異材界面き裂の屈折条件・破壊基準の検討*

結城 良治*¹, 許 金泉*²Fracture Criteria on Kinking of a Crack
out of The Interface in Dissimilar Materials

Ryoji YUUKI and Jin-Quan Xu

The authors deal with fracture criteria on kinking of an interface crack out of the interface in dissimilar materials based on the maximum stress ($\sigma_{\theta\max}$) concept similar to the mixed-mode fracture criterion for a crack in a homogeneous material. If the bimaterial constant ε of dissimilar materials is zero or small, the kinking angles can easily be determined independent of the distance r from a crack tip. However, if ε becomes large, the kinking angles cannot be determined and the angles strongly depend on the distance r due to the oscillation singularity. This criterion is compared with the energy release rate criterion of He and Hutchinson.

Key Words : Fracture Mechanics, Interface Crack, Fracture Criterion, Stress Intensity Factor, Kinking Crack, Oscillation Singularity

1. 緒言

複合材料, 異材接合継手, 接着継手, 電子デバイスなどの強度評価において必ず異材界面の問題につきあたり, 最近界面の破壊力学の確立が急務となり, 活発な研究がみられる^{1)~10)}. 従来, 界面き裂先端では振動応力特異性, 変位のオーバーラッピングが存在し, 破壊力学パラメータの定義に混乱が見られ, 単純な継手の界面き裂ですらその応力拡大係数が求められていなかったのが現状であった. 著者らは異材接合継手や界面き裂の解析に有力な境界要素法(BEM)を開発し¹⁾, またこのBEMにより界面き裂の応力拡大係数を求める手法を提案している²⁾. またRice⁹⁾やShih¹⁰⁾らはき裂先端の小規模降伏を考えると振動特異性が消失することなどを明らかにしている. このように最近理論的な面から界面き裂の破壊力学が急速に発展しつつある.

しかしパラメータが求められただけでは, 界面破壊

現象を定量的に評価できるわけではなく, 実際の破壊現象と対応させた破壊の各種クライテリオンが必要であるが, この方面の研究は極めて乏しいのが現状である. 特に界面き裂は必ず混合モードとなるため混合モードを考慮したクライテリオンが必要となる. 著者らはこの観点から接着継手の接着界面に沿う破壊の混合モード破壊クライテリオンについて実験的に検討している^{11), 12)}.

本研究では, 界面き裂が混合モード負荷を受け母材側へ屈折するクライテリオンについて検討する. 最近HeとHutchinsonらはこの問題についてエネルギー解放率を用いたクライテリオンを提案している¹³⁾. ここでは均質材の混合モード破壊クライテリオンとしてよく用いられる接線方向応力最大説($\sigma_{\theta\max}$)¹⁴⁾を界面き裂に拡張適用した応力基準のクライテリオンを新たに提案し, エネルギークライテリオンと比較検討する.

2. 界面き裂の応力場と応力拡大係数

2.1 界面き裂の応力場

図1に示す2つの異なる材料(せん断弾性係数 G_1 , G_2 , ポアソン比 ν_1 , ν_2)の界面上の長さ $2a$ のき裂先端近傍の応力分布は極座標表示で次式で与えられる

* 平成2年3月30日 第67期通常総会講演会において講演, 原稿受付 平成元年10月6日.

*¹ 正員, 東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1).

*² 学生, 東京大学大学院.

図1 異材界面き裂モデル

ことが知られている^{3), 4), 5), 6)}.

$$\sigma_{\theta j} = \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{2\sqrt{2\pi r} \cosh(\pi \varepsilon)} \left\{ B(\theta, \varepsilon, r) \cos\left(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}\right) - C(\theta, \varepsilon, r) \sin\left(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}\right) \right\} \dots (1)$$

$$\tau_{\theta j} = \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{2\sqrt{2\pi r} \cosh(\pi \varepsilon)} \left\{ D(\theta, \varepsilon, r) \cos\left(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}\right) + F(\theta, \varepsilon, r) \sin\left(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}\right) \right\} \dots (2)$$

