信頼性に基づくトラス構造の
最適形態に関する考察*室津義定*¹, 邵 曉文*²

OPTIMAL GEOMETRY OF TRUSS STRUCTURES BASED ON THE RELIABILITY CONCEPT*

Yoshisada MUROTSU and Shaowen SHAO

A procedure is proposed for the shape optimization of truss structures based on the reliability concept. Nodal coordinates are taken as the shape design variables together with the sizing design variables such as the cross-sectional areas of the members. These variables are determined by minimizing the structural volume under the constraints on the failure probabilities of a system and failure modes. It is shown from the numerical examples that statically indeterminate trusses yield smaller volumes than statically determinate trusses with the same system reliabilities.

Key Words: Reliability Engineering, Optimum Design, Optimum Configuration, Shape Design Variables, Sizing Design Variables, System Probability, Failure Mode, Multiplier Method.

1. 緒論

構造強度と荷重の統計的変動を考慮した信頼性に基づく最適構造設計に関する研究は既に数多く行われている。そのうちの大部分は与えられた構造形態に対して、構造信頼度を制約条件として、構造費用或は構造重量を最小にする設計問題である¹⁾。設計変数としては各構造要素の寸法諸元、例えば断面積などがよくとられる。しかし、構造の幾何学的形態や部材の配置が最小構造費用(重量)に大きな影響を与えるので、上に述べた信頼性に基づく最適構造設計問題に構造形態をも設計変数として加えることが必要であると考えられる。この種の設計では信頼性の解析や最適解の探索法に相当困難な点があり、これに関していくつかの研究がなされている^{2,3)}。その一つはトラス構造に対して、節点座標とそれらを結合する候補部材が与えられると仮定し、最適化過程において、不要な部材を逐次

除去して、最適な部材配置を求める方法である⁴⁾。本研究では、トラス構造の節点座標を形態の設計変数として扱い、トラスの初期形態から出発して、節点を動かしながら、構造システムに対する信頼性の制約のもとで、構造重量を最小にするように部材断面積の最適化とともに構造形態の最適化を行う方法を提案する。

2. 構造の信頼性解析

2.1 構造破損モードの生起確率 構造の形式と作用する荷重の条件によって、存在する構造破損モードが異なるが、一般的には破損モード*i*の安全余裕を次のように表示することができる。

$$Z_i = \begin{cases} S_i - T_i^- & (S_i < 0) \\ T_i^+ - S_i & (S_i \geq 0) \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 T_i^+ , T_i^- はそれぞれ破損モード*i*の正負側の強さで、 S_i は荷重作用である。トラス構造の各部材の引張り強度と圧縮強度を R_{tj} , R_{cj} ($j=1, 2, \dots, n$)、構造に作用する荷重を L_i ($j=1, 2, \dots, l$)とすると、 T_i^+ , T_i^- , S_i は次式によって与えられる。

$$T_i^+ = \sum_{j=1}^n a_{tj}^+ \cdot R_{tj} + a_{oj}^+ \cdot R_{oj},$$

* 平成2年3月13日 九州支部第43期総会講演会において講演、原稿受付 平成元年6月8日。

*¹ 正員、大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町4-804)。

*² 正員、大阪府立大学大学院。

$$T_i^+ = \sum_{j=1}^n a_{t i j} \cdot R_{t j} + a_{c i j} \cdot R_{c j} \quad (2)$$

$$S_i = \sum_{j=1}^n b_{i j} \cdot L_j$$

ここに、 $a_{t i j}, \dots, b_{i j}$ は構造形態および荷重条件によって定まる係数であり、構造解析によって決定される。強度 $R_{t j}, R_{c j}$ と荷重 L_j が確率変数であるため、 T_i^+, T_i^-, S_i も確率変数となる。図1はそれらの間の関係を示している。 f, F はそれぞれの確率密度関数と確率分布関数である。従って、破損モード i が生起する($Z_i \leq 0$)確率 $P_{r i}$ は荷重 S_i の正負により、二つの部分の計算から得られる。

