非線形計画法による平板の大たわみ解析*
(第 4 報, 内周が固定支持された軸対称定厚中空円板,
および大たわみ問題の設計式)

大 滝 誠 一^{*1}

**Large Deflection Analysis of Flat Plate Using
Nonlinear Programming Theory**
(4th Report, Axisymmetric Annular Plates with Constant Thickness and with
Clamped Inner Edges, and Design Formulae for the Large Deflection Problem)

Seiichi OHTAKI

The large deflection analysis of the annular plates with clamped inner edges is investigated using the nonlinear programming technique. The distributions of out-of-plane and in-plane displacements and stresses are shown in the three cases. Then, the coefficients of the design formulae for the large deflection problem are proposed for the ten cases given in the previous and the present reports. The three ratios are called a nonlinear stress reduction coefficient, a nonlinear deflection reduction coefficient and an in-plane displacement coefficient, respectively. By multiplying these coefficients by the linear solutions or the thickness of the plates, we can calculate the maximum stress and displacements. Finally, it is concluded that the reduction of the maximum stress is smaller than that of the maximum deflection when the out of plane displacements are of the same order as the plate thickness.

Key Words: Structural Analysis, FEM, Large Deflection, Nonlinear Programming, Annular Plates, Clamped Inner Edges, Design Formulae

1. ま え が き

円板や中空円板形状を持つダイヤフラム, 自動車のクラッチ板, コンピュータ・システムにおけるディスク類などの設計で, 大たわみ変形に対し安全な強度を持たせることはもちろん, これらの変形挙動を知ることが重要な設計課題の一つである。

中空円板の大たわみ問題に関する従前の研究では, 限られた境界条件を持つ形状についてしか解が示されていなかった^{(1)~(9)}。しかも, これらでは面外変位と面内変位の連成は考慮されておらず, また, 面内変位の変形量が明らかでなかった。かような理由から, 種々の境界条件と荷重条件を持つ形状に対し, 大たわみ問題に関する資料と, より簡便な設計式を求めることが不可欠である。

さて, 著者は, 第 1 報⁽¹⁰⁾で, 非線形計画法を用いた有限要素法により中空円板の大たわみ問題の解法と解析例を示し, 連成を考慮した場合と, 考慮しない場合について変位と応力などの違いを示した。第 2 報では, 中空円板の外周が固定支持された場合⁽¹¹⁾について, さ

らに, 第 3 報では, 内周または外周が単純支持された場合⁽¹²⁾について, 変位および応力の分布を明らかにした。

そこで本報では, 内周が固定支持された境界条件を有する 3 種類の軸対称中空円板の大たわみ解析を行い, 連成を考慮した理論による変位と応力の結果を示す。

また, 前報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾および本報で示した全ケースの内, 10 ケースの結果をまとめ, 大たわみ問題に関する新しい設計式を示す。

その手順を以下に示す。まず, 板厚と同じ最大面外変位を得る微小弾性理論による荷重を基準荷重 P_0 とし, 荷重 P を無次元化した荷重比 P/P_0 に対し, 最大応力と最大面外変位の線形解を求める。次に, 大たわみ解析で得られた最大応力と変位について, 線形解または板厚に対する比率を表す三つの係数を定義する。それらは非線形応力低減係数, 非線形たわみ低減係数および面内変位係数と呼ばれる。これらの係数を荷重比に対応する線形解または板厚に乘じ, 大たわみ問題の最大応力と最大変位が得られる。前述のケースについてこれらの係数を表にして示し, 結果について考察を行う。

* 平成元年 11 月 10 日 材料力学講演会において講演, 原稿受付 平成元年 5 月 30 日。

^{*1} 正員, 北海道工業大学 (〒006 札幌市手稲区手稲田 419-2)。

2. 解析方法と解析例

2.1 解析方法 大たわみ問題を解析するとき、増分荷重に対し幾何剛性マトリックスを導入し、連立一次方程式と収束計算により、線形化した釣合式を満足するよう計算する解法が多く用いられる。しかし、増分計算に要する計算コストの経済性と、線形化により高次のエネルギーを無視するために、理論の厳密性を欠くなどの問題点がある。したがって、これらの点を配慮した解法が望ましい。

