t) \Delta t \cdots \cdots (72)$$

相対こう配テンソル $\mathbf{F}_i(t + \Delta t)$ の求め方は式(70)と同様である。式(70)に式(5)を代入すると

$$\mathbf{F}_i(t + \Delta t) = \mathbf{I} + \{\mathbf{D}(t) + \mathbf{W}(t)\} \Delta t \cdots \cdots (73)$$

となる。式(73)を $(\Delta t)^2$ 以上の項を無視して極分解すると、次のようになる。

$$\mathbf{F}_i(t + \Delta t) \cong (\mathbf{I} + \mathbf{W}(t) \Delta t)(\mathbf{I} + \mathbf{D}(t) \Delta t) \cdots (74)$$

すなわち、式(11)と比較すると次のとおり。

$$\mathbf{R}_i(t + \Delta t) = \mathbf{I} + \mathbf{W}(t) \Delta t \cdots \cdots (75 \cdot a)$$

$$\mathbf{U}_i(t + \Delta t) = \mathbf{I} + \mathbf{D}(t) \Delta t \cdots \cdots (75 \cdot b)$$

一方、式(70)は、式(8)を代入し別の分解を得ることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{I} + \{\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t + \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}^t\} \Delta t \\ &\cong (\mathbf{I} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^t \Delta t) \cdot \mathbf{R} \cdot (\mathbf{I} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \Delta t) \cdot \mathbf{R}^t \end{aligned} \cdots \cdots (76)$$

とすることができる。式(76)の分解は極分解からは得られない。式(76)の分解は Green 速度を用いる構成式に適用すべきもので、式(76)を式(10)に代入して、次式を得る。

$$\mathbf{F}(t + \Delta t) = (\mathbf{R} + \dot{\mathbf{R}} \Delta t) \cdot (\mathbf{U} + \dot{\mathbf{U}} \Delta t) \cdots \cdots (77)$$

以上まとめると、Jaumann 速度の構成式の場合、式(70)に基づいて数値的に極分解し⁽²⁾、得られた $\mathbf{R}_i(t + \Delta t)$ と $\mathbf{U}_i(t + \Delta t)$ を用いる。これに対し、Green 速度の場合、式(70)から式(10)に代入して得られる $\mathbf{F}(t + \Delta t)$ に基づき、数値的に極分解された $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ と $\mathbf{U}(t + \Delta t)$ を用いる。

3・3 2 次の Runge-Kutta 法 Euler 法の精度は (Δt) のオーダであるので、より高精度の Runge-

Kutta 法⁽¹⁶⁾のアルゴリズムを示す。

3・3・1 Green 速度を用いた構成式 まず中点の時刻 $(t + \Delta t/2)$ での応力 $\hat{\mathbf{T}}$ と相対こう配テンソル $\mathbf{F}_i$ を求める。

$$\hat{\mathbf{T}}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \hat{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{R}^t(t) \cdot \mathbf{f}_c(t) \cdot \mathbf{R}(t) \frac{\Delta t}{2} \cdots \cdots (78 \cdot a)$$

$$\mathbf{F}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \mathbf{I} + \mathbf{L}(t) \frac{\Delta t}{2} \cdots \cdots (78 \cdot b)$$

得られた $\mathbf{F}_i\{t + (\Delta t/2)\}$ を式(10)に代入し、 $\mathbf{F}\{t + (\Delta t/2)\}$ を求め極分解する。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= \mathbf{F}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \mathbf{F}(t) \\ &= \mathbf{R}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \mathbf{U}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \end{aligned} \cdots \cdots (79)$$

式(78・a)の $\hat{\mathbf{T}}\{t + (\Delta t/2)\}$ 、式(79)の $\mathbf{R}\{t + (\Delta t/2)\}$ と $\mathbf{U}\{t + (\Delta t/2)\}$ から式(53・a)に基づき $\mathbf{T}\{t + (\Delta t/2)\}$ を求め、さらに式(30)から $\mathbf{f}_c\{t + (\Delta t/2)\}$ を求める。以上の準備の下に、時刻 $(t + \Delta t)$ での量を次のように求める。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}(t + \Delta t) &= \hat{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{R}^t\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \mathbf{f}_c\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ &\quad \cdot \mathbf{R}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t \end{aligned} \cdots \cdots (80 \cdot a)$$

$$\mathbf{F}_i(t + \Delta t) = \mathbf{I} + \mathbf{L}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \mathbf{F}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t \cdots \cdots (80 \cdot b)$$

