内部変数理論に基づく粘塑性構成式による 血管壁の応力解析*

田 中 英 一^{*1}, 山 田 宏^{*1}

Stress Analysis of Blood Vessels by a Viscoplastic Constitutive Model Based on the Internal Variable Theory

Eiichi TANAKA and Hiroshi YAMADA

Stress analysis of blood vessels is performed by means of a transversely isotropic viscoplastic constitutive model. This model is based on the concept that the hysteresis loops of stress-strain relationships under cyclic loading conditions are caused by loading path dependence and loading rate dependence. Then the method of analysis is discussed in detail on the basis of finite deformation theory for the case of axisymmetric deformation of a long circular cylindrical tube under the condition of constant axial stretch and repeated pressurization. Simulation results show that the model can describe the experimental results by Takamizawa et al. with a relatively high accuracy. The stress histories at some points in the wall and the stress distribution across the wall are also discussed with a special emphasis on the difference between viscoplastic and elastic predictions. The results show that the inelastic properties of blood vessels reduce the stress concentration at the inner wall.

Key Words: Biomechanics, Numerical Analysis, Constitutive Equation, Finite Deformation Theory, Blood Vessels, Viscoplasticity

1. 結 言

生体内での血管壁の力学的挙動を明らかにする目的から、繰返し内圧を負荷した場合の応力解析が、種々の構成式を用いてこれまでにいくつか行われている^{(1)~(4)}。

一般に、このような荷重条件下では血管壁の内圧-外径および軸力-外径関係はヒステリシスループを描くが、ひずみエネルギー密度関数を用いた有限弾性変形解析では、ヒステリシスループの負荷側の経路に対して材料定数の決定を行い、血管壁内の応力分布を求めている。一方、弾性変形の仮定では表現できないヒステリシスループを考慮する目的から、擬似ひずみエネルギー密度関数の概念を用いる構成式がいくつか提案されている⁽¹⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。この場合、前述の負荷側の経路に加えて除荷側の経路に対しても材料定数の決定を行えば、一応解析を行うことができる。しかし、この概念はある特定のひずみ限界を有するヒステリシスループにその適用範囲が限られており、一般に応力あるいはひずみ履歴が各点ごとに異なる血管壁の応力解析に用いるのは不適当である。すなわち、考える点でのひずみ

あるいは応力の限界が材料定数の決定に用いたそれと異なる場合、荷重が反転する点での応力あるいはひずみは不連続的に変化して、ループは閉じない。

これに対し、粘弾性理論に基づいて構成式を定式化すれば、ヒステリシスループを自然に表現することができる。しかし、この方法では、限られた数の観測可能な巨視的変数だけを用いるため、血管壁の挙動を定量的に記述するには、重ね合わせ手法を用いるか⁽⁶⁾、あるいは非線形粘弾性理論にみられるように多くの材料関数を同定する必要がある⁽⁴⁾。

著者らは、擬似ひずみエネルギー密度関数に伴う上述の不都合を解消し、また粘弾性理論よりも簡単な構造の構成式を定式化する目的から、ヒステリシスループを生じる原因を負荷経路依存性と負荷速度依存性とを考え、内部変数理論に基づく粘塑性構成式モデルを定式化した⁽⁷⁾⁽⁸⁾。これによれば任意のひずみあるいは応力振幅のもとでのヒステリシスループや応力緩和現象を記述することができる。

本研究では、材料の非弾性特性が血管壁内の応力分布に与える影響を明らかにする目的から、著者らが提案した構成式を用いて応力解析を試みる。なお本研究では、簡単化のため壁内の残留応力は零と仮定したが、その影響については今後詳しく検討する予定である。

* 原稿受付 平成元年 10 月 31 日。

*¹ 正員、名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)。

2. 血管壁に対する横等方非弾性構成式⁽⁸⁾

本解析では、著者らがすでに定式化した構成式⁽⁷⁾⁽⁸⁾を用いる。そこで本章ではこれについて概説する。まず基準配置を变形前の配置に選び、变形後の現在配置に加えて除荷配置を導入すれば、全変形こう配 $\mathbf{F}$ は非弾性変形こう配 $\mathbf{F}_i$ および弾性変形こう配 $\mathbf{F}_e$ を用いて