変位形有限要素法である本解法では、Lagrange 座標が使用されているが、単一荷重に対し解が得られる。また、非線形項を含むひずみ-変位関係から導かれる全ポテンシャルエネルギーを極小化することにより、オーダの異なる面外変位、面内変位が得られる。このように、非線形問題を線形化せずに解くことが本解法の特徴であり、また利点でもある。

ここで本解法の概略を説明する。図1に示す扇形板要素の座標および変位成分について、変位関数を

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (H_{0i}^{(1)}(\xi) H_{0j}^{(1)}(\eta) f_{ij} + A H_{1i}^{(1)}(\xi) H_{0j}^{(1)}(\eta) f_{\xi ij} + B H_{0i}^{(1)}(\xi) H_{1j}^{(1)}(\eta) f_{\eta ij} + AB H_{1i}^{(1)}(\xi) H_{1j}^{(1)}(\eta) f_{\xi \eta ij}) \quad \dots\dots\dots (1)$$

と仮定する。ここで、 f は面内変位 u, v および面外変位 w のいずれかを表し、例えば、式中の記号 $u_{,\xi}, w_{,\xi}$ は $\partial u / \partial \xi, \partial w / \partial \xi$ の略記号であり、 $H_i^{(1)}$ は1次の Hermite 補間関数、 A, B は Lamé のパラメータである。

ひずみ-変位関係は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= u_{,\xi} / A + w_{,\xi}^2 / 2A^2 - zw_{,\xi\xi} / A^2 \\ \varepsilon_{\eta} &= v_{,\eta} / B + B_{,\xi} u / AB + w_{,\eta}^2 / 2B^2 \\ &\quad - zw_{,\eta\eta} / B^2 - zB_{,\xi} w_{,\xi} / A^2 B \\ \gamma_{\xi\eta} &= u_{,\eta} / B + v_{,\xi} / A - B_{,\xi} v / AB \\ &\quad + w_{,\xi} w_{,\eta} / AB - 2zw_{,\xi\eta} / AB \\ &\quad + 2zB_{,\xi} w_{,\eta} / AB^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表され、一要素のひずみエネルギー U は

$$U = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\varepsilon_{\xi}^2 + \varepsilon_{\eta}^2 + 2\nu \varepsilon_{\xi} \varepsilon_{\eta} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{\xi\eta}^2 \right] AB dz d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (3)$$

で書かれる。また、全ポテンシャルエネルギー Π は、ひずみエネルギーと外部仕事 W を用いて、

$$\Pi = U_2 + U_3 + U_4 - W \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表される。ここで下付添字 2, 3, 4 は、ひずみエネルギーの変位成分に関する次数を表す。

式(1)と(2)を式(3)に代入し、制約なし最適化問

題として式(4)の目的関数を、非線形計画法の一解法である DFP 法 (Davidon-Fletcher-Powell Method) により解く。

2.2 解析例 取扱う形状で外半径、内半径、板厚は、それぞれ a, b, h であり、半径比、板厚比は $a/b = 2, h/a = 0.02$ である。この形状と物性値を図2(a)に示す。なお、計算には、既報と同様に開き角 0.05 rad なる半径方向に12分割した要素モデルを用いた。また、3ケースの境界条件および荷重条件を図2(b)に、また、内、外周上の変位成分の境界条件を表1に示す。表中の F は変位成分が自由である場合を、 0 は拘束されていることを表す。なお、ケース J の外周上の境界条件は、支持位置で面内変位が自由である移動単純支持とする。なお、DFP 法の収束判定基準として、一次探索最小幅、目的関数の最小減少率、最小のステップ幅を、 $0.1 \times 10^{-7}, 0.1 \times 10^{-4} \sim 10^{-6}, 0.1 \times 10^{-4} \sim 10^{-6}$ と