ここで,

$$B = W_j \left\{ 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \gamma\right) - (\cos\theta + 2\varepsilon \sin\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right) \right\} + \frac{1}{W_j} \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \gamma\right) \dots (3)$$

$$C = W_j \left\{ 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \gamma\right) + (\cos\theta + 2\varepsilon \cos\theta) \sin\left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right) \right\} + \frac{1}{W_j} \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \gamma\right) \dots (4)$$

$$D = -W_j (\cos\theta + 2\varepsilon \sin\theta) \sin\left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right) + \frac{1}{W_j} \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \gamma\right) \dots (5)$$

$$F = W_j (\cos\theta + 2\varepsilon \sin\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right) + \frac{1}{W_j} \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \gamma\right) \dots (6)$$

$$W_1 = e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}, \quad W_2 = e^{\varepsilon(\pi + \theta)} \dots (7)$$

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{K_2}{K_1} \right) \dots (8)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\kappa_1/G_1 + 1/G_2}{\kappa_2/G_2 + 1/G_1} \right) \dots (9)$$

ただし,

$$\kappa_j = \begin{cases} 3 - 4\nu_j & (\text{平面ひずみ}) \\ \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j} & (\text{平面応力}) \end{cases}$$

ここで, $j = 1, 2$ は材料 1, 2 を意味し, また θ の変化範囲は材料 1 で $(0, \pi)$, 材料 2 で $(0, -\pi)$ とする. また ε はバイマテリアル定数である.

上記の応力式にみられる $\cos(\varepsilon \ln r/2a)$, $\sin(\varepsilon \ln r/2a)$ が振動性を呈し, 振動特異性の由縁である. この振動域はきわめて小さく高々 $10^{-5}a$ 程度であり, 通常無視できるものと考えられている^{3), 4)}.

さて, 式(1), (2)において $\theta = 0$ として応力を複素表示すると, $\theta = 0$ 上の応力は次式となる.

$$\sigma_y + i \tau_{xy} = (K_1 + i K_2) \sqrt{2\pi r} \left(\frac{r}{2a} \right)^{i\varepsilon} \dots (10)$$

また同様に変位は上下き裂面 ($\theta = \pm \pi$) の相対変位をとると次式で与えられる.

$$\delta v + i \delta u = \frac{K_1 + i K_2}{2(1 + 2i\varepsilon) \cosh(\pi \varepsilon)} \left\{ \frac{\kappa_1 + 1}{G_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{G_2} \right\} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{2a} \right)^{i\varepsilon} \dots (11)$$

上式から分かるように界面き裂先端極近傍の変位場も振動性があり, オーバラップの不合理な現象を呈し, これに対しき裂面接触を考慮した各種のモデルが提案されている^{7), 8)}.

2.2 界面き裂の応力拡大係数

前述の応力場・変位場の強さを示すパラメータが界面き裂の応力拡大係数 K_1 , K_2 であり, 振動項の $\varepsilon = 0$ とすると良く知られた均質等方材の応力場と一致し, K_1 , K_2 も K_I , K_{II} と表記できる.

従来この K_1 , K_2 は振動特異性のため数値解析 (FEM, BEM) で求めるのは困難であったが, 著者らは前報²⁾において振動特異性を避けて, き裂先端近傍の変位・応力の BEM ないし FEM の解から外挿により K_1 , K_2 を求める手法を提案し, 各種の界面き裂の解析例を通じてその有効性を確認している.

なお, 界面き裂のパラメータとしてエネルギー解放率 G も良く使われる. 線形弾性体の場合, K と次式の関係が成立する^{5), 15)}.

$$G = \frac{1}{16 \cosh^2(\pi \varepsilon)} \left\{ \frac{\kappa_1 + 1}{G_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{G_2} \right\} (K_1^2 + K_2^2) \dots (12)$$

界面接合強度が弱い場合、界面に沿ってき裂が進展し、この破壊挙動はKないしGにより特性づけられると考えられる。しかし、界面き裂の場合必ず混合モードとなりこの破壊挙動を論じるには混合モードクライテリオンが必要となる。