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

と書ける。弾性ひずみ $\mathbf{G}_e$ 、非弾性ひずみ $\mathbf{G}_i$ は

$$\mathbf{G}_e = (1/2)(\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{I}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\mathbf{G}_i = (1/2)(\mathbf{I} - \mathbf{F}_i^{-T} \mathbf{F}_i^{-1}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

で定義される。ここで $\mathbf{I}$ は恒等テンソルである。また上添字 (T) と (-1) はテンソルの転置と逆を示す。非弾性ひずみ速度は非弾性埋込み時間導関数 $\dot{\mathbf{G}}_i$ により

$$\dot{\mathbf{G}}_i = \dot{\mathbf{G}}_i + \mathbf{L}_i^T \mathbf{G}_i + \mathbf{G}_i \mathbf{L}_i \quad \dots\dots\dots (4)$$

と定義される。ここで記号 $(\cdot)$ は変数の物質時間導関数を表し、また $\mathbf{L}_i$ は

$$\mathbf{L}_i = \dot{\mathbf{F}}_i \mathbf{F}_i^{-1} \quad \dots\dots\dots (5)$$

である。血管壁の非圧縮条件は次式で表される。

$$\det(2\mathbf{G}_e + \mathbf{I}) = 1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{tr } \dot{\mathbf{G}}_i = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

血管壁の異方性を表現するため、血管壁の軸 $\mathbf{h}$ に垂直な面内で等方な横等方性を仮定し、また変形は軸対称変形とする。

まず構成式の弾性部分を、指数関数形のひずみエネルギー密度関数を用いて

$$\rho^* W = a(\exp Q) + (H/2)[\det(2\mathbf{G}_e + \mathbf{I}) - 1] \quad \dots\dots\dots (8)$$

と表す。ここで ρ^* は除荷配置での密度、 a は材料定数、 H は不定圧であり、指数部 Q は

$$Q = \nu \text{tr}^2 \mathbf{G}_e + 2\mu \text{tr } \mathbf{G}_e^2 + 2\alpha \text{tr } \mathbf{G}_e \text{tr } \mathbf{M} \mathbf{G}_e + 4\beta \text{tr } \mathbf{M} \mathbf{G}_e^2 + \gamma \text{tr}^2 \mathbf{M} \mathbf{G}_e \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表される。上式で、 $\nu, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ は材料定数、 $\mathbf{M}$ は次式で定義される。

$$\mathbf{M} = \mathbf{h} \otimes \mathbf{h} \quad \dots\dots\dots (10)$$

除荷配置に関する第2種の Piola-Kirchhoff の応力テンソル $\mathbf{T}^*$ は Cauchy の応力テンソル $\mathbf{T}$ と

$$\mathbf{T}^* = (\det \mathbf{F}_e) \mathbf{F}_e^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}_e^{-T} \quad \dots\dots\dots (11)$$

の関係にあり、式(8)を $\mathbf{G}_e$ で微分して得られる。

次に非弾性部分の構成式を示す。非弾性ひずみ速度 $\dot{\mathbf{G}}_i$ は

$$\dot{\mathbf{G}}_i = (\|\mathbf{S} - \mathbf{X}\|/k_H)^n (\mathbf{S} - \mathbf{X}) / \|\mathbf{S} - \mathbf{X}\| \quad \dots\dots\dots (12)$$

と表される。ここで $\mathbf{S}$ は $\mathbf{T}^*$ に対する偏差テンソル、 $\mathbf{X}$ は移動硬化変数 (偏差テンソル)、 k_H と n は材料定

数である。また記号 $\|\cdot\|$ はテンソルのノルムを表し、例えば $\mathbf{S}$ と $\dot{\mathbf{G}}_i$ に関し、それぞれ

$$\|\mathbf{S}\| = [(3/2) \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{S}^T)]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\|\dot{\mathbf{G}}_i\| = [(2/3) \text{tr}(\dot{\mathbf{G}}_i \dot{\mathbf{G}}_i^T)]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