表1 内周、外周上の境界条件

	$u_{,\xi}$	$u_{,\eta}$	$w_{,\xi}$	$w_{,\eta}$	$u_{,\xi}$	$u_{,\eta}$	$w_{,\xi}$	$w_{,\eta}$
Case H, I	0	F	0	0	F	F	F	F
Case J	0	F	0	0	F	F	0	F

SUBSCRIPT I: INNER BOUNDARY
SUBSCRIPT O: OUTER BOUNDARY
FREEDOM (F: FREE, 0: FIXED)

図1 扇形板要素の座標系と記号

(a) 中空円板および要素モデル (b) 境界条件および荷重条件

図2 内周が固定支持された中空円板

した。

3. 結果および考察

3・1 内周が固定支持された場合 $P/P_0=0.2, 0.6, 1.0$ について、各ケースの u, w , 面内応力 σ_t , および上表面上における曲げ応力 σ_B の分布を示す。また、変位と応力は $w/h, u/h, \sigma a^2/Eh^2$ と無次元化して表し、図番の (a), (b), (c) はそれぞれケース H, I, J についての結果を表す。

図 3 (a), (b), (c) に、半径方向断面における w の分布を示す。ケース H, I において、 w は自由端に近づくにつれて直線状の分布となる。また、ケース J では w の分布は下に凸となる曲線となる。これらの最大面外変位はそれぞれの荷重比に対してほぼ同じ値となり、し

かも荷重比の増加に対する曲線間の狭まる割合も同程度である。すなわち、面内力の非線形効果が面外変位に及ぼす影響は 3 ケースでほぼ同じである。

図 4 (a), (b), (c) に、半径方向断面上の u を示す。各ケースで、内周付近でわずかに反りが生ずるが、面内変位についてもその分布は、互いにほぼ類似した形状を示した。この傾向は、既報⁽¹⁾における周辺の片方が自由境界であるケース C, D の分布と傾向が似ている。

図 5 (a), (b), (c) に、半径方向断面上における半径方向応力 σ_{rt} と σ_{rB} を示す。3 ケースとも σ_{rt} の分布は外周で小さな値となるが、大きな荷重比に対し、その分布はやや乱れている。ケース H, I において、 σ_{rB} は外周で零となる + をとる曲線であり、一方、ケース

図 3 半径方向断面中央面における w の分布

図 4 半径方向断面中央面における u の分布

Iでは固定端近傍で-をとる分布となる。最大曲げ応力は、いずれのケースでも固定端で生じ、ケースIの値が最も大きい。最大合成応力は $\sigma_{\theta\theta}$ と $\sigma_{\theta I}$ の和であり、ケースH, Iでは内周の上表面で、ケースJでは内周の下表面で生ずる。

同様に、図6(a), (b), (c)に半径方向断面上の円周方向応力 $\sigma_{\theta I}$, $\sigma_{\theta B}$ を示す。 $\sigma_{\theta I}$ は3ケースとも内周側で+, 外周側で-をとり、交差位置が若干異なる。 $\sigma_{\theta B}$ はケースH, Iでは+, ケースJでは-をとる曲線となる。

以上のように、本報および既報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾で示した例題では、境界条件および荷重条件がWahlによる微小弾性解⁽¹³⁾と同一であり、回転支持および移動支持を含む全13ケースについて大たわみ解析がなされた。これら

の結果から、荷重条件が違っても境界条件が同一であるならば、面外変位および面内応力の分布はほぼ類似した形状が得られた。しかし、曲げ応力については、荷重条件が異なると最大応力の大きさは異なることがわかった。

3.2 大たわみ問題の設計式 形状、荷重比および物性値が規定されると、最大応力と最大面外変位の線形解は容易に求められる。ここで、3種類の係数を定義する。それらは最大合成応力、最大面外変位および最大面内変位について、それぞれ非線形応力低減係数： k_s 、非線形たわみ低減係数： k_w 、面内変位係数： k_u である。荷重比に対応する線形解、または板厚にこれらの係数を掛けることにより、大たわみ問題に関するそれぞれの値が求められる。