2.3 問題の提起

一方界面接合強度が強く、またせん断負荷があると界面き裂が屈折し、図2のように材料1ないし2側に進展する現象もしばしば見られる。本研究はこの屈折がどのような角度でいつ起こるかを予測しようとするものである。

一般にこのような屈折条件を考える場合、応力基準とエネルギー基準の2つの考え方がある。均質材の混合モード破壊クライテリオンとして各種多様な提案があるが、実用的な見地から適用されているのは接線方向応力最大説¹⁴⁾ ($\sigma_{\theta\max}$)である。ここでは前述した振動性を含む界面き裂の応力場を用いて、均質材の $\sigma_{\theta\max}$ クライテリオンの拡張としてのクライテリオンの可能性について検討する。このクライテリオンが確立して始めて異材接合構造の破壊挙動を定量的に予測できるものと考えられる。また将来的には界面のクラックアレスト効果を利用した複合材の高靱性化・高強度化等にも有益となるものと期待される。

3. 界面き裂の接線方向応力最大基準

界面き裂の場合も、もし屈折するとすれば $r \rightarrow 0$ における σ_{θ} が最大の方角 ($\theta = \theta_0$) に進展するものとする。この角度 θ_0 は、(1)式より次式の根として求められる。

$$\frac{\partial B(\theta, \varepsilon, \gamma)}{\partial \theta} \cos\left(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}\right) - \frac{\partial C(\theta, \varepsilon, \gamma)}{\partial \theta} \sin\left(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}\right) = 0 \quad \dots (13)$$

図2 異材界面き裂の可能な進展方向

ただし、この根は複数でくるが σ_{θ} が最大となる根のみ選ぶものとする。

(13)式において均質材と異なり、き裂先端からの距離 r を振動項として含んでいることが分かる。従って(13)式を解くのに困難を伴い、かつ解いても r に依存する形となる。このため、以下では、1) $\varepsilon = 0$ の場合、2) ε が小さい場合、3) ε が大きい場合 に分け、クライテリオンを具体的に論じるものとする。

3.1 $\varepsilon = 0$ (振動特異性なし異材、均質材) の場合

(1), (2)式において $\varepsilon = 0$ とすると次式が得られる。

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{2 \sqrt{2\pi r}} \left[2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \gamma\right) - \cos\theta \cos\left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \gamma\right) \right] \quad \dots (14)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{2 \sqrt{2\pi r}} \left[-\cos\theta \sin\left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \gamma\right) \right] \quad \dots (15)$$

上式は少し形式が異なるがよく知られている均質材の応力分布式と一致する。従ってこの場合 K_1, K_2 を K_I と K_{II} とおいても良い。この場合の(13)式に相当する式は $\tau_{r\theta} = 0$ と等しく次式で与えられ、この根から屈折角 θ_0 が分かる。

$$-\sin\left(\frac{1}{2}\theta + \gamma\right) + \sin\theta \cos\left(\frac{1}{2}\theta - \gamma\right) + \frac{1}{2}\cos\theta \sin\left(\frac{1}{2}\theta - \gamma\right) - 1.5\sin(1.5\theta + \gamma) = 0 \quad \dots (16)$$

屈折角が分かるとその方向でのモードIのKに相当する $K_{\theta\max}$ が次式で与えられ、これで破壊強度を特性づけられる。

$$K_{\theta\max} = \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{2} \left[2 \cos\left(\frac{\theta_0}{2} + \gamma\right) - \cos\theta_0 \cos\left(\frac{\theta_0}{2} - \gamma\right) + \cos\left(\frac{3\theta_0}{2} + \gamma\right) \right] \quad \dots (17)$$

$\varepsilon = 0$ となるのは必ずしも均質材の場合に限らず、次式の材料定数の関係が成立する異材の場合にも $\varepsilon = 0$ となる。

$$\frac{\kappa_1 - 1}{G_1} = \frac{\kappa_2 - 1}{G_2} \quad \dots (18)$$

これは異材界面き裂の場合でも振動特異性を伴わず、均質材と同一の応力場を示すものがあることを意味する。またこの場合の変位場はそれぞれの材料が全域をしめている均質材の変位場と一致し、それぞれの材料内で次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}_j = \frac{1}{2G_j} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta (\kappa_j - 1 + 2\sin^2 \frac{1}{2}\theta) \\ \sin \frac{1}{2}\theta (\kappa_j + 1 - 2\cos^2 \frac{1}{2}\theta) \end{pmatrix} - \cos \frac{1}{2}\theta (\kappa_j + 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}\theta) \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \dots (19)$$