式(80・b)中の $\mathbf{L}\{t + (\Delta t/2)\}$ は時刻 t で評価する。先と同様にして、 $\mathbf{F}_i(t + \Delta t)$ を式(10)に代入して極分解する。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t + \Delta t) &= \mathbf{F}_i(t + \Delta t) \cdot \mathbf{F}(t) \\ &= \mathbf{R}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{U}(t + \Delta t) \end{aligned} \cdots \cdots (81)$$

$\{t + (\Delta t/2)\}$ の場合と同様にして、 $\mathbf{T}(t + \Delta t)$ を求める。なお式(78・b)を式(80・b)に代入すると

$$\mathbf{F}_i(t + \Delta t) = \mathbf{I} + \mathbf{L}(t) \Delta t + \mathbf{L}^2(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdots \cdots (82)$$

となり、Taylor 展開の厳密解に対して $(\Delta t)^2$ の項まで正解であることがわかる。

3・3・2 Jaumann 速度を用いた構成式 Green 速度の場合と同様に、時刻 $\{t + (\Delta t/2)\}$ での量を求める。

$$\hat{\mathbf{T}}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \mathbf{T}(t) + \mathbf{f}_j(t) \frac{\Delta t}{2} \cdots \cdots (83 \cdot a)$$

$$\mathbf{F}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \mathbf{I} + \mathbf{L}(t) \frac{\Delta t}{2} \cdots \cdots (83 \cdot b)$$

式(83・b)から得られた $\mathbf{F}_i\{t + (\Delta t/2)\}$ をただちに極分解する。

$$\mathbf{F}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \mathbf{R}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \mathbf{U}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdots \cdots (84)$$

得られた $\hat{\mathbf{T}}_i\{t + (\Delta t/2)\}$ 、 $\mathbf{R}_i\{t + (\Delta t/2)\}$ 、 $\mathbf{U}_i\{t$

$+(\Delta t/2)$ から、式(64・a)により $\mathbf{T}(t+(\Delta t/2))$ 、式(49)から $\mathbf{f}_i(t+(\Delta t/2))$ を求める。以上の準備のもとに、時刻 $(t+\Delta t)$ での量を次のようにして求める。

$$\hat{\mathbf{T}}_i(t+\Delta t) = \mathbf{T}(t) + \mathbf{R}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \mathbf{f}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \mathbf{R}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t \quad \dots\dots\dots (85 \cdot a)$$

$$\mathbf{F}_i(t+\Delta t) = \mathbf{I} + \mathbf{L}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \mathbf{F}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t \quad \dots\dots\dots (85 \cdot b)$$

得られた $\mathbf{F}_i(t+\Delta t)$ はただちに極分解する。

$$\mathbf{F}_i(t+\Delta t) = \mathbf{R}_i(t+\Delta t) \cdot \mathbf{U}_i(t+\Delta t) \quad \dots\dots\dots (86)$$

$\{t+(\Delta t/2)\}$ の場合と同様にして、 $\mathbf{T}(t+\Delta t)$ を求める。

3・4 従来の数値アルゴリズム 従来提案されたアルゴリズムは^{(6)~(10)}、Jaumann 速度の構成式に基づくもので、剛体回転角 $\mathbf{R}_i(t)$ の算定法を工夫している⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。しかし、これらは体積変化率 J_i の計算法を示していない。さて、客観性を保持しない Euler 法のアルゴリズムは、Green 速度の場合、式(26)から次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t+\Delta t) &= \mathbf{T}(t) + \dot{\mathbf{T}}(t) \Delta t \\ &= \mathbf{T}(t) + \left\{ \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \mathbf{T}(t) - \mathbf{T}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{J(t)} \mathbf{f}_c(t) \right\} \Delta t \quad \dots\dots\dots (87) \end{aligned}$$