$$P_{r i} = P_{r i}^- + P_{r i}^+$$

$$P_{r i}^- = \int_{-\infty}^0 [1 - F_{T_i}^-(s)] \cdot f_{S_i}(s) ds$$

$$P_{r i}^+ = \int_0^{\infty} F_{T_i}^+(s) \cdot f_{S_i}(s) ds \quad (3)$$

従来の構造形態が与えられた設計問題では、荷重 S_i をいつも正側あるいは負側だけに分布しているものとみなして、破損確率 $P_{r i}$ の計算において、式(3)の $P_{r i}^+$ 或は $P_{r i}^-$ のいずれか一つだけを考慮してきた。これは強度 T_i^+, T_i^- と荷重 S_i の分布中心が0点から遠く離れている場合には良い近似結果を与える。しかし、例えば図1に示すように S_i が0点付近を中心に分布する場合では、正負両側の破損確率を共に考慮に入れる必要がある。特に構造形態をも設計変数とした最適設計問題においては、構造形態の変化によって、破損モード i の強度 T_i^+, T_i^- と荷重 S_i を決める式(2)の中の係数 $a_{t i j}, \dots, b_{i j}$ が変わるので、あらゆる T_i^+, T_i^-, S_i の分布に適応するため、式(3)に示すように、正負側の破損確率を共に計算する必要がある。

2. 2 構造システムの破損確率 m 個の破損モードを含む構造システムを考える。破損モード i が生起する事象を F_i とする。構造破損は m 個の破損モードのうちいずれか一つが生起すれば発生する。従って、構造システムの破損確率 P_r は次式によって与えられる。

図1. 破損モードの生起確率計算.

$$P_r = P \left[\bigcup_{i=1}^m F_i \right] \quad (4)$$

破損モード i の生起事象 F_i は荷重 S_i の符号によってさらに二つの事象 F_i^-, F_i^+ に分けられる。

$$F_i = \begin{cases} F_i^+ : (T_i^+ \leq S_i, S_i \geq 0) \\ F_i^- : (T_i^- \geq S_i, S_i < 0) \end{cases}$$

従って、構造破損事象は $2m$ 個の事象の和事象になり、その生起確率は次式で与えられる。

$$P_r = P \left[\bigcup_{i=1}^m (F_i^- \cup F_i^+) \right] = P \left[\bigcup_{j=1}^{2m} G_j \right] \quad (5)$$

ここで、 $G_i = F_i^+, G_{i+m} = F_i^-$ ($i=1, 2, \dots, m$)である。

式(5)を正確に評価するためには、 $2m$ 次元までの同時確率を計算する必要があるが、これは一般に困難である。本研究では次に示すような2次元までの結合確率を用いたディトレブセンの上下限値¹⁾で P_r を近似的に評価する。

$$P_{rL} \leq P \left[\bigcup_{j=1}^{2m} G_j \right] \leq P_{rU} \quad (6)$$

$$P_{rU} = P[G_1] + \sum_{k=2}^{2m} \min_{1 \leq r \leq k-1} P[\bar{G}_r \cap G_k] \quad (7)$$

$$P_{rL} = P[G_1] + \sum_{k=2}^{2m} \max \left\{ 0, P[G_k] - \sum_{r=1}^{k-1} P[G_r \cap G_k] \right\} \quad (8)$$

3. 問題の設定とその解法

n 個の部材と l 個の可変節点座標を持つトラス構造を考える。設計変数は部材断面積 $A=(A_1, A_2, \dots, A_n)$ と節点座標 $X=(X_1, X_2, \dots, X_l)$ とする。構造の破損モードは m 個あると仮定する。指定された荷重条件のもとで、構造信頼性に対する要求を満たしながら構造重量を最小にするように、構造形態および部材断面積の設計を行う。ここで、使用材料はすべて均質的なものとする。最適設計問題の目的関数として、構造に使われる材料の総体積 H_e をとる。信頼性条件として、まず最初に構造システムの破損確率 P_r がある指定された値 P_{r0} になるという制約を考える。従って、最適信頼性設計問題を次のように定式化する。

問題1 (原問題) :