上式で $\theta = 0$ とすると界面上の変位が一致し、(18)式は異材界面き裂の界面上の変位の適合条件になっていることが分かる。従って、振動特異性のない異材界面き裂の屈折角 θ_0 は、均質材と同じとなり、(17)式を満たす限り材料の組合せによらず一定となるものと考えられる。図3は屈折角 θ_0 を(16)式から求め γ (K_1 と K_2 の関数、 $K_1 = 0$ で 90° 、 $K_2 = 0$ で 0°) に対して示したものである。同図にはHeとHutchinsonの G クライテリオンも示している¹³⁾ (ただし図から読み取ったものであり、正確ではない)。ここで α 、 β は次式で与えられるDundersのパラメータである¹⁶⁾。

$$\alpha = \frac{G_1(\kappa_2 + 1) - G_2(\kappa_1 + 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)} \dots (20)$$

$$\beta = \frac{G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1)}{2G_1(\kappa_2 - 1) + 2G_2(\kappa_1 - 1)} \dots (21)$$

またここで用いたパラメータ ε とは次式の関係が成立し、 $\varepsilon = 0$ と $\beta = 0$ と対応する。

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} \dots (22)$$

Hutchinson¹³⁾ のクライテリオンでは、 $\varepsilon = 0$ (すなわち $\beta = 0$) においても α に依存して屈折角も変化している。この点がここで検討した応力基準との大きな相違点であり、今後実験的検証が必要であるが、前

図3 $\varepsilon = 0$ の異材の界面き裂屈折方向

述のように(18)式を満たす異材界面き裂の応力場・変位場が均質材と同じとなることから、 α すなわち材料の組合せの影響がない本クライテリオンの方が合理的と思われる。

3.2 ε が小さい場合

(1)式の σ_θ を、各種 ε および γ 値について数値的に求め、 θ に関する分布を図4に一例として示す。いくつかの解析例を通じて $|\varepsilon| < 0.1$ の範囲で σ_θ の最大値を支配しているのは、(1)式の右辺の第1項のみであり、第2項の影響はきわめて小さいことが明かとなった。これは図5に示す各項の θ の関数 B 、 C の変化を考慮して、 ε が小さい場合、次式が成立することによる。

$$\left| \sin\left(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}\right) \right| \ll \left| \cos\left(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}\right) \right| \dots (23)$$

(a) $\varepsilon = 0.05$, $\gamma = 45^\circ$ の時、 σ_θ の分布

(b) $\varepsilon = 0.10$, $\gamma = 45^\circ$ の時、 σ_θ の分布

図4 ε が小さい場合の σ_θ の分布

図5 応力振動性の正・余弦項係数の θ に関する分布

ε が小さい場合で r/a を振動域の外側にとると上式が成立することが分かる。この目安として $|\varepsilon| < 0.1$ とする。 $|\varepsilon|$ は弾性体と剛体結合で最大 0.175 であり^{3), 4)}、通常の異材接合の大部分はこの条件を満たす。ちなみに金属-セラミックス、あるいは異種金属接合では 0.07 以下である。

ε が小さい場合、第 2 項を無視して (1) 式は次式で表すことができる。

$$\sigma_{\theta_0} = \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{2\sqrt{2\pi r} \cosh(\pi \varepsilon)} B(\theta, \varepsilon, \gamma) \cos\left(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}\right) \quad (24)$$

この式は θ と r の関数が完全分離形であるので、 r によらず σ_{θ_0} の最大となる角度 θ_0 が次式の根として求められる。

$$\frac{\partial B(\theta, \varepsilon, \gamma)}{\partial \theta} = 0 \quad (25)$$