剛体回転スピン $\boldsymbol{\Omega}$ の計算法は、前報⁽²⁾による。一方、Jaumann 速度の場合、式(31)から次のとおりである。

$$\mathbf{T}(t+\Delta t) = \mathbf{T}(t) + \{ \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{T}(t) - \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{W}(t) + \mathbf{g}(t) \} \Delta t \quad \dots\dots\dots (88)$$

4. 単純せん断問題

図1に示す単純せん断問題を例に、Green あるいは Jaumann 速度を用いた構成式の相違と、数値アルゴリズムの精度を示す。

4・1 構成式の比較 図1に示すように、直交座標系 x_1, x_2 を用いる。 x_i ($i=1, 2$) 軸方向の単位基底ベ

図1 単純せん断問題の変形と座標系

クトルを $\mathbf{e}_i$ とする。変形前の状態 C_0 で一辺の長さが1であった正方形ブロックは、図1に示すように平行四辺形に変形する。変形前の任意の点 p_0 の座標を (x_1, x_2) 、変形後のそれを (X_1, X_2) とする。また四辺形上端の変位を e とすると、図1の角度 α と次の関係がある。

$$e = \tan \alpha \quad \dots\dots\dots (89)$$

変位ベクトルを $\mathbf{u}$ とすると、次のように仮定できる。

$$\mathbf{u} = (\tan \alpha) x_2 \mathbf{e}_1 = (ex_2) \mathbf{e}_1 \quad \dots\dots\dots (90)$$

変形こう配テンソル $\mathbf{F}$ は、 $\mathbf{F}_0$ を変形前の形状に対するこう配演算子として、次のように表示できるので、

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \mathbf{F}_0 \quad \dots\dots\dots (91)$$

式(90)を式(91)に代入し、基底ベクトルが単位直交系であることから、次のように表示することにする。

図2 主値と主方向

図3 スピンの分解

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (92)$$

$\mathbf{F}$ の極分解を行うため、右 Cauchy-Green 変形テンソル $\mathbf{C}$ の固有値解析を行う。

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\Phi}^t \quad \dots\dots\dots (93)$$

$\boldsymbol{\Phi}$ は主軸を表す直交テンソル、 $\boldsymbol{\Lambda}$ は主値を表す対角テンソルである。ここで

$$e = 2 \tan \beta \quad \dots\dots\dots (94)$$

と変数変換すると、 $\boldsymbol{\Phi}$ と $\boldsymbol{\Lambda}$ は次のように表示できる。

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (95)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \phi_{11} &= \frac{\cos \beta}{\sqrt{2(1+\sin \beta)}}, & \phi_{12} &= \frac{\cos \beta}{\sqrt{2(1-\sin \beta)}} \\ \phi_{21} &= \frac{1+\sin \beta}{\sqrt{2(1+\sin \beta)}}, & \phi_{22} &= \frac{-(1-\sin \beta)}{\sqrt{2(1-\sin \beta)}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (96)$$

$$\lambda_1 = \left(\frac{1+\sin \beta}{\cos \beta} \right)^2, \quad \lambda_2 = \left(\frac{1-\sin \beta}{\cos \beta} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (97)$$

$\boldsymbol{\Phi}$ の列ベクトルが主方向を表すので、主方向の角度を次のように定める。

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}}, \quad \theta_2 = \tan^{-1} \frac{\phi_{22}}{\phi_{12}} \quad \dots\dots\dots (98)$$

図 2 に、主値は平方根 $\sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_2}$ および主方向 θ_1 , θ_2 を角度 β の関数として表す。 $\mathbf{C}$ すなわち $\mathbf{U}$ の主方向は、変形開始時にはせん断変形であるため $\pm \pi/4$ であるが、 $\beta \rightarrow \pi/2$ の大変形時には $\pi/2$ と零に近づく。 $\mathbf{U}$ と $\mathbf{R}$ は次のように計算できる。

図 4 Green 速度の構成式の数値積分の精度

図 5 Jaumann 速度の構成式の数値積分の精度

$$U = \Phi \cdot A^{1/2} \cdot \Phi^t = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & \frac{1 + \sin^2 \beta}{\cos \beta} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (99)$$

$$R = F \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (100)$$

式(4), (6)から L, W は次のとおりである。

$$L = \frac{2\dot{\beta}}{\cos^2 \beta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \frac{\dot{\beta}}{\cos^2 \beta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (101)$$