Find X and A
such that

$$H_e(X, A) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot Z_i(X) \rightarrow \text{minimum} \quad (9)$$

subject to

$$P_r(X, A) - P_{r0} = 0 \quad (10)$$

$$g_i(X) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, l) \quad (11)$$

$$A_{iL} \leq A_i \leq A_{iU} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

ここで、 $l_i(X)$ は部材 i の長さである。式(11)は節点座標の間の幾何条件を、式(12)は部材断面積に対する側面制約を表している。

問題1を直接に解く場合、最適化過程において、すべての試行点で構造破損確率 P_f を計算する必要があるため、多大の計算時間を要し、現実的ではない¹⁾。そこで、計算効率を向上させるため、原問題に対して、次のようなより単純な副問題を考える。

問題2 (副問題) :

Find X and A
such that

$$H_c(X, A) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot l_i(X) \rightarrow \text{minimum} \quad (13)$$

subject to

$$P_{fi}(X, A) \leq P_{fai} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (14)$$

$$g_i(X) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, l') \quad (15)$$

$$A_{iL} \leq A_i \leq A_{iU} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

副問題の中では、信頼性に対する制約として、原問題の式(10)の構造破損確率 P_f に対する制約の替わりに、各破損モードの生起確率 P_{fi} ($i=1, 2, \dots, m$)が指定された許容値以下になるという制約(式(14))をつけている。破損モード i の安全余裕(式(1))および関連する確率変数の分布が与えられる場合、その生起確率 P_{fi} が式(3)で求められる。問題1に比べて、問題2の方が簡単に解ける。ところが、副問題としての問題2から得られた最適解が原問題の最適解となるように式(14)の中の各破損モードの生起確率の許容値 P_{fai} ($i=1, 2, \dots, m$)をどう決めるかが重要な問題である。以下では、原問題に対する近似解を副問題を逐次解くことによって得る方法を考える。原問題の最適解は $P_f - P_{f0} = 0$ を満足するから、副問題の各 P_{fai} に対して得られた最適設計の構造破損確率 P_f も P_{f0} に等しくならなければならない。ここで、各破損モードの許容生起確率 P_{fai} をすべて均等に設定する、すなわち $P_{fai1} = P_{fai2} = \dots = P_{fain} = P$ 。このとき、ある P に対して副問題を解いて得た最適設計の構造破損確率 P_f は一般的に P の単調増大関数となる。そこで、一次補間法と区間二分法を用いて副問題の求解と構造破損確率の計算を繰り返しながら $P_f - P_{f0} = 0$ を満足するように P を決定する。ここで、 P_f は式(6)~(8)の上下限值によって評価され、正確な値がわからないため、 P_f の替わりに上限値 P_{fU} を用いて、 $P_{fU} - P_{f0} = 0$ になるように各破損モードの生起確率の許容値 P を決める。 P を決める具体的な手順は次の通りである。

- Step 1: 図2に示されているように、まず $F = P_{fU} - P_{f0} = 0$ の P を含む区間 $[P_0, P_1]$ を見つける ($F_0 \cdot F_1 < 0$)。
Step 2: 2点 (P_0, F_0) , (P_1, F_1) を結ぶ直線と P 軸の交点

$P^* = P_0 - F_0 \cdot (P_0 - P_1) / (F_0 - F_1)$ (一次補間法)、あるいは区間 $[P_0, P_1]$ を2等分する点 $P^{**} = (P_0 + P_1) / 2$ (二分法)を P の近似点 P' とする。

Step 3: $P_{fai1} = P_{fai2} = \dots = P_{fain} = P'$ のもとで副問題の問題2を解く。得られた最適設計に対して構造破損確率の評価を行う。 $F' = P_{fU} - P_{f0}$ とおく。

Step 4: $|F'| / P_{f0} \leq \varepsilon$ (ε :精度を表す定数)ならば、 $P = P'$ において、探索を終了させる。Step 3で求められた副問題の最適解を原問題の最適解として認める。