具体的には次式となる。

$$\begin{aligned} & \varepsilon W_1 (2\cos(\tfrac{1}{2}\theta + \gamma) - (\cos\theta + 2\varepsilon \sin\theta)\cos(\tfrac{1}{2}\theta - \gamma)) \\ & + W_1 (-\sin(\tfrac{1}{2}\theta + \gamma) + (\sin\theta - 2\varepsilon \cos\theta)\cos(\tfrac{1}{2}\theta - \gamma)) \\ & + \tfrac{1}{2}(\cos\theta + 2\varepsilon \sin\theta)\sin(\tfrac{1}{2}\theta - \gamma) \\ & - (\varepsilon \cos(\tfrac{3}{2}\theta + \gamma) + 1.5\sin(\tfrac{3}{2}\theta + \gamma)) \Big/ W_1 = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

この方程式は非線形であり、数値的に求めざるを得ないが、容易に求められる。図 6 に各種の ε に対して求めた θ_0 の特性曲線を示す。この図には Hutchinson¹³⁾ の結果も併記している。ただし、彼らは $|\varepsilon| = 0.082$ の場合しか求めておらず、 $\varepsilon \neq 0$ の他の場合も求められるかどうか明確ではない。この例については本クライテリオンとはほぼ一致することが分かる。

上述のように屈折角 θ_0 が求められるとこの方向での (2) 式の $\tau_{r\theta}$ は振動域の外側で 0 となる。従って均質

図 6 ε が小さい場合の界面き裂の屈折方向

材および $\varepsilon = 0$ の異材の (17) 式に対応する破壊基準として、振動性を無視して次式が定義できる。

$$K_{\theta_{\max}} = \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{2 \cosh(\pi \varepsilon)} B(\theta_0, \varepsilon, \gamma) \quad (27)$$

この式は $\varepsilon = 0$ とすると (17) 式と一致することが確認できる。この $K_{\theta_{\max}}$ は予想される屈折角 θ_0 の微小屈折き裂を考え、この屈折き裂はもはや振動特異場ではなく、均質材の応力場で支配されるとして、そのモード I に対応する K を意味している。従ってぜい性破壊を考えると、屈折する側の材料の破壊靱性 K_{Ic} として、

$$K_{\theta_{\max}} \geq K_{Ic} \quad (28)$$

となると屈折が生じると考えられる。ただし、別途界面に沿う破壊の可能性も考えて、総合的な判断が必要となる。

3.3 ε が大きい場合

$\varepsilon > 0.1$ の場合の (1) 式の σ_{θ_0} の分布の一例を図 7 に示す。 r/a は振動域の外側にとっているが、それでも σ_{θ_0} の分布および最大値の位置は r に強い影響があり、振動域が外側のかんりの領域まで影響を及ぼしていることが分かる。このような場合には、(23) 式が成立せず、 σ_{θ_0} 最大付近でも (1) 式の第 2 項の影響が残り、(24) 式の近似が成立しないことになる。

この場合でも (13) 式を各 r 値に対して数値的に解析でき、屈折角 θ_0 が r の関数として求められる。その一例を図 8 に示す。図 8 に ε が小さい場合も含め、各 ε 値に対して屈折角 θ_0 と r の関係を $\gamma = 45^\circ$ について示す。 ε が小さい場合は r の極小さい領域を除いて安定した θ_0 が得られるが、 ε が大きくなるに伴い、 r の小さい領域で r 依存性が強くなることが分かる。さらに $\varepsilon = 0.15$ の場合、 r の極小さい領域について詳細に調べると図 9 のようになる。この $\theta_0 \sim r$ 関係は、振動域、振動影響域、安定域の 3 つの領域に分けられ、振動影響域では強い r 依存性が見られ、さらに振動域

図 7 σ_{θ_0} の分布 ($\varepsilon = 0.15, \gamma = 45^\circ$)