また剛体スピン Ω と変形スピン $R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1}) \cdot R^t$ は式(99), (100)を用いて次のとおり。

$$\Omega = \dot{\beta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1})_a \cdot R^t = \dot{\beta} \tan^2 \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (102)$$

図3に, $W, \Omega, R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1})_a \cdot R^t$ のスピンを $\dot{\beta}$ で除して示す。 Ω は常に一定であるのに比べ, 変形スピンは変形とともに急速に大きくなることが判る。

式(99)に基づき, 変形スピンの成分を計算すると, 次のようになる。

$$(\dot{U} \cdot U^{-1})_a = \dot{\Phi} \cdot \Phi_t - (U \cdot \dot{\Phi} \cdot \Phi_t \cdot U^{-1})_a \dots\dots\dots (103)$$

式(103)において $A^{1/2}$ が対角テンソルであることから $(A^{1/2} \cdot A^{-1/2})_a = O$, および $\Phi \cdot \dot{\Phi}^t = -\dot{\Phi} \cdot \Phi^t$ を用いた。式(103)の右辺の第1項は剛体回転前における主軸のスピン, 第2項は主軸スピンと変形との連成スピンである。これらを式(95)から求めると次のとおりである。

$$\dot{\Phi} \cdot \Phi^t = -\frac{\dot{\beta}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (104 \cdot a)$$

$$(U \cdot \dot{\Phi} \cdot \Phi^t \cdot U^{-1})_a = -\frac{\dot{\beta}(1 + \sin^2 \beta)}{2 \cos^2 \beta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (104 \cdot b)$$

式(104・a)の主軸スピンは, 角度 β の増加する向きと反対で一定である。このことは図2の主方向の動きからも推量できる。大変形時は式(104・b)のスピンの支配的である。

式(23)から $\dot{E}_R$ を求めると次のとおり。

$$\dot{E}_R = \dot{\beta} \begin{pmatrix} -2 \tan \beta, \frac{1}{\cos^2 \beta} - 2 \tan^2 \beta \\ \frac{1}{\cos^2 \beta} - 2 \tan^2 \beta, 2 \tan \beta \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (105)$$

これを積分して

$$E_R = \begin{pmatrix} 2 \ln(\cos \beta), & 2\beta - \tan \beta \\ 2\beta - \tan \beta, & -2 \ln(\cos \beta) \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (106)$$

式(106), (99)から

$$\text{tr } E_R = 0, \quad J = \det U = 1 \quad \dots\dots\dots (107)$$

となることから, 式(18)より Green 速度を用いた弾性体の応力は次のようになる。

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = 2\mu_0 R \cdot E_R \cdot R^t \quad \dots\dots\dots (108)$$

ここで

$$T_{11} = -T_{22} = 2\mu_0 \{ 2 \cos 2\beta \ln(\cos \beta) + 2\beta \sin 2\beta - 2 \sin^2 \beta \} \quad \dots\dots\dots (109 \cdot a)$$

$$T_{12} = T_{21} = 2\mu_0 \{ (2\beta - \tan \beta) \cos 2\beta - 2 \sin 2\beta \ln(\cos \beta) \} \quad \dots\dots\dots (109 \cdot b)$$

式(109)は, Dienes⁽⁵⁾が式(26)に基づいて求めた結果と一致する。

また, 式(31)の Jaumann 速度を用いる構成式の場合は, 変形後の状態 C での速度分布 v を仮定する必要がある。変位 u の場合と同様に, 次のように仮定できる。

$$v = (\dot{e} X_2) e_1 \quad \dots\dots\dots (110)$$

したがって, L は式(4)から次のようになる。

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \dot{e} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (111)$$

式(111)の L に基づき W を計算し, 式(31)の構成式に代入すると, $\dot{e}$ が一定の場合, 次の解析解を得る⁽⁵⁾。

$$T_{11} = -T_{22} = \mu_0 (1 - \cos \dot{e} t) \quad \dots\dots\dots (112 \cdot a)$$

$$T_{12} = T_{21} = \mu_0 \sin \dot{e} t \quad \dots\dots\dots (112 \cdot b)$$

4・2 数値アルゴリズムの精度 変形後の状態における速度分布は式(110)のように仮定できる。

図4に Green 速度の構成式を用いた場合のアルゴリズムの精度を, 式(109)の厳密解とともに示す。増分の大きさは $\Delta e = 0.1$ である。式(87)の従来のアルゴリズムの精度は, 新しいアルゴリズムの Euler 法と同程度であるが, Runge-Kutta 法を用いると厳密解に一致する。

