表面より非対称部分加熱を受ける厚板の 非定常熱応力とその連成効果*

辻 正利^{*1}, 谷川 義信^{*2}, 奥村 都誉司^{*3}

Transient Thermal-Stress Analysis of an Infinite Slab due to Nonsymmetric Local Heating from Its Surfaces and an Examination of Its Thermomechanical Coupling Effect

Masatoshi TSUJI, Yoshinobu TANIGAWA and Toyosi OKUMURA

A three-dimensional coupled thermal stress analysis for an infinite elastic slab is developed in this paper, and an analytical solution is given under the thermal condition such that the nonsymmetrically distributed local heats are supplied from both surfaces of the slab. In the analytical process, we divided the problem into two parts, one of which corresponds to the case of symmetrical surface heat supply and the other, the case of an antisymmetric supply. Then, we analyzed these cases individually and obtained the required solutions. As an illustration, numerical calculations are carried out for the case of local heating from one surface of the slab. The temperature distributions and the associated thermal stress distributions are represented in figures, and the influence of the thermomechanical coupling effect on these numerical data is examined briefly.

Key Words: Elasticity, Three-dimensional Problem, Coupled Thermal Stress, Nonsymmetric Problem, Local Heating, Slab

1. 緒 言

機械・構造物の構成要素の一つとして、板材が挙げられ、その上下両表面から不均一な加熱の影響を受ける場合の力学的挙動の解明は、板材の熱応力問題における最も一般的な問題設定であると考えられる。また、熱応力発生メカニズムから考えて不均一な加熱条件のうち、局所的な部分加熱を受ける場合の熱応力問題は重要な課題の一つであると言える。このような加熱条件に対する工業上の実際問題としては、高温ガスによる点溶接あるいは機械切削加工などが挙げられ、機械・構造物の強度設計におけるデータとして重要であると考えられる。以上の観点より、局部加熱を受ける板材の非定常熱応力問題は、非連成準静的な取扱ひのもとで、すでに数多く報告されている⁽¹⁾。また、著者らも局部加熱を受ける厚板の準静的非定常熱応力問題として、二次元問題⁽²⁾および対称加熱を受ける三次元問題⁽³⁾について、連成効果を考慮した連成熱応力問題として解析し、すでに報告した。

本研究は、上述のような著者らの厚板に対する連成熱応力問題の発展的課題として、厚板の上下両表面から非対称な不均一加熱を受ける場合に対する三次元非定常熱応力問題を扱ったものであり、その連成効果をも考慮したものである。本研究で用いた解析的方法の特徴は、厚板の上下両表面から与えられる非対称な加熱条件を、対称加熱部分と反対称加熱部分とに分離し、これら二つの加熱状態に対する解析解を別個に求めた後、これらを重ね合わせるにより、非対称加熱による解を導いたことである。数値計算例として、厚板の片側表面から局部加熱を受ける場合に対して、温度、変位および応力成分の時間的変化を求め、かつそれらに与える連成効果の影響を定量的に検討した。なお、解析においては、ラプラス変換と二重フーリエ変換法を適用した。

図 1 座標系と加熱条件

* 平成 2 年 3 月 14 日 東海支部第 39 期総会講演会において講演、原稿受付 平成元年 4 月 25 日。

^{*1} 正員、鈴鹿工業高等専門学校 (〒510-02 鈴鹿市白子町)。

^{*2} 正員、大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町 4-804)。

^{*3} 北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8)。

2. 解 析

2・1 問題の設定と基礎式および境界条件 図1に示すように、 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ で表される加熱媒体の温度関数により、上下両表面から非対称な部分加熱を受ける厚板(厚さ $2b$)の非定常熱応力問題を考える。ここで、問題の簡単化のため温度関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ は、 x 軸および y 軸に関し対称であると仮定する。このとき、温度場および変位場は三次元状態であり、著者らの前論文⁽³⁾を参照すれば、連成項を考慮した温度場および変位場に対する基礎方程式系は、次式のように無次元表示される。

$$\Delta \bar{\phi} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Delta \bar{T} = (1+\delta) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \tau} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{U}_x &= (1+\nu) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\bar{T} - \frac{\bar{\phi}}{1-2\nu} \right] \\ \Delta \bar{U}_y &= (1+\nu) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[\bar{T} - \frac{\bar{\phi}}{1-2\nu} \right] \\ \Delta \bar{U}_z &= (1+\nu) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\bar{T} - \frac{\bar{\phi}}{1-2\nu} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\bar{\phi}$ は温度場と変位場を分離するために導入された調和関数、 Δ はラプラス演算子、 δ は連成係数であり、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \\ \delta &= \frac{1+\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{T^0 \alpha^2 E}{c_v \rho} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

なお、式(1)～(4)で採用した無次元量は

$$\left. \begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= (x, y, z)/b, \tau = xt/b^2, \bar{T} = T/T_0 \\ (\bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z) &= (U_x, U_y, U_z)(1-\nu)/(\alpha T_0 b) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (5)$$