$|F'| / P_{f0} > \varepsilon$ ならば、Step 5に行く。

Step 5: 区間 $[P_0, P_1]$ の更新を行う。 $F' \cdot F_0 > 0$ の場合、 $P_0 = P'$, $F_0 = F'$ とおき、 $F' \cdot F_0 < 0$ の場合 $P_1 = P'$, $F_1 = F'$ において、Step 2に行く。

Step 3で副問題の問題2を解く手法として、非線形計画法の一つである乗数法を用いる。式(14)から(16)までの不等式制約をまとめて、次式のように書く。

$$h_i(X, A) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

$$(N = m + l' + 2n)$$

もとの不等式制約付き最小化問題は次の拡張ラグランジュ関数によって、制約無し最小化問題に変換できる⁵⁾。

$$L_t(X, A, \lambda) = H_c(X, A) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2t_i} [\max\{0, \lambda_i + t_i \cdot h_i(X, A)\}]^2 - (\lambda_i)^2 \quad (18)$$

ここで、 t_i, λ_i はそれぞれ $h_i(X, A) \leq 0$ に対応するペナルティ・パラメータとKuhn-Tucker乗数である。最適解の探索を行うとき、最初に t_i, λ_i に適当な値を与えて $L_t(X, A, \lambda)$ を最小化する。そして t_i, λ_i を繰り返し更新しながら、問題の最適解を見いだす。

構造形態と要素の寸法諸元を同時に設計する場合、

図2. 破損モードの生起確率の許容値 P の決定。
(一次補間法と二分法)

それぞれ基本的に異なる性質を持つ二種の設計変数を同一の設計空間で扱うことになる。式(13)の目的関数 $H_0(X, A)$ を最小にするように節点座標 X と部材断面積 A を同時に最適化するとき、各々の大きさあるいは勾配の大きさが相当違う場合には収束性が悪くなる。この問題を解決するには、各設計変数に対するスケールリングが一つの重要な手段と考えられる。このようなスケールリングは設計の初期段階だけでなく、最適解探索の全過程にわたって設計変数の変化により繰り返して行われる必要がある。そのほか、節点座標に対する最適化と断面積に対する最適化を二つのレベルに分けて行うことによって、各レベルで考える設計変数の数を減らすことができ、断面と座標の変数を同一空間で組み合わせたことによって生ずる問題をなくすという二段階法がある⁶⁾。しかし、この場合には計算時間が相当長くなるので、最適化過程において、合理的な近似法が必要となる⁷⁾。

4. 数値計算例

4.1 設計例1 図3のような2部材トラス構造を考える。節点3に荷重 L_1 と L_2 が作用している。節点1と2が横方向に移動でき、 X_1 と X_2 が形態変数として扱われる。静定トラスであるため、部材の破損が構造破損モードとなるので、部材1, 2が破損する二つの破損モードを考える。構造システムの許容破損確率を $P_{fa} = 2.0 \times 10^{-4}$ とし、荷重と強度のデータを表1のように与える。

図3. 2部材静定トラス。

まず、荷重と強度が表1の平均値に等しい場合の確定設計を行う。その最適解が表2と図4に示されている。

この時、部材2が二つの荷重の合力の方向に配置し、部材1の断面積 A_1 が0に近く、全ての荷重が部材2によって支えられている。

次に信頼性に対する制約のもとで図3のトラス構造について最適化を行い、その結果を表2に示す。構造

表1. 計算データ

$\bar{\sigma}_y$ (kN/cm ²)	$CV\sigma_y$	$\bar{E}$ (kN/cm ²)	$CV E$	$\bar{L}_1$ (kN)	$\bar{L}_2$ (kN)	$CV L_1$	$CV L_2$
18	0.05	7103	0.05	50	259.8	0.2	0.2

図4. 2部材静定トラスの最適形態（確定設計）。

図5. 3部材不静定トラス。

システムの許容破損確率 P_{fa} は 2.0×10^{-4} で、荷重 L_1 と L_2 の相関係数 ρ_{L_1, L_2} が $-1.0, 0.0, 1.0$ である時、各々の最適形態と断面積および最小体積、部材力と破損確率が示されている。特に $\rho_{L_1, L_2} = 1.0$ の時、構造の最適形態がちょうど確定設計の場合と同じになっていること

