ホログラフィック光弾性における光強度式の シミュレーションによる検討*

大澤 泰明^{*1}, 川島 俊寿^{*2}

Consideration of the Light Intensity Equation in Holographic Photoelasticity by Simulation

Hiroaki OHSAWA and Shunji KAWASHIMA

Light intensity equations for holographic photoelasticity, conventional photoelasticity and other holographic or photoelastic method which correlate experimental fringe patterns with distributions of principal stresses, strains and displacements, are described in unified form. A new method for producing theoretical fringe patterns using a personal computer interfaced to a dot printer is also presented. Comparison of theoretical fringe patterns generated by this method with experimental ones facilitates examination of analytical solutions of elastic problems, and it shows that in holographic photoelasticity, when sensitivity g for $(\sigma_1 + \sigma_2)$ is much greater than sensitivity f for $(\sigma_1 - \sigma_2)$, the light intensity equation should be simply given by $I = (1/2) + (1/2) \cos 2\beta$ to avoid complicated treatment.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Photoelasticity, Holographic Photoelasticity, Light Intensity Equation, Simulation

1. 緒 言

実験的応力・ひずみ解析法として確立されていた光弾性法は、レーザの普及と呼応して興隆したホログラフィと合体してホログラフィック光弾性と称される実験研究の一分野に拡大、発展した。これは実験装置の扱いや撮影法に習熟することが特に必要となる反面、光弾性では得られない主応力等の等高線群(等厚線)が得られるという点で、光弾性より一歩進んだ技法と言える。一方、この方法では視野の光強度分布(しま模様)とそれを表す光強度式との対応について、統一した理論ないし記述法が確立されていないので、しま模様からの情報を正しく把握する上で簡潔な説明がますます大切になる。

本研究ではホログラフィック光弾性^{(1)~(3)}(透明モデルに対する一重露光および二重露光)に加えて、旧来の光弾性、ホログラフィ干渉法⁽⁴⁾、光干渉法⁽⁵⁾および皮膜光弾性を取り上げ、統一表示法による光強度式を誘導する。さらに、しま模様を簡便にシミュレートす

る技法を開発したので、このシミュレーションと実験写真との対比によりホログラフィック光弾性を種々の角度から検討・考察した。

2. 光 強 度 式

これまで導かれている光強度式は結果に至る過程での記述が研究者により異なるため、それらを理解する上で混乱を招く場合がある。正確で容易な理解のためには統一した記述、表現により光強度式を算出することが肝要である。

2・1 光波の複素表示 x 方向に進む平面波に対して、それと直角方向の振動変位 u は次のように表現できる。

$$u = \operatorname{Re}[Ae^{i(kx + \omega\tau)}] = ae^{i(kx + \omega\tau + \theta)} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 Re : 実部、 A : 複素振幅($=ae^{i\theta}$)、 k : 波数($=2\pi/\lambda$, λ : 波長)、 ω : 振動数、 τ : 時間、 a : 実振幅、 θ : 初期位相、 i : 虚数単位である。

光の強度 I は u の二乗の時間平均を考えることにより次式で与えられる。

$$I = \frac{1}{2} u \cdot u^* = \frac{1}{2} |A|^2 \dots\dots\dots (2)$$

ただし、記号* は複素共役を表す。

2・2 位相変化 平面応力状態にある等方性の透

* 平成2年3月10日 東北支部第25期総会講演会において講演、原稿受付 平成元年5月8日。

*1 正員、法政大学工学部(〒184 小金井市梶野町3-7-2)。

*2 学生員、法政大学工学部。

明モデルに入射した光は、主応力 σ_1 , σ_2 方向に分かれそれぞれ q_1 , q_2 の位相変化を生ずる(複屈折), モデルの屈折率および厚み変化を考えると q_1 , q_2 は、次式により与えられる。

$$q_1 = \frac{2\pi}{\lambda} [n_1 t + n(t_0 - t)] \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$q_2 = \frac{2\pi}{\lambda} [n_2 t + n(t_0 - t)] \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 n_1 , n_2 : σ_1 , σ_2 方向の屈折率, n : 空気の屈折率, t_0 , t : モデルの初期, 負荷時の厚さ。