である。ただし、 t : 時間、 T : 温度変化、 T_0 : ある基準一定温度、 T^0 : 基準絶対温度、 U_x, U_y, U_z はそれぞれ x, y, z 方向の変位成分、 $\chi, C_v, \rho, \nu, \alpha$ および E はそれぞれ厚板の温度伝導率、定容比熱、密度、ポアソン比、線膨張係数および縦弾性係数である。

一方、厚板の上と下の表面($z=b$ と $z=-b$)が異なる温度関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ 、等しい相対熱伝達率 h の媒体によって加熱されるとし、厚板の初期温度を一樣に基準温度零度とすれば、熱的境界条件および初期条件は次式のように無次元表示される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}=1; \partial \bar{T} / \partial \bar{z} + \bar{h} \bar{T} &= \bar{h} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{z}=-1; -\partial \bar{T} / \partial \bar{z} + \bar{h} \bar{T} &= \bar{h} \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (6)$$

$$\tau=0; \bar{T}=0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

なお、式(6)で採用した無次元量は

$$\{ \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) \} = \{ f(x, y), g(x, y) \} / T_0, \bar{h} = bh \quad \dots\dots\dots (8)$$

である。また、外力の作用がないものとし、応力成分 $\sigma_{ij}(i, j=x, y, z)$ の無次元表示を

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}(1-\nu)/(aET_0) \quad \dots\dots\dots (9)$$

で定義すれば、力学的境界条件は

$$\bar{z} = \pm 1; \bar{\sigma}_{zz} = \bar{\sigma}_{zx} = \bar{\sigma}_{zy} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。さらに、厚板には初期ひずみがないものとするれば、式(1)で表される調和関数 $\bar{\phi}$ [これは前論文⁽³⁾で記したように、連成熱応力問題において温度変化 T と体積ひずみ e との関係より得られる未知関数である。] に対し、初期条件は次式となる。

$$\tau=0; \bar{\phi}=0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

なお、加熱を受ける領域が座標原点近傍に限られていることを考慮すれば、式(1)～(3)で表される未知関数には、 $x \rightarrow \pm \infty$ あるいは $y \rightarrow \pm \infty$ において

$$\bar{T} = \bar{\phi} = \bar{U}_x = \bar{U}_y = \bar{U}_z = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

なる条件が付加される。

これらの条件式(6), (7), (10)～(12)のもとで、基礎式系(1)～(3)を順次解けば本問題に対する所望の解が得られるが、本研究では、解析的手法の簡単化のため、非対称加熱条件式(6)を対称成分と反対称成分に分離し、これらを別個に取扱って得られたそれぞれの解を重ね合わせるにより、最終的な解とする手法をとることにする。そこで、図2に示すように、 $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$ により非対称加熱を受ける厚板の加熱条件は、 $F(\bar{x}, \bar{y})$ により両表面から加熱を受ける対称加熱条件と、 $G(\bar{x}, \bar{y})$ により上面($\bar{z}=1$)から加熱、下面($\bar{z}=-1$)より吸熱を受ける反対称加熱条件とに分離することができる。ただし

$$\left. \begin{aligned} F(\bar{x}, \bar{y}) &= \{ \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) \} / 2 \\ G(\bar{x}, \bar{y}) &= \{ \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) \} / 2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

いま、対称加熱に対する解 [$F(\bar{x}, \bar{y})$ に対するもの] に添字 $i=1$ を、反対称加熱に対する解 [$G(\bar{x}, \bar{y})$ に対するもの] に添字 $i=2$ をつけて区別すれば、厚板の上下両表面における熱的境界条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{z} = \pm 1; \pm \partial \bar{T}_1 / \partial \bar{z} + \bar{h} \bar{T}_1 &= \bar{h} F(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{z} = \pm 1; \pm \partial \bar{T}_2 / \partial \bar{z} + \bar{h} \bar{T}_2 &= \pm \bar{h} G(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (14)$$

一方、基礎方程式(1)～(3)、条件式(7), (10)～(12)は、添字 $i=1, 2$ に対し全く同形であり、これらの各式にそれぞれ添字 $i=1, 2$ をつけて評価すればよ

図2 非対称加熱条件の分離

いことになる。

2・2 温度分布および熱弾性場の解 基礎方程式

(1)～(3)で与えられる未知関数 $\bar{\phi}, \bar{T}, \bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z$ を求めるにあたり、式(12)を考慮すれば、これらの解は変数 $\bar{x}, \bar{y}$ に関する二重フーリエ積分形で表すことができる。そこで微分方程式(1)～(3)に対し二重フーリエ積分変換法を適用し、さらに温度関数 $F(\bar{x}, \bar{y})$, $G(\bar{x}, \bar{y})$ の x 軸および y 軸に関する対称性を考慮すれば、二重フーリエ余弦変換を用いることができる。すなわち、像関数に記号($\hat{}$)をつけて表せば、任意関数 $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ の二重フーリエ余弦変換は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}(q, r) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(\bar{x}, \bar{y}) \cos q \bar{x} \cos r \bar{y} d\bar{x} d\bar{y} \\ \phi(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{\phi}(q, r) \cos q \bar{x} \cos r \bar{y} dq dr \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 q および r はフーリエ積分変換パラメータである。また、時間 τ に関し、ラプラス変換を行う。ラプラス変換の変換パラメータを p とし、像関数に記号($*$)をつけて表せば、任意関数 $\Psi(\tau)$ のラプラス変換は次式で定義される。

$$\Psi^*(p) = \int_0^\infty \Psi(\tau) \exp(-p\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (16)$$