が分かる。すなわちほとんどの荷重が部材2だけで支えられる。その理由は、この場合、表1に示されたように荷重の変動係数が等しいので ($CV_{L_1} = CV_{L_2}$)、相関係数が1の時には L_1 と L_2 の合力方向が常に一定になってしまうからである。勿論この場合、合力の大きさは依然とし

表2. 最適解 (2部材トラス, $P_{fa} = 2.0 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 0.001$)

ρ_{L_1, L_2}	Nodal Coordinate X_1 (cm) X_2 (cm)	Member i	Cross-sectional Area A_i (cm ²)	Load μ_{s_i} (kN) σ_{s_i}	Failure Prob. $P_{f_i}^-$ $P_{f_i}^+$	System Failure Prob. $P_{f_L} \sim P_{f_U}$	Volume H_0 (cm ³)	Shape
-1.0	48.556	1	9.3132	10.053	1.2078×10^{-5}	2.0000×10^{-4}	4317.7	
	31.828	2	18.582	41.238 255.81 13.009	9.0286×10^{-5} 0 1.0236×10^{-4}	$\sim 2.0000 \times 10^{-4}$		
0.0**	80.866	1	4.9950	4.4317	1.6409×10^{-5}	1.9999×10^{-4}	4534.5	
	30.541	2	24.062	22.267 261.15 40.869	8.4011×10^{-5} 0 1.0042×10^{-4}	$\sim 1.9999 \times 10^{-4}$		
1.0	21.048	1	2.0463×10^{-3}	2.0354×10^{-2}	0	1.9968×10^{-4}	4062.9	
	28.872	2	26.596	4.0708×10^{-3} 264.55 52.910	1.1293×10^{-4} 0 1.1300×10^{-4}	$\sim 1.9968 \times 10^{-4}$		
Det. Design	21.028 28.868	1 2	1.3463×10^{-6} 14.698				2245.2	

*allowable value; **CPU time: 109.8s, by NEWS-1750.

表3. 最適解 (3部材トラス, $P_{fa} = 2.0 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 0.001$)

ρ_{L_1, L_2}	Nodal Coordinate X_i (cm) ($i=1, 2, 3$)	Member i	Cross-sectional Area A_i (cm ²)	Mode i	Failure Prob. $P_{f_i}^-$ $P_{f_i}^+$	System Failure Prob. $P_{f_L} \sim P_{f_U}$	Volume H_0 (cm ³)	Shape
-1.0	46.271	1	8.1971	1	1.1786×10^{-8}	1.9999×10^{-4}	4180.4	
	14.677	2	10.566	2	6.9509×10^{-5}	$\sim 2.0000 \times 10^{-4}$		
	41.568	3	8.3596	3	6.9521×10^{-5} 1.2771×10^{-12} 0 6.9520×10^{-5}			
0.0**	108.52	1	2.1809	1	4.6374×10^{-11}	2.0001×10^{-4}	4343.8	
	4.2711×10^{-1}	2	12.127	2	6.8077×10^{-5}	$\sim 2.0001 \times 10^{-4}$		
	42.897	3	13.595	3	6.8078×10^{-5} 0 0 6.8078×10^{-5}			
1.0	19.754	1	2.4628×10^{-3}	1	0	1.9986×10^{-4}	3955.4	
	28.835	2	11.631	2	1.3924×10^{-4}	$\sim 1.9988 \times 10^{-4}$		
	28.903	3	14.260	3	1.5497×10^{-8} 0 0 1.3924×10^{-4}			
Det. Design	16.499 28.721 28.906	1 2 3	7.3237×10^{-6} 2.9536 11.745				2245.2	

*allowable value; **CPU time: 757.3s, by NEWS-1750.