にはいると発散することが分かる。このような場合、屈折角 θ_0 が一意的に決められず、クライテリオンを具体的に示すのは困難である。

図8 各種 ε に対する屈折方向と r の関係

図9 屈折角 θ_0 と r の関係

図10 屈折角 θ_0 と距離 r の軌跡

一つの解釈として、振動域を無視して、その外側の安定な解から $r \rightarrow 0$ の外挿により屈折角 θ_0 を決めることは可能であろう、または本来屈折角は r とともに変化し、この θ_0 と r の軌跡を示すと図10のようになり、このような場合は図10に示すように屈折後直ちに湾曲し、最終的には主応力に直角な方向へ進展するとも考えられる。 ε が大きい場合の屈折条件についてはここでは問題点を指摘するにとどめ、その物理的解釈についてさらに今後検討を進める予定である。

3.4 考察

以上により ε が小さい範囲について界面き裂の屈折条件・破壊基準を $\sigma_{\theta_{\max}}$ 理論に基づき導出できた。 ε が大きい場合についての問題は残るが、実用的な異材接合では ε があまり大きくならないと予想されるので、実用上はここで示したクライテリオンで十分屈折条件が予想できるものと期待される。

本クライテリオンはあくまで屈折が生じるとしてのものであり、界面に沿う進展も併せて考慮する必要がある。界面に沿う進展の特に混合モード破壊基準についてはまだ研究の段階であり^{11), 12)}、この方面の研究の進展を待って総合的なクライテリオンが完成することになる。

さらに異材界面き裂はせん断負荷を受けると閉口する傾向が強い。き裂が閉口した場合の応力場や応力拡大係数は(1),(2)式と異なり、本クライテリオンはあくまで開口き裂を対象としている。界面き裂が閉口する場合はまた別途検討する必要がある^{17), 18), 19)}。

4. 結言

異材界面き裂が母材側に屈折する条件および破壊基準を $\sigma_{\theta_{\max}}$ 理論に基づき検討し、バィマテリアル定数 ε が0の場合、小さい場合、大きい場合について具体的なクライテリオンを示した。

- 1). $\varepsilon = 0$ となり、振動特異性のない異材界面き裂が存在し、その条件を示すとともに、この場合は均質材の混合モードクライテリオンと一致することを導いた。
- 2). ε が小さい場合の屈折条件・破壊基準を導き、具体的に示した。この場合振動域の外側において屈折角がき裂先端からの距離 r によらず一義的に定まる。
- 3). ε が大きくなると振動域の影響が広範囲に及び、屈折角が r に強く依存し、明確な形でクライテリオンを示せない。
- 4). HeとHutchinsonらのエネルギー解放率に基づくクライテリオンと本クライテリオンを比較し、定

性的な一致を見たが、彼らのクライテリオン的一般性については問題があると思われる。

文献

- 1). 結城, 曾, 松本, 木須, 機論, 53-492, A(昭62), 1581
- 2). 結城, 曾, 機論, 55-510, A(平1), 340
- 3). Erdogan, F., J. Appl. Mech., 85(1963), 232
- 4). Erdogan, F., J. Appl. Mech., 87(1965), 403
- 5). Sun, C.T. and Jih, C. J., Eng. Frac. Mech. 28 (1987), 13
- 6). 曾 相鳳, 学位論文(東京大学), (1989)
- 7). Comninou, M., J. Appl. Mech., 44(1977), 631
- 8). Atkinson, C. Int. J. Frac., 18(1982), 161
- 9). Rice, J. R., J. Appl. Mech., 55(1988), 814
- 10). Shih, C. F. and Asaro, R. J., J. Appl. Mech., 55(1988), 289
- 11). 鄭, 結城, 石川, 中野, 機論, 54-506, A(昭63), 1985
- 12). 同上, 機論, 55-517, A(平1), 1984
- 13). He, M. and Hutchinson, J.W., J. Appl. Mech., 56
- 14). Erdogan, F. and Sih, G.C., Trans. ASME., Ser. D, 85(1963), 519
- 15). Malyshev, B. and Salganik, R., Int. J. Fract., 1(1965), 114
- 16). Dunders, J., J. Appl. Mech., 36(1969), 650
- 17). Comninou, M., J. Appl. Mech., 46(1979), 345
- 18). Gutesen, A.K. and Dunders, J., J. Appl. Mech., 55(1985), 580
- 19). 結城, 許, 機論投稿中