まず、式(1)をラプラス変換し、さらにフーリエ余弦

変換すれば

$$\frac{d^2 \hat{\phi}_i^*}{d\bar{z}^2} - (q^2 + r^2) \hat{\phi}_i^* = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

上式の一般解は

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}_i^* &= \sinh s \bar{z}, \cosh s \bar{z} \\ s^2 &= q^2 + r^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、対称成分 $i=1$ に対し $\bar{z}$ に関する偶関数を選び、反対称成分に対し奇関数を選べば

$$\left(\begin{array}{c} \hat{\phi}_1^* \\ \hat{\phi}_2^* \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} A_1 \cosh s \bar{z} \\ A_2 \sinh s \bar{z} \end{array} \right) \quad \dots\dots\dots (19)$$

上式をフーリエ逆変換すれば

$$\left(\begin{array}{c} \bar{\phi}_1^* \\ \bar{\phi}_2^* \end{array} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\begin{array}{c} A_1 \cosh s \bar{z} \\ A_2 \sinh s \bar{z} \end{array} \right) \cos q \bar{x} \cos r \bar{y} dq dr \quad \dots\dots\dots (20)$$

次に、式(2)を初期条件式(7), (11)のもとでラプラス変換し、さらに二重フーリエ余弦変換を行えば

$$\Delta \bar{T}_i^* - (1 + \delta) p \bar{T}_i^* = \delta p \bar{\phi}_i^* \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{d^2 \bar{T}_i^*}{d\bar{z}^2} - \{q^2 + r^2 + (1 + \delta)p\} \bar{T}_i^* = \delta p \bar{\phi}_i^* \quad \dots\dots\dots (22)$$

上式(22)に式(19)の関係を代入し、さらに $\bar{T}_i$ の $\bar{z}$ に関する対称性を考慮して解けば

$$\left(\begin{array}{c} \bar{T}_1^* \\ \bar{T}_2^* \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} B_1 \cosh \mu \bar{z} \\ B_2 \sinh \mu \bar{z} \end{array} \right) - \frac{\delta}{1 + \delta} \left(\begin{array}{c} A_1 \cosh s \bar{z} \\ A_2 \sinh s \bar{z} \end{array} \right) \quad (23)$$

となり、フーリエ逆変換により次式を得る。

$$\left(\begin{array}{c} \bar{T}_1^* \\ \bar{T}_2^* \end{array} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \left(\begin{array}{c} B_1 \cosh \mu \bar{z} \\ B_2 \sinh \mu \bar{z} \end{array} \right) - \frac{\delta}{1 + \delta} \left(\begin{array}{c} A_1 \cosh s \bar{z} \\ A_2 \sinh s \bar{z} \end{array} \right) \right\} \cos q \bar{x} \cos r \bar{y} dq dr \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし

$$\mu^2 = q^2 + r^2 + (1 + \delta)p \quad \dots\dots\dots (25)$$

次に、方程式(3)で与えられる変位成分 $\bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z$ に対しては、式(3)をそれぞれラプラス変換した後、式(20), (24)の関係をいれれば、次式で示すようなフーリエ積分形の解を得る。