図5 半径方向断面における $\sigma_{\theta I}$, $\sigma_{\theta B}$ の分布

図6 半径方向断面における $\sigma_{\theta I}$, $\sigma_{\theta B}$ の分布

表 2 本解法による微小弾性理論の係数 k, k_1

Case		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$a/b =$											
1.25	k	1.1441×10^{-1}	7.1450×10^{-2}	1.9433×10^{-1}	1.0478×10^{-1}	1.1037×10^{-1}	5.9190×10^{-1}	6.5638×10^{-1}	2.2727×10^{-1}	1.3510×10^{-1}	1.2194×10^{-1}
	k_1	1.2852×10^{-3}	6.8373×10^{-4}	5.0392×10^{-3}	1.9926×10^{-3}	3.4139×10^{-1}	1.8379×10^{-1}	2.0231×10^{-1}	5.1048×10^{-3}	2.3148×10^{-3}	3.4580×10^{-3}
1.5	k	2.1939×10^{-1}	1.8202×10^{-1}	3.2054×10^{-1}	2.5866×10^{-1}	1.2403×10^{-1}	9.7668×10^{-1}	1.1880×10^{-1}	4.2757×10^{-1}	4.0943×10^{-1}	3.3682×10^{-1}
	k_1	6.4021×10^{-3}	4.9812×10^{-3}	2.4143×10^{-2}	1.3900×10^{-2}	5.1863×10^{-1}	4.1389×10^{-1}	4.9128×10^{-1}	2.4888×10^{-2}	1.8331×10^{-2}	2.5106×10^{-2}
2	k	4.0447×10^{-1}	3.6002×10^{-1}	4.5460×10^{-1}	4.7909×10^{-1}	1.4818×10^{-1}	1.4431×10^{-1}	2.0483×10^{-1}	7.5251×10^{-1}	1.0396×10^{-1}	7.3343×10^{-1}
	k_1	2.3766×10^{-2}	2.3028×10^{-2}	8.0974×10^{-2}	5.7536×10^{-2}	6.7206×10^{-1}	6.8186×10^{-1}	9.0164×10^{-1}	8.7689×10^{-2}	9.3788×10^{-2}	1.1282×10^{-1}
3	k	7.0069×10^{-1}	5.9049×10^{-1}	6.7332×10^{-1}	6.5514×10^{-1}	1.8895×10^{-1}	1.8824×10^{-1}	3.3381×10^{-1}	1.2027×10^{-1}	2.1463×10^{-1}	1.2121×10^{-1}
	k_1	6.2005×10^{-2}	6.2005×10^{-2}	1.7210×10^{-1}	1.2957×10^{-1}	7.3367×10^{-1}	8.2369×10^{-1}	1.2251×10^{-1}	2.0949×10^{-1}	2.8902×10^{-1}	2.9598×10^{-1}
4	k	9.2634×10^{-1}	6.2505×10^{-1}	1.0218×10^{-1}	7.0797×10^{-1}	2.1737×10^{-1}	2.0866×10^{-1}	4.3155×10^{-1}	1.5026×10^{-1}	2.9801×10^{-1}	1.4456×10^{-1}
	k_1	9.2333×10^{-2}	9.2695×10^{-2}	2.1719×10^{-1}	1.6211×10^{-1}	7.2377×10^{-1}	8.2957×10^{-1}	1.3021×10^{-1}	2.9376×10^{-1}	4.4816×10^{-1}	4.1703×10^{-1}
5	k	1.1126×10^{-1}	6.6622×10^{-1}	1.3073×10^{-1}	7.2762×10^{-1}	2.4205×10^{-1}	2.1924×10^{-1}	5.1018×10^{-1}	1.7315×10^{-1}	3.6462×10^{-1}	1.5758×10^{-1}
	k_1	1.1478×10^{-1}	1.1199×10^{-1}	2.3761×10^{-1}	1.7528×10^{-1}	7.0359×10^{-1}	8.1323×10^{-1}	1.3068×10^{-1}	3.5026×10^{-1}	5.6383×10^{-1}	4.9251×10^{-1}