図5に Jaumann 速度の構成式を用いた場合のアルゴリズムの精度を, 式(112)の厳密解とともに示す。式(88)の従来のアルゴリズムの精度は, 新しいアルゴリズムの Euler 法に比べて劣ることがわかる。Runge-Kutta 法を用いると厳密解に一致する。図からわかるように, Jaumann 速度を用いた場合, 応力-ひずみ関係は「振動」する。これは明らかに不合理である。

5. 結 論

客観応力速度として Green 速度と Jaumann 速度を用いる弾塑性体の構成式について、有限の剛体回転を受ける場合にも客観性を保持する構成式を示した。両者とも構成式を剛体回転前の量に変換するが、基準配置を変形前の状態に設定する Green 速度の構成式は、基準配置を変形後の状態に設定すると、Jaumann 速度の構成式が得られることを示した。導いた客観性保持の構成式に基づき、Euler 法と Runge-Kutta 法の数値積分アルゴリズムを示した。また単純せん断問題を例に、両者の構成式で用いるスピンの違いを明らかにし、提案した数値積分の精度を検証した。

文 献

- (1) 渡部, 機論, 54-497, A (1988), 100.
- (2) 渡部, 機論, 54-501, A (1988), 992.
- (3) 渡部, 機論, 55-510, A (1989), 257.
- (4) 渡部, 機論, 55-514, A (1989), 1355.

- (5) Dienes, J. K., *Acta Mech.*, **32** (1979), 217.
- (6) Hughes, T. J. R. and Winget, J., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **15** (1980), 1862.
- (7) Rubinstein, R. and Atluri, S. N., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **36** (1983), 277.
- (8) Reed, K. W. and Atluri, S. N., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **39** (1983), 245.
- (9) Nagtegaal, J. C. and Veldpaus, F. E. (Pitman, J. F. 編), *Numerical Analysis of Forming Processes*, Chap. 12, (1984), 351, John-Wiley & Sons.
- (10) Weber, G., ほか 2 名, (Atluri, S. N. and Yagawa, G. 編), *Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci.*, (1988), 17vii, Springer.
- (11) 渡部, 日本機械学会 RC-89 研究分科会, 第 5 小委員会, 資料 No. 5-2-3, (1988).
- (12) 渡部, 構造工学における有限要素法の理論と応用(II), (1988), 103, 日本鋼構造協会.
- (13) Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, (1969), Prentice-Hall.
- (14) Truesdell, C. and Noll, W., (Flügge, S. 編), *The Nonlinear Field Theory of Mechanics, Encyclopedia of Physics*, III 3, (1965), Springer.
- (15) 北川, 弾・塑性力学, (1987), 裳華房.
- (16) 例えば, 印刷, マトリックスの数値計算, (1971), オーム社.

討 論

〔質問〕 後藤 学 (岐阜大学工学部)

(1) 瀬口らや(付1)質問者は(付2), 弾塑性変形の記述に用いられる応力速度 $\dot{T}$ は, 客観性を有するのみでなく, T の第 1, 2, 3 不変量の物質微分 $\dot{I}$, $\dot{II}$, $\dot{III}$ が $\dot{T}=0$ のとき零であるべきことを述べ, $\dot{T}$ の形としては

$$\dot{T} = \dot{T} - wT + Tw$$

以外にないことを述べた(w は適当なスピン). これは, Mises 材を考えると(このとき降伏関数 $\propto II$), $\dot{T}=0$ なのに $\dot{II} \neq 0$ だと, $\dot{T}=0$ なのに塑性変形が進んでしまう, というのがその一つの理由である. 貴式(25), (32)の $\dot{T}_c$ と $\dot{T}$ は, 以上のことに違背している.