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \bar{U}_{x1}^* \\ \bar{U}_{x2}^* \end{array} \right) &= \frac{2}{\pi} (1 + \nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1 + \nu} \left(\begin{array}{c} C_1 \cosh s \bar{z} \\ C_2 \sinh s \bar{z} \end{array} \right) - \frac{q}{\mu^2 - s^2} \left(\begin{array}{c} B_1 \cosh \mu \bar{z} \\ B_2 \sinh \mu \bar{z} \end{array} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{K_1 q}{4s^2} \left(\begin{array}{c} A_1 (\cosh s \bar{z} - 2s \bar{z} \sinh s \bar{z}) \\ A_2 (\sinh s \bar{z} - 2s \bar{z} \cosh s \bar{z}) \end{array} \right) \right\} \sin q \bar{x} \cos r \bar{y} dq dr \\ \left(\begin{array}{c} \bar{U}_{y1}^* \\ \bar{U}_{y2}^* \end{array} \right) &= \frac{2}{\pi} (1 + \nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1 + \nu} \left(\begin{array}{c} D_1 \cosh s \bar{z} \\ D_2 \sinh s \bar{z} \end{array} \right) - \frac{r}{\mu^2 - s^2} \left(\begin{array}{c} B_1 \cosh \mu \bar{z} \\ B_2 \sinh \mu \bar{z} \end{array} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{K_1 r}{4s^2} \left(\begin{array}{c} A_1 (\cosh s \bar{z} - 2s \bar{z} \sinh s \bar{z}) \\ A_2 (\sinh s \bar{z} - 2s \bar{z} \cosh s \bar{z}) \end{array} \right) \right\} \cos q \bar{x} \sin r \bar{y} dq dr \\ \left(\begin{array}{c} \bar{U}_{z1}^* \\ \bar{U}_{z2}^* \end{array} \right) &= \frac{2}{\pi} (1 + \nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \frac{K_2}{s} \left(\begin{array}{c} A_1 \sinh s \bar{z} \\ A_2 \cosh s \bar{z} \end{array} \right) + \frac{\mu}{\mu^2 - s^2} \left(\begin{array}{c} B_1 \sinh \mu \bar{z} \\ B_2 \cosh \mu \bar{z} \end{array} \right) - \frac{K_1}{2} \left(\begin{array}{c} A_1 \bar{z} \cosh s \bar{z} \\ A_2 \bar{z} \sinh s \bar{z} \end{array} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(1 + \nu)s} \left(\begin{array}{c} (qC_1 + rD_1) \sinh s \bar{z} \\ (qC_2 + rD_2) \cosh s \bar{z} \end{array} \right) \right\} \cos q \bar{x} \cos r \bar{y} dq dr \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ただし

$$K_1 = \frac{1 + 2\delta(1 - \nu)}{(1 + \delta)(1 - 2\nu)}, \quad K_2 = \frac{7 - 8\nu + 6\delta(1 - \nu)}{4(1 + \delta)(1 - 2\nu)} \quad \dots\dots\dots (27)$$

以上の演算により、式(24)、(26)で示されるように、ラプラス像空間での温度変化および変位成分が定式化された。次に、応力成分 $\bar{\sigma}_{ij}(i,j=x,y,z)$ を導出する。三次元応力状態におけるフックの法則より、無次元応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ は無次元変位 $\bar{U}_i$ 、無次元温度 $\bar{T}$ を用いて次式のように表される。

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\bar{\epsilon}_{ij}}{1+\nu} + \frac{1}{1-2\nu} \left\{ \frac{\nu \bar{e}}{1+\nu} - (1-\nu) \bar{T} \right\} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ただし

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{j}} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{i}} \right); i,j=x,y,z, \quad \bar{e} = \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{\epsilon}_{yy} + \bar{\epsilon}_{zz} \quad \dots\dots\dots (29)$$