のように定義される。

移動硬化変数 $\mathbf{X}$ に対する発展式は次式で表される。

$$\dot{\mathbf{X}} = 2\mu' \mathbf{Z} + \alpha' (\text{tr } \mathbf{M} \mathbf{Z}) \mathbf{I} + 2\beta' (\mathbf{M} \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{M}) - (3\alpha' + 4\beta') (\text{tr } \mathbf{M} \mathbf{Z}) \mathbf{M} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで記号 $(\circ)$ は非弾性スピンテンソル

$$\mathbf{W}_i = (1/2)(\mathbf{L}_i - \mathbf{L}_i^T) \quad \dots\dots\dots (16)$$

に関する Jaumann 時間導関数、 μ', α', β' は材料定数を表し、また $\mathbf{Z}$ は b_k を材料定数として

$$\mathbf{Z} = b_k \dot{\mathbf{G}}_i - (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \|\dot{\mathbf{G}}_i\| \quad \dots\dots\dots (17)$$

で定義される。変数 $\mathbf{Y}$ (偏差テンソル) はスカラー変数 R とともに、 $\mathbf{X}$ の安定な位置を規定するように

$$\dot{\mathbf{Y}} = r_Y \langle \dot{R} \rangle (\mathbf{S} - \mathbf{Y}) / \|\mathbf{S} - \mathbf{Y}\| \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\dot{R} = r_R (\|\mathbf{S} - \mathbf{Y}\| - R) \|\dot{\mathbf{G}}_i\| \quad \dots\dots\dots (19)$$

によって表される。ここで r_Y と r_R は材料定数、記号 $\langle \cdot \rangle$ は Macauley 括弧である。

3. 一定軸方向伸長比、繰返し内圧

負荷を受ける血管の応力解析法

対象とする血管は無限に長い円筒であるとし、一定軸方向伸長比 λ_z 、外圧零の条件下で、内圧 p を一定範囲で繰返し変化させた場合の血管壁内の応力分布を解析する。

3.1 運動学的関係式と構成式の成分表示

いま軸対称変形をする円筒内の物質点に関する基準配置、除荷配置、現在配置の円柱座標をそれぞれ (R, Θ, Z) 、 (r^*, θ^*, z^*) 、 (r, θ, z) とすると

$$r^* = \lambda_\theta^i R, \theta^* = \Theta, z^* = \lambda_z^i Z \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$r = \lambda_\theta^e r^*, \theta = \theta^*, z = \lambda_z^e z^* \quad \dots\dots\dots (21)$$

の関係をj得る。ここで $\lambda_\theta^i, \lambda_\theta^e, \lambda_z^i, \lambda_z^e$ はそれぞれ円周方向と軸方向の非弾性および弾性伸長比である。このとき、各方向の全変形に対する伸長比は

$$\lambda_r = \lambda_r^e \lambda_r^i, \lambda_\theta = \lambda_\theta^e \lambda_\theta^i, \lambda_z = \lambda_z^e \lambda_z^i \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、また全変形に対する非圧縮条件は

$$\lambda_r \lambda_\theta \lambda_z = 1 \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。さらに変形後の半径 r は、非圧縮条件によって、基準配置と現在配置での内半径 R_i, r_i を用いて

$$r = \sqrt{r_i^2 + (R^2 - R_i^2)/\lambda_z} \quad \dots\dots\dots (24)$$

と表され、円周方向伸長比は r の関数として

$$\lambda_\theta(r) = 1/\sqrt{\lambda_z + (R_i^2 - r_i^2 \lambda_z)/r^2} \quad \dots\dots\dots (25)$$