$$\sigma_{max}^e = k \frac{qa^2}{h^2} \text{ or } \sigma_{max}^e = k \frac{P}{h^2}, w_{max}^e = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \text{ or } w_{max}^e = k_1 \frac{Pa^2}{Eh^3}$$

表 3 大たわみ解析による非線形応力低減係数, 非線形たわみ低減係数および面内変位係数 ($a/b=2, h/a=0.02$)

LOAD RATIO	0.4	0.8	1.2	LOAD RATIO	0.1	0.2	0.3
Case A	k_s 0.990 k_w 0.907 k_u 0.449×10^{-3}	0.920 0.786 0.143×10^{-2}	0.851 0.686 0.235×10^{-2}	Case F	k_s 1.021 k_w 0.981 k_u 0.865×10^{-4}	0.914 0.896 0.286×10^{-3}	0.867 0.785 0.495×10^{-3}
LOAD RATIO	0.4	0.8	1.2	LOAD RATIO	0.1	0.2	0.3
Case B	k_s 0.992 k_w 0.914 k_u 0.695×10^{-3}	0.934 0.786 0.212×10^{-2}	0.871 0.681 0.373×10^{-2}	Case G	k_s 1.066 k_w 0.961 k_u 0.863×10^{-4}	0.990 0.870 0.293×10^{-3}	0.933 0.806 0.600×10^{-3}
LOAD RATIO	0.2	0.4	0.6	LOAD RATIO	0.2	0.6	1.0
Case C	k_s 0.991 k_w 0.974 k_u 0.590×10^{-3}	0.964 0.916 0.312×10^{-2}	0.928 0.855 0.605×10^{-2}	Case H	k_s 0.996 k_w 0.973 k_u 0.753×10^{-3}	1.011 0.944 0.643×10^{-2}	0.978 0.840 0.138×10^{-1}
LOAD RATIO	0.2	0.6	0.6	LOAD RATIO	0.2	0.6	1.0
Case D	k_s 0.991 k_w 0.960 k_u 0.840×10^{-3}	0.968 0.880 0.291×10^{-2}	0.926 0.784 0.523×10^{-2}	Case I	k_s 1.007 k_w 0.971 k_u 0.725×10^{-3}	0.987 0.928 0.580×10^{-2}	0.953 0.868 0.129×10^{-1}
LOAD RATIO	0.1	0.2	0.3	LOAD RATIO	0.2	0.6	1.0
Case E	k_s 1.003 k_w 0.963 k_u 0.865×10^{-4}	0.914 0.854 0.280×10^{-3}	0.854 0.785 0.560×10^{-3}	Case J	k_s 1.009 k_w 0.996 k_u 0.830×10^{-3}	1.046 0.937 0.640×10^{-2}	1.025 0.860 0.140×10^{-1}

$$\sigma_{max}^L = k_s \sigma_{max}^e, w_{max}^L = k_w w_{max}^e, u_{max}^L = k_u h$$

図 7 10 ケースの境界条件と荷重条件

ここで、前述の13ケースの内、10ケースを選び図7に再記する。なお、ケースE, F, G, Jでは、単純支持条件として移動支持された場合のみを取扱う。

微小弾性理論により Wahl⁽¹³⁾が示した線形解を計算する係数では、有効数字のけた数が統一されていなかった。また、いくつかのケースに誤りがあり、それらはすでに修正されて示されている⁽⁷⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。したがって、本解法の計算精度の検証を兼ねて、線形解の係数を表2に示す。なお、これらの係数で、5けたの有効数字を示すが、後述の設計式に用いるときは上位3けたで十分である。