したがって、ラプラス像空間での応力成分 $\sigma_{ij}^*(i,j=x,y,z)$ は、式(24)、(26)を式(28)の関係に代入することにより次式のように表される。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{\sigma}_{xx1}^*}{\bar{\sigma}_{xx2}^*} \right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\left(K_3 - \frac{K_1 q^2}{4s^2} \right) \left(\frac{A_1 \cosh s \bar{z}}{A_2 \sinh s \bar{z}} \right) + \frac{K_1 q^2}{2s} \left(\frac{A_1 \bar{z} \sinh s \bar{z}}{A_2 \bar{z} \cosh s \bar{z}} \right) - \frac{\mu^2 - r^2}{\mu^2 - s^2} \left(\frac{B_1 \cosh \mu \bar{z}}{B_2 \sinh \mu \bar{z}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{1+\nu} \left(\frac{C_1 \cosh s \bar{z}}{C_2 \sinh s \bar{z}} \right) \right] \cos q \bar{x} \cos r \bar{y} d q d r \\ \left(\frac{\bar{\sigma}_{yy1}^*}{\bar{\sigma}_{yy2}^*} \right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\left(K_3 - \frac{K_1 r^2}{4s^2} \right) \left(\frac{A_1 \cosh s \bar{z}}{A_2 \sinh s \bar{z}} \right) + \frac{K_1 r^2}{2s} \left(\frac{A_1 \bar{z} \sinh s \bar{z}}{A_2 \bar{z} \cosh s \bar{z}} \right) - \frac{\mu^2 - q^2}{\mu^2 - s^2} \left(\frac{B_1 \cosh \mu \bar{z}}{B_2 \sinh \mu \bar{z}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{1+\nu} \left(\frac{D_1 \cosh s \bar{z}}{D_2 \sinh s \bar{z}} \right) \right] \cos q \bar{x} \cos r \bar{y} d q d r \\ \left(\frac{\bar{\sigma}_{zz1}^*}{\bar{\sigma}_{zz2}^*} \right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[K_4 \left(\frac{A_1 \cosh s \bar{z}}{A_2 \sinh s \bar{z}} \right) - \frac{K_1}{2} \left(\frac{A_1 s \bar{z} \sinh s \bar{z}}{A_2 s \bar{z} \cosh s \bar{z}} \right) + \frac{s^2}{\mu^2 - s^2} \left(\frac{B_1 \cosh \mu \bar{z}}{B_2 \sinh \mu \bar{z}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{(q C_1 + r D_1) \cosh s \bar{z}}{(q C_2 + r D_2) \sinh s \bar{z}} \right) \right] \cos q \bar{x} \cos r \bar{y} d q d r \\ \left(\frac{\bar{\sigma}_{xy1}^*}{\bar{\sigma}_{xy2}^*} \right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{K_1 q r}{4s^2} \left(\frac{A_1 (\cosh s \bar{z} - 2s \bar{z} \sinh s \bar{z})}{A_2 (\sinh s \bar{z} - 2s \bar{z} \cosh s \bar{z})} \right) + \frac{q r}{\mu^2 - s^2} \left(\frac{B_1 \cosh \mu \bar{z}}{B_2 \sinh \mu \bar{z}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{(r C_1 + q D_1) \cosh s \bar{z}}{(r C_2 + q D_2) \sinh s \bar{z}} \right) \right] \sin q \bar{x} \sin r \bar{y} d q d r \\ \left(\frac{\bar{\sigma}_{yz1}^*}{\bar{\sigma}_{yz2}^*} \right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[-K_5 \frac{r}{s} \left(\frac{A_1 \sinh s \bar{z}}{A_2 \cosh s \bar{z}} \right) + \frac{K_1 r}{2} \left(\frac{A_1 \bar{z} \cosh s \bar{z}}{A_2 \bar{z} \sinh s \bar{z}} \right) - \frac{\mu r}{\mu^2 - s^2} \left(\frac{B_1 \sinh \mu \bar{z}}{B_2 \cosh \mu \bar{z}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(1+\nu)s} \left(\frac{(q r C_1 + (s^2 + r^2) D_1) \sinh s \bar{z}}{(q r C_2 + (s^2 + r^2) D_2) \cosh s \bar{z}} \right) \right] \cos q \bar{x} \sin r \bar{y} d q d r \\ \left(\frac{\bar{\sigma}_{zx1}^*}{\bar{\sigma}_{zx2}^*} \right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[-K_5 \frac{q}{s} \left(\frac{A_1 \sinh s \bar{z}}{A_2 \cosh s \bar{z}} \right) + \frac{K_1 q}{2} \left(\frac{A_1 \bar{z} \cosh s \bar{z}}{A_2 \bar{z} \sinh s \bar{z}} \right) - \frac{\mu q}{\mu^2 - s^2} \left(\frac{B_1 \sinh \mu \bar{z}}{B_2 \cosh \mu \bar{z}} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)s} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{(q r D_1 + (s^2 + q^2) C_1) \sinh s \bar{z}}{(q r D_2 + (s^2 + q^2) C_2) \cosh s \bar{z}} \right) \right] \sin q \bar{x} \cos r \bar{y} d q d r \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

ただし

$$K_3 = \frac{\nu + \delta(1-\nu)}{(1+\delta)(1-2\nu)}, K_4 = \frac{5-4\nu+6\delta(1-\nu)}{4(1+\delta)(1-2\nu)}, K_5 = \frac{3-4\nu+2\delta(1-\nu)}{4(1+\delta)(1-2\nu)} \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで、温度分布、変位成分および応力成分の表示式(24)、(26)、(30)に含まれる未定定数 A_i, B_i, C_i および $D_i(i=1,2)$ は熱的境界条件式(14)および力学的境界条件式(10)より決定される。式(14)、(10)をラプラス変換すれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{z} \pm 1; \bar{\sigma}_{zz}^* &= \bar{\sigma}_{zz}^* = \bar{\sigma}_{zy}^* = 0 \quad (i=1,2) \\ \pm \partial \bar{T}_1^* / \partial \bar{z} + \bar{h} \bar{T}_1^* &= \bar{h} F(\bar{x}, \bar{y}) / p \\ \pm \partial \bar{T}_2^* / \partial \bar{z} + \bar{h} \bar{T}_2^* &= \pm \bar{h} G(\bar{x}, \bar{y}) / p \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$\bar{y}$ のフーリエ積分表示は、式(15)を用いて次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{F(\bar{x}, \bar{y})}{G(\bar{x}, \bar{y})} \right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\hat{F}(q, r)}{\hat{G}(q, r)} \right) \\ &\quad \times \cos q \bar{x} \cos r \bar{y} d q d r \\ \left(\frac{\hat{F}(q, r)}{\hat{G}(q, r)} \right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{F(\bar{x}, \bar{y})}{G(\bar{x}, \bar{y})} \right) \\ &\quad \times \cos q \bar{x} \cos r \bar{y} d \bar{x} d \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

ただし、上式(32)に含まれる温度関数 $F(\bar{x}, \bar{y}), G(\bar{x}, \bar{y})$ 、

境界条件式(32)に式(24)、(30)を代入すれば、未定定

数 A_i, B_i, C_i および D_i が一意的に決定される。例えば、 $i=1$ に対する方程式は次式のように、マトリックス表示される。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \frac{\bar{h}}{p} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (34)$$