と書ける。

次に構成式の成分表示を行う。まず、弾性部分の構成式(8)～(11)は、Cauchy 応力の反変成分に対する物理成分 σ^{mn} を用いて

$$\begin{aligned}\sigma^{11} &= a(\exp Q)[\nu(\lambda_r^{e2} + \lambda_\theta^{e2} + \lambda_z^{e2} - 3) \\ &\quad + 2\mu(\lambda_r^{e2} - 1) + \alpha(\lambda_z^{e2} - 1)]\lambda_r^{e2} + H \\ \sigma^{22} &= a(\exp Q)[\nu(\lambda_r^{e2} + \lambda_\theta^{e2} + \lambda_z^{e2} - 3) \\ &\quad + 2\mu(\lambda_\theta^{e2} - 1) + \alpha(\lambda_z^{e2} - 1)]\lambda_\theta^{e2} + H \\ \sigma^{33} &= a(\exp Q)[(\nu + \alpha)(\lambda_r^{e2} + \lambda_\theta^{e2} \\ &\quad + \lambda_z^{e2} - 3) + (2\mu + \alpha + 4\beta + \gamma) \\ &\quad \times (\lambda_z^{e2} - 1)]\lambda_z^{e2} + H \\ \sigma^{12} &= \sigma^{23} = \sigma^{31} = 0 \dots\dots\dots (26)\end{aligned}$$

と書ける。ただし指標 1, 2, 3 はそれぞれ円柱座標系の r, θ, z 方向成分を表す。非弾性部分の式(12)～(19)の成分表示も同様に導くことができるがその結果は省略する。

3.2 境界値問題の解法 さて、半径方向の平衡方程式は

$$d\sigma^{11}/dr + (\sigma^{11} - \sigma^{22})/r = 0 \dots\dots\dots (27)$$

と表される。他方、軸方向の力 F_z との釣合い式は

$$F_z = \int_{r_i}^{r_o} 2\pi r \sigma^{33} dr - \pi r_i^2 p \dots\dots\dots (28)$$

と表せる。半径方向の境界条件は、内外壁上で

$$\begin{aligned}\sigma^{11} &= -p, \quad r = r_i \text{ にて} \\ \sigma^{11} &= 0, \quad r = r_o \text{ にて}\end{aligned} \dots\dots\dots (29)$$

であり、軸方向の境界条件は

$$\lambda_z = \text{const.} \dots\dots\dots (30)$$

となる。したがって式(27)を積分し、境界条件式(29)₂を考慮すると、 $\sigma^{11}(r)$ は

$$\sigma^{11}(r) = - \int_r^{r_o} [(\sigma^{22} - \sigma^{11})/r] dr \dots\dots\dots (31)$$

と書ける。さらに境界条件(29)₁を考慮すると

$$p = \int_{r_i}^{r_o} [(\sigma^{22} - \sigma^{11})/r] dr \dots\dots\dots (32)$$

になり、内圧 p と内半径 r_i の関係が得られる。

上述の境界値問題は、時間 t の関数としての内圧 p に対し、式(32)を満足する内半径 r_i が定まれば解くことができる。いま時刻 $t + \Delta t$ での p に対して適当な内半径 r_i を仮定すると、式(24)によって外半径 r_o が得られ、また式(25)によって壁内の任意の半径位置での円周方向伸長比 λ_θ を得る。さらに非圧縮条件式(23)と条件式(30)を用いると λ_r も得られる。一方、時刻 $t + \Delta t$ での非弾性伸長比 $\lambda_r^i, \lambda_\theta^i, \lambda_z^i$ と変数 X, Y, R の値は、時刻 t でのそれらの時間変化率を式(12)～(19)から求め、それらを時間に関して積分すれば得られる。この値とすでに求めた時刻 $t + \Delta t$ での全伸長比とから、式(22)によって弾性伸長比が計算できる。式(26)からわかるように、 $\sigma^{22} - \sigma^{11}$ は不定圧項 H とは無関係に、弾性伸長比だけで表されることから、式(31)の積分が実行でき、 σ^{11} を得る。式(26)から得られる $\sigma^{22} - \sigma^{11}$ と $\sigma^{33} - \sigma^{11}$ にいま求めた σ^{11} を加えることにより、 σ^{22} および σ^{33} を得る。