て統計的な変動を持つが、構造の最適形態には影響を及ぼさない。

次に、図3と同じ荷重条件で、部材がもう一本加わって不静定構造となった図5のような構造を考える。設計変数は節点座標 X_1, X_2, X_3 と断面積 A_1, A_2, A_3 である。構造の破損モードとして、1)部材1,2が共に引っ張り、あるいは圧縮で破損、2)部材1が引っ張り、部材3が圧縮で破損、あるいは部材1が圧縮、部材3が引っ張りで破損、3)部材2,3が共に引っ張りあるいは圧縮で破損、の三つの破損モードが考えられる。三種の荷重相関係数に対する最適解および確定設計の最適解が表3に示されている。確定設計と $\rho_{L1,12}=1.0$ の場合の最適形態としては部材2,3が殆ど重なって、荷重の合力方向に配置し、部材1の断面積 A_1 が0に近くなっている、これは2部材静定トラス構造の場合に一致している。

表2と表3に示されている構造は同じ構造信頼性制約($P_{f0}=2.0 \times 10^{-4}$)の基で設計されたのが、それらの構造総体積 H_c を比較すれば、表3の3部材不静定トラス構造が表2の2部材静定トラスより軽いことがわかる。この理由は付録で考察する。

4. 2 設計例2 図6に示すような6部材不静定トラス構造を考える。構造の高さと部材3の長さが与えられたものとし、構造形態変数としては節点の横方向の位置を決める X_1, X_2 がとられる。これは一次不静定トラス構造であるため、6部材の中で2部材が同時

破損するような構造破損モードが15個存在する。これとの対照として、同じ荷重条件を受け、図6の6部材トラス構造からそれぞれ一部材ずつ抜いた後の6種の5部材静定トラスをも同時に考えてみることにする。表4の計算データに基づいて求めた最適構造形態と最小構造体積を表5に示す。ここで、構造システムの許容破損確率は $P_{f0}=5.0 \times 10^{-4}$ と設定されている。設計例1と同じように、表5からも同じシステム破損確率を

表4. 計算データ2

$\bar{\sigma}_y$ (kN/cm ²)	$CV\sigma_y$	$\bar{L}_1$ (kN)	$\bar{L}_2$ (kN)	$\bar{L}_3$ (kN)	$\bar{L}_4$ (kN)	$\bar{L}_5$ (kN)	CVL_j (j=1,...,5)
27.6	0.05	50	30	20	30	20	0.1

図6. 6部材不静定トラス。

表5. 最適解 (6部材トラス, $P_{f0}=5.0 \times 10^{-4}$, $\epsilon=0.001$)

Mode Failure Prob. P_{fai}^*	System Failure Prob. $P_{fL} \sim P_{fU}$	Cross-sectional Area(cm ²)			H_c (cm ³)	X_1 (cm) X_2 (cm)	Shape
		A_1 A_4	A_2 A_5	A_3 A_6			
1.0116×10^{-4}	4.9876×10^{-4} $\sim 5.0025 \times 10^{-4}$	5.2988	1.7259 0.3984	2.2390 5.5970	1699.1	-25.809 -16.836	
1.1351×10^{-4}	4.7444×10^{-4} $\sim 5.0034 \times 10^{-4}$	3.8429 3.1737	1.0186 2.9961	2.1223	1421.0	-72.744 24.667	
1.0189×10^{-4}	4.9712×10^{-4} $\sim 5.0000 \times 10^{-4}$	3.5074 2.2510	0.9469 3.3107	1.3305	1402.3	-0.2139 -0.2607	
1.0155×10^{-4}	4.9639×10^{-4} $\sim 5.0001 \times 10^{-4}$	6.6471	3.8744 7.5958	2.6807 2.3952	2637.1	-18.253 -14.418	
1.0725×10^{-4}	4.8225×10^{-4} $\sim 5.0034 \times 10^{-4}$	2.6416 3.4591	2.1770	1.6140 1.9394	1246.5	-84.759 53.410	
1.0095×10^{-4}	4.9779×10^{-4} $\sim 4.9974 \times 10^{-4}$	4.3046 1.5893	1.3497 4.1495	0.9954	1586.5	6.3127 4.6887	
$6.8012 \times 10^{-5}^{**}$	3.0492×10^{-4} $\sim 4.9998 \times 10^{-4}$	3.4178 2.6284	0.4013 2.3214	0.7374 1.6042	1231.4	-59.392 23.569	

*allowable value;