ただし

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(s \sinh s + \bar{h} \cosh s) \delta / (1 + \delta) \\ a_{12} &= \mu \sinh \mu + \bar{h} \cosh \mu \\ a_{13} &= a_{14} = 0 \\ a_{21} &= K_4 \cosh s - K_1 s \sinh s / 2 \\ a_{22} &= s^2 \cosh \mu / (\mu^2 - s^2) \\ a_{23} &= -q \cosh s / (1 + \nu) \\ a_{24} &= -r \cosh s / (1 + \nu) \\ a_{31} &= q(-K_5 \sinh s / s + K_1 \cosh s / 2) \\ a_{32} &= -\mu q \sinh \mu / (\mu^2 - s^2) \\ a_{33} &= (q^2 + s^2) \sinh s / \{2(1 + \nu)s\} \\ a_{34} &= q r \sinh s / \{2(1 + \nu)s\} \\ a_{41} &= a_{31} r / q \\ a_{42} &= a_{32} r / q \\ a_{43} &= a_{34} \\ a_{44} &= a_{33}(r^2 + s^2) / (q^2 + s^2) \\ b_1 &= \bar{F}(q, r), b_2 = b_3 = b_4 = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (35)$$

式(34)をクラメルの公式を用いて解き、次式のように表す。

$$\{A_1, B_1, C_1, D_1\} = \frac{\bar{h}}{p \square_1} \{\bar{A}_1(\mu), \bar{B}_1(\mu), \bar{C}_1(\mu), \bar{D}_1(\mu)\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

ただし、 $\square_1$ は行列 $[a_{ij}]$ の行列式、 $\bar{A}_1(\mu), \bar{B}_1(\mu), \bar{C}_1(\mu), \bar{D}_1(\mu)$ は、それぞれ行列 $[a_{ij}]$ の第1, 第2, 第3, 第4列めを定数ベクトル b_i で置換した行列の行列式である。以上の演算により、ラプラス像空間での解が得られた。これらの解を留数定理を用いて逆変換すれば、実空間における温度、変位および応力成分が得られる。そこで、式(36)より

$$\square_1 = 0, p = 0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

を満足する各点を極とする留数を求めればよいことが

図3 長方形片側加熱条件

わかる。ここで、 $\square_1 = 0$ に対する留数の和は非定常成分を表し、 $p=0$ を満たす留数は定常成分を表す。式(36)を式(24), (26), (30)に代入した後、留数の極となる $p \square_1$ を除いた残りの関数形を一般に $Q(\mu)$ と表せば、 $\square_1 = 0$ に対する留数 R_j の和は

$$\sum_{j=1}^{\infty} R_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\omega_j \exp\{-(\omega_j^2 + s^2)\tau/(1+\delta)\} Q(\omega_j)}{(\omega_j^2 + s^2) \square_1'(\omega_j)} \quad \dots\dots\dots (38)$$

ただし

$$\omega = \sqrt{-1}\mu, \square_1'(\omega) = d\square_1/d\omega \quad \dots\dots\dots (39)$$

であり、固有値 ω_j は

$$\square_1(\omega) = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

を満たす j 番めの正根である。一方、 $p=0$ に対する留

図4 加熱側表面の x 軸上での温度分布 ($\bar{z}=1, \bar{y}=0$)

図5 z 軸上の板厚方向に関する温度分布 ($\bar{x}=\bar{y}=0$)

図6 加熱側表面の y 軸上の熱応力 $\bar{\sigma}_{xx}$ ($\bar{z}=1, \bar{x}=0$)

数 R_0 は定常解であり、これは容易に求められるが、その詳細は省略する。

次に反対称温度関数 $G(\bar{x}, \bar{y})$ による温度、変位および応力成分の定式化について、その概略を述べる。まず、式(24)、(26)、(30)からわかるように、 $i=2$ で示される反対称加熱によるラプラス像空間での解は、 $i=1$ で示される対称加熱による解と比べ、 $\bar{z}$ に関する双曲線関数が

$$\sinh(\cdot) \rightarrow \cosh(\cdot), \cosh(\cdot) \rightarrow \sinh(\cdot) \cdots \cdots (41)$$

のように置換されているだけである。したがって、未定定数 A_2, B_2, C_2, D_2 は方程式(34)において、式(41)の関数を用いて置換し、さらに

$$b_1 = \hat{G}(q, r) \cdots \cdots (42)$$

と変換することにより求められる。さらに、ラプラス逆変換における解析手順は、上述の対称加熱による場合と全く同じであるが、これらの詳細についても省略する。以上の解析により、非対称加熱を受ける厚板の温度、変位および応力成分が求められた。

3. 数値計算例と考察

前章で導いた温度、変位および応力成分の解析解に対する数値計算結果を以下に示す。数値計算例として、図3に示すように、厚板の片側表面($\bar{z}=1$)から長方形形状($2\bar{x} \times 2\bar{y}_1$)の部分加熱を受ける場合を取扱った。すなわち、 $H(\cdot)$ をヘビサイド関数とすれば、媒体温度関数 $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$ が