このようにして求めた各変数を用いて式(32)の右辺を計算し、それが左辺の内圧 p に等しければ、このときの内半径 r_i およびこれに対応する各変数の値が時刻 $t + \Delta t$ における値として決定される。等しくなければ、等しくなるように内半径 r_i が得られるまで計算を繰返す。なお、内圧 p を時間の関数として与えて対応する内半径 r_i を求める計算は、上述の反復計算が必要であるのに対し、逆に内半径 r_i を時間の関数として与えれば、対応する内圧 p が一意的に定まり、反復計算が不要となる。そこで本研究では、提案した構成式の負荷速度依存性が小さいことも考慮して後者の計算方法を採用し、あらかじめ定めた内圧範囲に対応するように内半径を一定速度で変化させて、繰返し内圧負荷に対する計算を行った。

4. 計算結果とその検討

応力解析の対象として、高見沢らによる雑種犬の総けい動脈に関する in vitro での実験結果を選んだ⁽²⁾。実験では、プリコンディショニングを行った後に一定軸方向伸長比 ($\lambda_z = 1.62, 1.72, 1.79, 1.86$)、外圧零の条件下で、0～27 kPa の繰返し内圧負荷を与えたときの内圧、外径、軸力の間の関係を得ている。本研究ではこのうちの $\lambda_z = 1.72, 1.86$ の場合のデータを採用し、これに基づいて応力解析を行った。

図 1 に、上述の実験の軸方向伸長比 $\lambda_z = 1.72$ と 1.86 の場合の内圧-外径、軸力-外径関係と、それに対して

図 1 雑種犬総けい動脈の内圧-軸力-外径関係の実験結果と非弾性構成式による計算結果

材料定数の同定を行った結果を示す。内圧約 20 kPa 以上のときの実験結果の急峻な曲線を本モデルでは十分表現し得なかったが、これは弾性部分を指数関数形のひずみエネルギー密度関数で表現したことによる限界と考えられる。しかし全体としてはよい一致を見た。ここで定めた材料定数を次に示す。

$$\begin{aligned} a &= 17.5 \text{ kPa}, \nu = 0.15, \mu = 0.325 \\ a &= -0.10, 4\beta + \gamma = -0.07, k_H = 500 \text{ kPa} \cdot \text{s}^{1/3} \\ n &= 3, \mu' = 3.0, \alpha' = -10.0 \\ b_K &= 700 \text{ kPa}, r_R = 5.0, r_Y = 50 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (33)$$

次に、本研究では非弾性変形の影響を明らかにする目的から、本構成式の非弾性部分を無視した横等方弾性構成式によって計算を行ったが、その場合の材料定数には、図 1 に示した非弾性構成式による内圧-外径、軸力-外径の関係に合うように、次の値を選んだ。

$$\begin{aligned} a &= 14.5 \text{ kPa}, \nu = 0.15, \mu = 0.325 \\ a &= -0.10, 4\beta + \gamma = -0.03 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (34)$$

その結果を図 2 に示す。両者はほぼ一致していることがわかる。

以下ではこれらの材料定数を用いて行った非弾性構成式と弾性構成式による応力解析の結果を示す。図 3 (a)~(c) は、 $\lambda_z = 1.72$ のもとで、内圧を 0~27 kPa の範囲で繰返し変化させたときの、(a) 内壁上、(b) 変形前の配置にて内壁から厚さ 1/5 の位置、(c) 外壁上、での応力 $\sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}$ と円周方向伸長比 λ_θ の関係を示している。ただし (a) については、式 (34) の材料定数を用いて行った弾性構成式による結果もあわせて示した。これらの図から、半径方向応力 σ^{11} はいずれの位置においてもほとんど零であって変化しないこと、 σ^{22}, σ^{33} については内壁に近いほど変化が著しいが、特に σ^{22} はその傾向がより顕著であること、また

図 2 弾性構成式と非弾性構成式を用いた場合の内圧-外径関係と軸力-外径関係

振幅の大きい場合に限ってヒステリシスループが現れることがわかる。さらに、図 3 (a) に示した結果から、非弾性構成式による応力のピーク値は、弾性構成式のそれに比べてかなり緩和されていることがわかる。