反射鏡では反射前後で π の位相変化, 1/4 波長板 (Q_1 , Q_2) では、入射光線は主軸およびその直角方向に分かれ、相対的に $\pi/2$ の位相変化を生ずる。さらに、1/2 波長板 (P_2) では、光線は 1/4 波長板の場合と同様に二方向に分かれ π の位相変化を生じ、結果的には主軸方向の光波成分だけが通過する。

2・3 光強度式 光源として平面偏光特性を有するレーザを考える。

2・3・1 明視野光弾性(等色線) 図 1 (i) の明視野光弾性では偏光の主軸方向を P_1 とし、この方向の単位ベクトルを i とすると、観察者に届く光の振幅 E および光強度 I は、

$$E = \frac{1}{2} [e^{i(\psi + \pi/2 + q_1)} + e^{i(\psi + \pi/2 + q_2)}] i \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$I = E \cdot E^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(q_1 - q_2) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、Maxwell-Neumann の Stress optic law

$$n_1 - n_0 = A\sigma_1 + B\sigma_2 \quad n_2 - n_0 = B\sigma_1 + A\sigma_2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

および、 t と t_0 の関係[式(8)]を使うと式(6)の I は式(9)となる。

$$t = t_0 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)t_0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 n_0 : 無応力時の屈折率, A , B : 材料の光弾性定数, $\alpha = \pi f t_0 (\sigma_1 - \sigma_2)$, f : 主応力差感度 $[(A - B)/\lambda]$ である。 $P_1 \perp P_2$ の暗視野光弾性では

$$I = \sin^2 \alpha \quad \dots\dots\dots (10)$$

2・3・2 明視野光弾性(等色線と等傾線) 図 1 (i) で Q_1 , Q_2 を取り除けば

$$I = \cos^4 \phi + \sin^4 \phi + 2\cos^2 \phi \sin^2 \phi \cos 2\alpha \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 ϕ は P_2 方向と σ_1 方向のなす角である。 $f=0$ か $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ ならば、 $I=1$ となる。

2・3・3 ホログラフィック光弾性

a. 一重露光⁽¹⁾(等色線) 図 1 (ii) の光学系において露光を一度だけ行って得られる再生像の光強度は

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \quad \dots\dots\dots (12)$$

これは明視野光弾性と同一である。

b. 二重露光(等色線と等厚線) 図 1 (ii) の光学系において、異なる二負荷状態に対して露光時間を等しくして露光を 1 回ずつ行くと、再生像の光強度 I は、

$$I = \frac{1}{4} \{ \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha' + 2\cos \alpha \cos \alpha' \cos(\beta - \beta') \} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 $\alpha' = \pi f t_0 (\sigma'_1 - \sigma'_2)$, $\beta = \pi g t_0 (\sigma_1 + \sigma_2)$, $\beta' = \pi g t_0 (\sigma'_1 + \sigma'_2)$ および g : 主応力差感度 $[(A + B)/\lambda]$ である。ダッシュは 2 回目の負荷状態に対応する。

第一の露光時に無負荷($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$)を考え、ダッシュを省いて書けば、

$$I = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \alpha + 2\cos \alpha \cos \beta) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $f=0$ とみなされる材料では

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \beta \quad \dots\dots\dots (15)$$

$g=0$ とみなされる材料に対して

$$I = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha \right)^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

2・3・4 ホログラフィック干渉法(微小変位の等高線)⁽⁵⁾

散乱物体を微小変形の前後で二重露光すれば、

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos k\Delta \quad \dots\dots\dots (17)$$

Δ は変形前後の対応二点間の位相差で、照明・観測

図 1 明視野光弾性およびホログラフィック光弾性の光学系

方向により異なる。

2・3・5 光干渉法(等色線と等厚線)⁽⁴⁾ Mach-Zehnder 干渉計を利用する光干渉法では

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha \cos \beta \cdots \cdots (18)$$