**CPU time: 2290.4s, by NEWS-1750.

表 6. 最適解 (6 部材トラス, $P_{fa}^* = 5.0 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 0.001$, $\bar{L}_2 = \bar{L}_4 = -30 \text{ kN}$)

Mode Failure Prob. P_{fa}^*	System Failure Prob. $P_{FL} \sim P_{FU}$	Cross-sectional Area(cm^2)			$H_c(\text{cm}^3)$	$X_1(\text{cm})$ $X_2(\text{cm})$	Shape
		A_1 A_4	A_2 A_5	A_3 A_6			
1.0053×10^{-4}	4.9896×10^{-4} $\sim 5.0019 \times 10^{-4}$	1.7085	1.4761 1.0146	2.5496 4.8540	1558.3	23.585 -53.617
1.0346×10^{-4}	4.9866×10^{-4} $\sim 5.0009 \times 10^{-4}$	1.0681 1.4556	1.6848	3.0967 5.1318	2077.1	100.07 -87.775
1.0082×10^{-4}	4.9937×10^{-4} $\sim 5.0002 \times 10^{-4}$	2.3330 1.6593	2.8912 1.4417	0.8378	1194.0	69.111 -37.878
1.0912×10^{-4}	4.7742×10^{-4} $\sim 4.9965 \times 10^{-4}$	1.6367	2.7632 1.5374	1.9366 3.1216	1357.5	32.810 -68.893
1.0216×10^{-4}	4.9776×10^{-4} $\sim 5.0022 \times 10^{-4}$	1.0658 0.5880	1.7636	2.0847 3.3063	1282.3	43.668 9.8484
1.0170×10^{-4}	4.9977×10^{-4} $\sim 5.0021 \times 10^{-4}$	2.5805 1.9206	3.1572 1.5657	0.4156	1115.6	69.202 -61.367
8.8992×10^{-5}	4.9658×10^{-4} $\sim 4.9967 \times 10^{-4}$	2.3563 1.8345	2.9614 1.4049	0.2278 0.3193	1101.1	70.350 -55.048

*: allowable value

有する構造の中で, 不静定トラスの方が静定トラスより軽く設計できることがわかった。

ここで, 荷重条件が構造形態に及ぼす影響を調べるため, 荷重 L_2, L_4 の方向を逆にして, 構造の最適形態を求めてみた。その結果は表 6 に示されている。表 5 と表 6 の構造形態を比較すればわかるように, 構造全体の傾きが大体荷重の合力方向に一致している。

4. 3 設計例 3 図 7 の 9 部材静定トラス構造の例を示す。ここで, 部材 2, 6 の長さは確定値とするが, その他の構造形態に関する量はすべて設計値として扱う。従って, 図 7 に示すように形状変数 5 つとそのほか断面積変数 9 つが考えられている。

図 7. 9 部材静定トラス。

(a) Optimal geometry without buckling failure

(b) Optimal geometry with buckling failure

図 8. 9 部材静定トラスの最適形態。

この設計では、材料の降伏応力 σ_{yi} のほかに、圧縮を受ける部材に対して座屈応力 σ_{cri} も考慮している。それは次式によって与えられる。

$$\sigma_{cri} = [(\pi/20)^{1/2} \cdot (E_i/I_i)] \cdot A_i^{1/2} \quad (19)$$

得られた最適形態を図8に示す。図8(a)は座屈応力を考慮してない結果で、図8(b)は座屈応力を考慮した結果である。図8(b)の方が座屈に強くなるように構造全体の高さが低くなっている。

5. 結論

トラス構造の節点座標を形態の設計変数として、構造破壊確率の制約のもとで、最小構造体積を実現する最適形態と部材断面積を決定する問題に関して、構造形態の変化による種々の荷重と強度の分布に適した構造破壊モードの生起確率の計算方法および構造システム破壊確率の評価と問題の最適化手順を示した。それらを用いて、幾つかの具体的な計算例で信頼性に基づくトラス構造の最適形態設計の有効性と設計における荷重の相関、静定と不静定トラス構造の性質および座屈強度の影響について考察した。