図7 加熱側表面の x 軸上の熱応力 $\bar{\sigma}_{xx}(\bar{z}=1, \bar{y}=0)$

図8 z 軸上の板厚方向に関する熱応力 $\bar{\sigma}_{xx}(\bar{x}=\bar{y}=0)$

(a) 加熱側表面 ($\bar{z}=1$)

(b) 板の中央面 ($\bar{z}=0$)

(c) 冷却側表面 ($\bar{z}=-1$)

図9 x 軸上での変位成分 $\bar{U}_z$ の分布

図10 加熱中心での熱応力 $\bar{\sigma}_{xx}$ の時間的変化 ($\bar{z}=1, \bar{x}=\bar{y}=0$)

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = H(\bar{x}_1 - |\bar{x}|)H(\bar{y}_1 - |\bar{y}|), \bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

で与えられる場合であり、このとき式(13)より

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y})/2 \quad \dots\dots\dots (44)$$

となる。したがって、式(35)および式(42)に含まれる媒体温度関数のフーリエ積分形 $\hat{F}(q, r), \hat{G}(q, r)$ は、式(33)より、次式で与えられる。

$$\hat{F}(q, r) = \hat{G}(q, r) = \frac{1}{\pi q r} \sin q \bar{x}_1 \sin r \bar{y}_1 \quad \dots\dots (45)$$

また、温度および熱応力成分の時間的変化およびそれに及ぼす連成効果を検討するため、次式に示すような計算諸元を用いた。

$$\left. \begin{aligned} \nu &= 0.3, \delta = 0.07, 0 \\ \bar{x}_1 &= \bar{y}_1 = 1.0, \bar{h} = 10.0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

以下に示す各図において、破線は $\delta = 0.07$ の連成解、実線は $\delta = 0$ の非連成解である。

まず、温度分布の時間的な変化を図4、図5に示す。図4は加熱側表面 ($\bar{z} = 1$) における x 軸 ($\bar{y} = 0$) 上の温度分布である。加熱の初期では、加熱領域内 ($0 \leq \bar{x} \leq 1$) の温度上昇はほぼ一様であるが、時間の経過とともに放熱の影響のため、加熱域の中心部 ($\bar{x} = 0$) ほど高温となる。連成効果としては、加熱時間が短いほど大きく現れていることがわかる。この理由は、加熱表面近傍における温度上昇の割合が加熱初期ほど大きいいため、それに伴って発生する体積ひずみの時間的割合が大きいためである。図5は加熱領域の中心 ($\bar{x} = \bar{y} = 0$) を通る z 軸(板厚)方向の温度分布の時間的変化を示したものであり、連成効果については、 $\bar{z} = 0 \sim 0.5$ の範囲に対し、 $\tau = 0.05 \sim 0.1$ 付近で最も大きく現れている。

次に、熱応力成分 $\bar{\sigma}_{xx}$ の時間的変化を図6～図8に示す。図6は加熱側表面 ($\bar{z} = 1$) における y 軸 ($\bar{x} = 0$) 上の $\bar{\sigma}_{xx}$ の分布であり、加熱初期から定常状態に到るまでのすべての時間帯において、加熱領域内 ($0 \leq \bar{y} \leq 1$) で大きな圧縮応力が発生する。また、この圧縮応力は $\tau = 0.05$ 付近で最大となる。一方、加熱領域外 ($\bar{y} \geq 1$) では、定常状態に近付くにつれて、引張応力が発生する。これは、加熱領域外の表面近傍の温度が放熱の影響のために、内部より低くなるためである。図7は加熱側表面 ($\bar{z} = 1$) における x 軸 ($\bar{y} = 0$) 上の $\bar{\sigma}_{xx}$ の分布であり、全領域で圧縮応力分布を示すが、加熱初期では加熱領域内 ($0 \leq \bar{x} \leq 1$) のみが大きな圧縮応力状態となる。さらに、図8は、加熱領域の中心 ($\bar{x} = \bar{y} = 0$) を通る z 軸(板厚)方向の $\bar{\sigma}_{xx}$ の分布であり、時間の経過とともに、板厚方向の応力分布は大きく変化することが示されており、特に加熱初期において加熱

側表面 ($\bar{z} = 1$) 近傍で、大きな圧縮応力分布となる。なお、本数値計算例では式(46)の計算諸元からわかるとおり、加熱領域が正形状であるため、熱応力成分 $\bar{\sigma}_{xx}$ と $\bar{\sigma}_{yy}$ とは対称的な分布を示すので、 $\bar{\sigma}_{yy}$ に関する図示を省略した。また、熱応力成分 $\bar{\sigma}_{zz}$ については、上述の $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}$ と比べ、その分布が極めて小さい(計算結果から、最大値で約 1/10 以下)ため、結果の図示を省略する。