(a) 内壁上

(b) 内壁から厚さ 1/5 の位置

(c) 外壁上

図 3 軸方向伸長比 1.72 のときの動脈壁各点の応力-伸長比関係

図4は軸方向伸長比 $\lambda_z=1.72$ のもとで繰返し負荷を与えたときの負荷経路上の内圧値 $p=6.7, 20.0$ kPaにおける応力 $\sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}$ の壁内分布を非弾性構成式と弾性構成式によって予測した結果である。内圧値が小さい $p=6.7$ kPaの場合には二つの構成式による応力の大きさの予測値には大きな差は認められないが、内圧値が大きい場合には、非弾性構成式による円周方向応力と軸方向応力の予測値が弾性構成式によるそれよりも若干下回っていることがわかる。すなわち図2に示した内圧-外径および軸力-外径関係に対しては両構成式はほぼ同じ結果を与えるにもかかわらず、壁内の応力分布に関しては非弾性構成式は応力集中を緩和する結果を与える。

以上のように、ここで取扱った問題に関する限り非弾性特性の効果は特に顕著なものではない。しかし、このような非弾性特性は血流と血管壁の相互作用に影響を与え、血圧値そのものが異なってくる可能性があるから、その効果については今後さらに検討する必要がある。

5. 結 言

本研究では、血管壁の非弾性特性が壁内の応力分布に与える影響を明らかにするため、著者らが提案した横等方非弾性構成式を用いて応力解析を試みた。解析の対象には高見沢らによる雑種犬の総けい動脈に関するin vitroでの実験結果を選んだ。

まず、一定軸方向伸長比、外圧零のもとで、繰返し内圧負荷を与える場合に対して境界値問題を解き、実験結果に一致するように材料定数を決定した。また本構成式の非弾性部分を無視した弾性モデルについても材料定数を決定した。

次に、同定した材料定数を用いた解析により、壁内各点での応力履歴ならびに壁内応力分布を検討した。その結果、応力が集中する内壁においてヒステリシスループが現れること、また応力分布に関しては、非弾性特性を考慮すると内壁近傍での応力集中が緩和されることが明らかとなった。

終わりに、本研究を行うにあたり、貴重な実験デー

図4 軸方向伸長比1.72のときの、負荷経路上での内圧 $p=6.7, 20.0$ kPaに対する動脈壁内の応力分布

タを快く提供して下さいった国立循環器病センター研究所、高見沢計一氏に深く感謝する。またご討論をいただいた名古屋大学工学部、村上澄男教授に謝意を表する。

文 献

- (1) Chuong, C. J. and Fung, Y. C., Three-Dimensional Stress Distribution in Arteries, *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **105**(1983), 268.
- (2) Takamizawa, K. and Hayashi, K., Strain Energy Density Function and Uniform Strain Hypothesis for Arterial Mechanics, *J. Biomech.*, **20**(1987), 7.
- (3) Vaishnav, R. N., Young, J. T. and Patel, D. J., Distribution of Stress and of Strain-Energy Density Through the Wall Thickness in a Canine Aortic Segment, *Circ. Res.*, **32**(1973), 577.
- (4) Wu, S. G. and Lee, G. C., On Nonlinear Viscoelastic Properties of Arterial Tissue, *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **106**(1984), 42.
- (5) Fung, Y. C., Fronek, K. and Patitucci, P., Pseudoelasticity of arteries and the choice of its mathematical expression, *Am. J. Physiol.*, **237**(1979), H 620.
- (6) Fung, Y. C., *Biomechanics-Mechanical Properties of Living Tissues*, (1981), 261, Springer-Verlag.
- (7) 田中・山田, 血管壁に対する非弾性構成式の定式化, 機論, **54-505, A** (1988), 1670.
- (8) 田中・山田, 血管壁に対する横等方非弾性構成式の定式化, 機論, **56-521, A** (1990), 107.