付録

図A. 単一構造と分割構造。

図Aに示す二つの構造を考える。それぞれの安全余裕は次のように書ける。

$$\begin{aligned} Z_a &= R - S \\ Z_b &= R_1 + R_2 - S \end{aligned} \quad (A.1)$$

ここで、 R , R_1 , R_2 は各部材の強度で、 S は荷重用である。安全余裕の平均値および標準偏差は次のよう計算される。

$$\begin{aligned} \mu_{Z_a} &= \mu_R - \mu_S \\ \mu_{Z_b} &= \mu_{R_1} + \mu_{R_2} - \mu_S \\ \sigma_{Z_a} &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \\ \sigma_{Z_b} &= \sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2 + 2\rho \cdot \sigma_{R_1} \sigma_{R_2} + \sigma_S^2} \end{aligned} \quad (A.2)$$

ここで、 $\mu(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, ρ は $(\cdot)$ の平均値と標準偏差および R_1 と R_2 の相関係数を表す。荷重と強度は無相関と考える。なお、各部材の強度について、次のような確率特性を仮定する。

$$\begin{aligned} \mu_R &= \mu_{R_1} + \mu_{R_2} \\ \frac{\sigma_R}{\mu_R} &= \frac{\sigma_{R_1}}{\mu_{R_1}} = \frac{\sigma_{R_2}}{\mu_{R_2}} = CV_R \end{aligned} \quad (A.3)$$

このとき、二つの構造の信頼性指標は次のようになる。

$$\begin{aligned} \beta_a &= \mu_{Z_a} / \sigma_{Z_a} \\ &= \frac{(\mu_R / \mu_S) - 1}{\sqrt{(\mu_R / \mu_S)^2 \cdot (CV_R)^2 + (CV_S)^2}} \\ \beta_b &= \mu_{Z_b} / \sigma_{Z_b} \\ &= \frac{(\mu_R / \mu_S) - 1}{\sqrt{(\mu_R / \mu_S)^2 \cdot (CV_R)^2 + 2(\rho - 1) \cdot (\mu_{R_1} / \mu_S) \cdot (\mu_{R_2} / \mu_S) \cdot (CV_R)^2 + (CV_S)^2}} \end{aligned} \quad (A.4)$$

ここで、 CV_R , CV_S は強度と荷重の変動係数である。上式において、 $-1 \leq \rho \leq 1$ であるから、次の関係が得られる。

$$\beta_b \geq \beta_a \quad (A.5)$$

従って、平均強度と強度の変動係数が等しい二つの構造では、図A(a)の単一構造より図A(b)の分割構造の方が信頼性が高い。言い換えれば、同じ信頼性条件のもとでは分割構造の方が軽く設計できる。なお、分割の数が多ければ多いほど信頼性が高くなることも証明できる。

参考文献

- [1] P. Thoft-Christensen and Y. Murotsu, 'Application of Structural Systems Reliability Theory', Springer Verlag (1986).
- [2] N. Shiraishi and H. Furuta, 'On Geometry of Truss,' Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, XLI, 4 (1979), pp. 498-517.
- [3] P. Thoft-Christensen, 'Application of Optimization Methods in Structural Systems Reliability Theory,' Structural Reliability Theory Paper, 53, Institute of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University (1987).
- [4] Y. Murotsu, M. Kishi and M. Yonezawa, 'On the Shape Optimization of Truss Structures Based on Reliability Concept,' Proceedings of IUTAM Symposium on Structural Optimization, Melbourne, Australia, February 9-13, 1988.
- [5] 今野浩, 山下浩, 非線形計画法, 日科技連出版, (1978).
- [6] G. N. Vanderplaats and F. Moses, 'Automated Design of Trusses for Optimum Geometry,' J. Struct. Div., ASCE, 98, ST3 (1972), pp. 671-690.
- [7] Y. Murotsu, S. Shao, M. Miki and H. Okada, 'On a Reliability-based Shape Optimization of Truss Structures,' in: P. Thoft-Christensen (ed.), Reliability and Optimization of Structural Systems 2, Springer Verlag (1989), pp. 201-212.