次に、非対称加熱を受ける厚板の熱変形を把握するために、図9は板厚 (z 軸) 方向の熱変位成分 $\bar{U}_z$ の x 軸方向に関する分布を、加熱側表面 ($\bar{z} = 1$)、板の中央面 ($\bar{z} = 0$)、冷却側表面 ($\bar{z} = -1$) にていて示したものである。加熱側表面における分布が他の位置のものより大きく現れ、かつ加熱側表面では、加熱側に凸状に膨れていることがわかり、特に加熱領域 ($0 \leq \bar{x} \leq 1$) で局部的に大きな変形の生じていることがわかる。

最後に、図10、図11は、それぞれ加熱側表面 ($\bar{z} = 1$) の加熱中心 ($\bar{x} = \bar{y} = 0$) に生じる圧縮応力 $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}$ の時間的変化を加熱領域の大きさをパラメータとして示したものである。すなわち、図10は y 方向の加熱幅の半分 $\bar{y}_1$ を $\bar{y}_1 = 1.0$ (一定)として、 x 方向の加熱幅の半分 $\bar{x}_1$ を $\bar{x}_1 = 0.25 \sim 4.0$ と変化させたときに生じる圧縮応力 $\bar{\sigma}_{xx}$ のピーク値及びその生じる時間を示したものである。その図より、加熱幅が大きくなるとともに $\bar{\sigma}_{xx}$ のピーク値の生じる時間が遅くなり、かつその大きさも顕著に大きくなることがわかる。一方、図11は、図10と同じ設定条件のもとでの $\bar{\sigma}_{yy}$ の変化を調べたものであり、加熱幅 $\bar{x}_1$ の変化に対して、 $\bar{\sigma}_{yy}$ のピーク値の生じる時間およびその大きさはほとんど

図11 加熱中心での熱応力 $\bar{\sigma}_{yy}$ の時間的変化 ($\bar{z} = 1, \bar{x} = \bar{y} = 0$)

変化せず、加熱幅 $\bar{x}_1$ の増大とともに $\bar{\sigma}_{yy}$ のピーク値は低下する傾向にある。なお、図 10, 図 11 より、連成効果に関しては、ピーク値の現れた後の時間帯において顕著に現れていることがわかる。

4. む す び

本研究は非対称加熱を受ける厚板の三次元非定常熱応力問題を、連成効果を考慮した変位法を用いて理論解析する手法を示したものであり、さらに数値計算例を示した。本研究で展開した解析方法の基本的な考え方は、与えられた非対称加熱条件を対称成分と非対称成分に分離し、これらを別個に解析するという手法であり、種々の三次元熱応力問題に対して容易に適用し

うる方法であると言える。この数値計算例として、厚板の片側表面から長方形の局所的な一様加熱を受ける場合に適用して、温度変化、熱応力、熱変位、ならびにこれらに関する連成効果について調べた。

なお、数値計算には名古屋大学大型計算機センター FACOM M-780/20 を使用した。

文 献

- (1) 例えば、牟岐, 機論, 22-123(1956), 795; 五島・ほか2名, 機論, 39-324(1973), 2358; Sumi, N., ほか2名, *J. Thermal Stresses*, 10-1(1987), 83.
- (2) 辻・ほか2名, 機論, 48-431, A(1982), 967; 辻・ほか2名, 機論, 51-468, A(1985), 1973.
- (3) 辻・ほか2名, 機論, 49-440, A(1983), 503.

討 論

〔質問〕 五嶋孝仁〔富山大学工学部〕

複雑な加熱条件の連成熱応力問題を巧みに解析されたことに敬意を表す。

(1) どの計算結果を見ても、連成効果は実用上無視してもよいほど小さいように思われるが、実用上連成効果を考慮したほうが良いと思われるような実例または条件などがあればお教え願いたい。

(2) 本計算ではビオ数 $\bar{h}$ が一定の場合を扱っているが、例えば $\bar{h}=\infty$ の熱衝撃的な現象になるほど連成効果は大きくなるのではないかと思うが、いかがか。

〔回答〕 (1) 連成効果は、温度分布に対して修正フーリエ熱伝導方程式より連成係数 δ と体積ひずみ速度 $\partial e/\partial \tau$ に、熱応力に対してその解より温度分布と連成係数に関係する。したがって連成係数の大きい材料として鉛 ($\delta=0.079$)、アルミニウム ($\delta=0.031$) な

どを取扱う場合、あるいはひずみ速度の大きい動的連成とか移動熱源により加熱される場合などでは連成効果を考慮したほうがより厳密な解である。解析例として後者の場合^{(付1)(2)}その連成効果は、非連成解に比較して温度分布に対して $-3\sim-4\%$ 、熱応力に対して $+5\sim+10\%$ にも達するので、軽々しく無視できないと思われる。

(2) ご指摘のとおり、温度分布と熱応力に対する連成効果は $h\rightarrow\infty$ の場合が最も大きい、計算結果から $h=10$ 以上では連成効果はあまり変わらないようである⁽³⁾。それゆえより一般化した熱弾性問題とするため、熱的境界条件の加熱流体のビオ数 h を有限値として取扱った。

(付1) Takeuti, Y. and Tsuji, M., *J. Thermal Stresses*, 5-1 (1982), 53.