次に、最大合成応力、最大面外変位および最大面内変位に関する大たわみ問題の係数を、各ケースの荷重比について表3にまとめる。表中の k_s の数値から最大応力の線形解に対する低減は、面内応力が加わるため、単純支持されたケースを除いて少ない。したがって、 k_s が1より大になる場合があり、また、数値にばらつきが生じた場合が若干ある。一方、 k_w の線形解に対する低減は、境界条件により値が異なるが、 k_s についての数値に比較し顕著である。これらの結果から、面外変位が板厚程度となる大たわみ変形では、最大応力の設計に弾性解を使用することが許容される根拠となる。しかし、面外変位については非線形効果による線形解に対する低減が大きく、その数値が本解法により明確となった。また、最大面内変位についても板厚に対する最大変形量が明らかとなった。

4. あ と が き

本研究では、内周が固定支持された中空円板について、非線形計画法による大たわみ解析を行い、さらに、既報と本報を合わせた例題に関する設計式を示し、下記の結論を得た。

(1) 内周が固定支持された3ケースについて、変位および応力分布が明らかとなった。これらのケースでは、面外変位、面内変位および面内応力の分布はほぼ類似した形状となったが、曲げ応力の大きさはやや異なった。これらのことはケースC, Dの結果についての傾向と共通した。

(2) 3種類の係数を用いて、大たわみ変形の最大変位と最大合成応力が容易に計算できる設計式が10ケースについて示された。

(3) 最大合成応力の線形解に対する低減係数は、

面内応力が加わるためにさほど低下しなかった。すなわち、板厚程度の面外変位の変形では、微小弾性理論による近似が許容されることが裏付けられた。しかし、面外変位については、非線形効果による線形解に対する低減は顕著であり、その数値が定量的に明らかとなった。また、面内変位についても板厚に対する最大変位が求められた。

本研究で扱った例題では、特定の半径比と厚さ比の場合のみに限定されたが、これらのパラメータを変化させた種々の場合について、変位や応力の結果が得られると、大たわみ問題に対しより実用的な設計資料となると確信する。

また、本研究では中空円板に関し一連の大たわみ問題を取扱ったが、本解法では直交曲線座標が用いられているため、平板からかくの大変形問題への拡張が容易であり、今後は、連成が顕著であるかくの問題に関して研究を推進して行きたい。

終わりにあたり、本研究を遂行するにあたり数々の有益なご助言をいただいた北海道大学工学部、岸田路也教授に感謝する。

なお、数値計算には北海道大学大型計算機センターの HITAC S 810/10 を使用した。

文 献

- (1) Yeh, K. Y., *Acta. Sin.*, 2-2 (1935), 127.
- (2) Hart, V. G. and Evans, D. J., *J. Math. Phys.*, 43-4 (1964), 275.
- (3) Tielking, J. T., *Trans. ASME*, 45-4 (1978), 834.
- (4) Wempner, G. A. and Schmidt, R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 25-4 (1958), 499.
- (5) Reddy, J. N. and Huang, C. L., *Int. J. Solids Struct.*, 17-8 (1981), 811.
- (6) Srinivasan, R. S. and Ramachandra, L. R., *Computers & Structures*, 31-5 (1989), 681.
- (7) 関谷・浜田・角, 平板強度設計便覧, (1982), 41, 79, 朝倉書店.
- (8) Chia, C. T., *Nonlinear Analysis of Plates*, (1980), 129, McGraw-Hill.
- (9) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, (1959), 58, McGraw-Hill.
- (10) 大滝, 機論, 55-511, A (1989), 577.
- (11) 大滝, 機論, 55-519, A (1989), 2370.
- (12) 本論文集 1461 ページ.
- (13) Wahl, A. M., *Trans. ASME*, 52-3 (1930), 29.
- (14) 津村・ほか 21 名, 強度設計データブック (1971), 710, 養華房.
- (15) 平・ほか 12 名, 現代材料力学, (1976), 229, オーム社.