$f=0$ では式(15), $g=0$ では

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha \cdots \cdots (19)$$

2・3・6 皮膜光弾性(主ひずみ差の等高線) 下地金属弾性域において, 皮膜材の厚さを $t/2$, 主応力差感度を f とすれば

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \cdots \cdots (20)$$

ただし,

$$\alpha = \frac{E\pi}{1+\nu} f t_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

E : 皮膜材のヤング率, ν : 皮膜材のポアソン比。

3. シミュレーション

弾塑性応力・ひずみ解析における理論解や数値解を検討する手法として, 解に基づくしま模様(シミュレーション)と実験によるしま模様の比較が考えられる。この方法は定性的であるが, ほとんど瞬時に解に対する総括的判断が下せる。シミュレーション技法として, Sanford の理論的しま模様を CRT 上に描出させる方法⁽⁶⁾⁽⁷⁾があるが, この方法ではかなり高度なハードウェアの知識が不可欠と思われる。ここでは, パーソナルコンピュータとドットプリンタによって出力用紙上にしま模様を描かせる方法を述べる。

3・1 シミュレーションの方法 シミュレートしようとするモデル内部に $x-y$ 座標系を考え適当な間隔の直交格子を設定する。その格子点の座標値により座標の関数として与えられている解に従って各応力成分値を計算する。計算に必要な諸定数を与えた上で, 各格子点において光強度式に従い先に求めた応力値から光強度を計算する。この時, 光強度は標準化して 0 (暗) から 1 (明) までの値をとるようにする。0 から 1 までの光強度を図 2 に示すようにいくつかの範囲(13 段階)に区分しておき, 各格子点の光強度に従い対応するパターンを印字する。応力集中部を拡大したい場合には格子間隔を細かくすればよいし, モデル外部は明視野なら光強度 1, 暗視野なら 0 とすればよい。

3・2 シミュレーションの例 図 3 にはだ円穴を有する無限平板がだ円の長軸に対して ϕ だけ傾いた方向に一樣な引張力 S を受ける問題⁽⁸⁾に対するシミュレーションを示す。市販の光弾性実験装置(水銀灯 $\lambda = 5461 \text{ \AA}$, $P_1 \perp P_2$) による暗視野光弾性を想定した。同

様のだ円穴を有する帯板の等色線写真との比較では, だ円穴の近傍においてシミュレーションとのよい一致が得られている。

4. 解析解と光強度式の検討

金属薄板の平面ひずみ引張特性⁽⁹⁾は薄板の塑性加工においてしばしば問題となる重要な変形形態の一つである。この特性を得るために帯板に対称な形状の切欠きを導入した試験片の引張りが行われるが, 切欠形状と応力・ひずみ分布および平面ひずみ引張特性の関係について詳細に検討した研究はそれほど多くない。ここでは, このことを踏まえて対称な双曲線形状を有する帯板の引張変形を弾性域で考えることにした。双曲線形状としては切欠部の面積を等しくした三形状を選んだ。

図 2 印字パターンの例と光強度の段階分け

$$b/a=0.60 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right), \phi=45^\circ, \quad \text{25 cm}$$

$$S=0.34 \text{ kgf/mm}^2, f=0.809 \text{ mm/kgf} (\lambda=5461 \text{ \AA}),$$

The number of nodal points = 32041.

図 3 シミュレーション模様の一例

図4 実験写真とシミュレーションの比較
(明視野光弾性, エポキシ
; $f=1.477 \text{ mm/kgf}$)

図5 実験写真とシミュレーションの比較
(二重露光ホログラフィック光弾性, アクリル; $f=0.071, g=1.067 \text{ mm/kgf}$)

試作した実験装置[図1(i)または(ii)]によりレーザ(He-Ne, 平面偏光, $\lambda=6328 \text{ \AA}$)を光源として撮影した明視野光弾性とそれらのシミュレーションを図4に, ホログラフィック光弾性とそれらのシミュレーションを図5に各々対比させて示した。エポキシとアクリルの感度 f, g は四点曲げにより算出した。