(2) 質問者は文献(付3)で, 有限変形等方性弾性体では, 大きな単純せん断変形に対してせん断応力 τ が単調増加にも, sinusoidal にも成り得, “論理性” だけでは後者を排除し得ないことを述べた. その意味で図 4, 5 から Jaumann 速度に対する Green-Naghdi 速度の優位性について何も言えない.

(3) 全体に, 既存理論に対する新主張点に乏しいのではないか.

〔回答〕 (1) Updated 座標系において, 式(32)の Jaumann 応力速度中に $T(\text{tr}D)$ の項が含まれる必

要性は最初に Hill (付4)によって論じられている. これは第 1, 2 種の Piola-Kirchhoff 応力速度中の体積変化率速度 $T(\text{tr}D)$ に係る仕事を包含するためのもので, これにより Kirchhoff 応力の Jaumann 速度, すなわち式(32), および第 1, 2 種の Piola-Kirchhoff 応力速度は速度形ポテンシャルから求めることができる(付4)(付5)式(25)の Green 応力速度中に $T(\text{tr}D)$ が必要な理由は Jaumann 速度の場合と同様であるが, Jaumann 速度におけるような剛性マトリックスを対称とするようなポテンシャルの形にはならない(付6). また, 応力不変量は Cauchy 応力の代わりに Kirchhoff 応力に置き換えれば⁽³⁾, ご指摘の文献の論旨がそのまま適用でき, 応力不変量の停留性の要請は満足される.

(2) ご指摘の貴論文のように, 有限変形非線形等方弾性体の構成式の係数パラメータを適宜選択すれば, 単純せん断問題の応答には任意性がある. また, 過去の履歴のわからない材料の挙動を表現するため, 基準配置の概念を排除した亜弾性体の有用性は広く知られている⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾. Green 形構成式は, 式(55)からわかるように, 応力が回転テンソル R と変形テンソル U から計算されており, 過去の履歴に依存する構成式と言える. 一方, Jaumann 速度を用いた亜弾性体の構成式では, 過去の履歴の効果は現地点での応力 T という

形を通して表現される。ところが、式(31)の形では、 $\mathbf{T}$ について零度、すなわち塑性変形に関する項を除いて、応力 $\mathbf{T}$ に依存する項、例えば $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T})$ の項が含まれておらず、このことが単純せん断問題の「振動」を誘起した原因と考えられる。したがって、亜弾性体の構成式を使用することを前提とするならば、 $\mathbf{T}$ について1度以上で展開し、新たに付加された有限変形に関する項の材料係数を実験結果から定めることになる(付7)。これに対し、荷重履歴のない材料では基準配置を変形前に置くことができ、特に Green 形の構成式を用いれば、新たな材料係数を導入することなく「振動」の困難が回避される。

(3) ご指摘のことは構成式に関するものと思われるが、本研究は有限な剛体回転がある場合にも高精度に応力増分を求めるために基礎となる構成式と具体的なアルゴリズムについて論じたもので、ここに提案したような手法は著者の知る限りない。従来の Jaumann 形の構成式に関する客観性保持アルゴリズムは^{(6)~(10)}

相対剛体回転テンソル $\mathbf{R}_i(\tau)$ だけを高精度に求めるようとするものである。これに対し、本研究では、式(59)の相対変形こう配テンソルに基づけば、 $\mathbf{R}_i(\tau)$ だけでなく相対変形テンソル $\mathbf{U}_i(\tau)$ も高精度に求められることを示した。また、従来、Green 形構成式は数値的に取扱いの困難なものと考えられていたが、本研究で示したように、変形こう配テンソルの極分解を前提にした客観性保持の構成式にまでさかのぼれば、Jaumann 形も Green 形の数値的な取扱いは同程度であることを示すことができた。

-
- (付1) 瀬川(解説), 材料, 22-237(1972), 586.
 - (付2) 後藤(解説), 塑性と加工, 27-300(1986), 25.
 - (付3) Gotoh, M., *JSME Int. J., Ser. I.*, 32-2(1989), 230.
 - (付4) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, 15(1967), 371.
 - (付5) Atluri, S. N., *J. Struct. Mech.*, 8-1(1980), 61.
 - (付6) 渡部, 機論, 56-524, A(1990), 883.
 - (付7) Atluri, S. N., *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 46-2(1984), 137.