4.1 解析解について 光強度式について検討の余地がない場合には, 実験とシミュレーションの比較により解の妥当性を考察することができる。

だ円座標を用いる解析解⁽⁶⁾から得たシミュレーションと実験との対比(図4)を考えると, 実験ではエポキシの縁応力の影響が双曲線境界に認められるものの, 無限板に対して導かれた解はよい精度で応力分布を近似していることがわかる。切欠底最小断面積部では, いずれの形状に対しても, しま次数にしてたかだか0.5次程度の相違しか認められないので, 解は実際の応力分布を非常によく表現できると考えてよい。

4.2 光強度式の検討 アクリルによるホログラフィック光弾性では, f が g に比べて無視できるほど小さいため, 実験写真とシミュレーションは実質的に等厚線のみ出ていると考えられる。図5の1~6は二つの異なる負荷状態, 7~12は無負荷とみなされる状態と負荷状態に対する結果の対比である。これらの場合, いずれもシミュレーションは, 実験の約半分のしま次数しか得られていないことがわかる。それに対して, 次式

$$I = \frac{1}{2} \{1 + \cos 2(\beta - \beta')\} \dots \dots \dots (21)$$

によるシミュレーション(図5, 13~15)は実験と非常によく一致している。シミュレーションで用いた解には問題がないので, これらの不一致の原因は使用した光強度式にある。

光弾性により等色線, f の小さい材料を用いて光干渉法またはホログラフィック光弾性により等厚線を

得、その後これらの情報より σ_1 , σ_2 を分離して求めることが、広く行われるようになると思われる。この際、等厚線に対する光強度式は、式(9)に対応し、主応力差の差について

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\beta \dots\dots\dots (22)$$

と考えるのが妥当であり、式(15)または式(19)は使用すべきでない。このことは、光強度式の α や β に関する周期性を考えれば理解できる。例えば、四点曲げによる f と g の感度検定についてみると、 f と g は光強度式の π 周期を前提として、

$$f, g = \frac{N_{\text{total}}}{(\sigma_1 + \sigma_2)t_0} \dots\dots\dots (23)$$

から求める。ところが式(15)や式(19)は周期 2π なのにもかかわらず、式(23)のまま g を求めたとすると、この g は光強度式と β の関係から本来使用すべき感度の半分の大きさを与えることになる。みかけ上 $2g$ を感度とみなしてもよいが、光強度式は α や β の $\sin$ または $\cos$ の二乗関数(π 周期)として与えた方が自然と思われるので、明視野光弾性に対して式(9) $f=0$ の材料を使用する光干渉法またはホログラフィック光弾性に対して式(21)または式(22)を適用することが推薦できる。なお、同様のことが、 $g=0$ に対する式(16)

においても言えることに注意しなければならない。

5. 結 言

種々の光弾性実験法における光強度式を統一表示法にて記述し、開発したシミュレーションによる解の妥当性の検証例を示した。また、 $f=0$ の材料に対して等厚線を求める実験では光強度式として式(21)を使用することにより煩雑さを回避できることがわかった。終わりに、実験に協力してくれた当時の本学学生石川哲也君(現キャノン)、柿沼朋子君(現日産自動車)に深甚なる謝意を表す。

文 献

- (1) Fourney, M. E., *Exp. Mech.*, 8-1(1968), 33.
- (2) Fourney, M. E. and Mate, K. V., *Exp. Mech.*, 10-5(1970), 177.
- (3) O'Regan, R. and Dudderar, T. D., *Exp. Mech.*, 11-6(1971), 241.
- (4) 斉藤, 第392回機習教, (1974), 43.
- (5) Nishida, M. and Saito, H. *Exp. Mech.*, 4-12(1964), 366.
- (6) Sanford, R. J., *Exp. Mech.*, 11-9(1971), 418.
- (7) Sanford, R. J. and Durelli, A. J., *Exp. Mech.*, 11-4(1971), 161.
- (8) Timoshenko, S. P., *Theory of Elasticity*, (1970), 191, McGraw-Hill.
- (9) 福井・ほか2名, 機論, 51-467, A(1985), 1750.